

שידוכים יציבים וסטודנטים לרפואה: תיאוריה ושימושיה

סרג'יו הרט ועמרי אשחר

המודל

תחילתו של מודל השידוכים היציבים בעבודתם של דיוויד גייל (Gale) ולויד שפלי (Shapley) מ-1962. לשם פשטות ההצגה, נתחיל במודל הכולל הנחות חזקות (בהמשך נסיר חלק מהנחות). נניח שיש שתי קבוצות, קבוצה של גברים וקבוצה של נשים, ונניח שמספר הגברים שווה למספר הנשים. נניח שלכל גבר יש רשימה המדרגת את הנשים בהתאם להעדפותיו (האשה המועדפת ביותר, זו שלאחריה וכן הלאה - עד לאשה המועדפת פחות מכולן; כל הנשים מופיעות ברשימה של כל גבר). באותו אופן יש לכל אשה רשימה המדרגת את הגברים בהתאם להעדפותיה. נסתכל לדוגמה על קבוצה של שלוש נשים - אביבה, בתיה וגליה, וקבוצה של שלושה גברים - תומר, שלמה ורפי, ונסכם בטבלה הבאה את העדפותיהם:

| העדפות הנשים | | | העדפות הגברים | | |
|--------------|------|------|---------------|-------|-------|
| אביבה | בתיה | גליה | תומר | שלמה | רפי |
| רפי | שלמה | גליה | בתיה | אביבה | אביבה |
| שלמה | רפי | תומר | אביבה | בתיה | גליה |
| תומר | תומר | רפי | גליה | גליה | בתיה |

כלומר ברשימה של אביבה, רפי הוא הראשון (המועדף ביותר), שלמה השני, ותומר האחרון, ובאופן דומה מסודרים שאר הנשים והגברים.

שידוך מוגדר כהתאמה בין הנשים לגברים, כך שלכל אשה מותאם גבר אחד ויחיד, ולכל גבר מותאמת אשה אחת ויחידה; כלומר כחלוקה של הנשים והגברים לזוגות (כשכל זוג מורכב מאשה אחת ומגבר אחד).

דוגמה (1) לשידוך: אביבה - תומר, בתיה - שלמה, גליה - רפי.
דוגמה (2) לשידוך: אביבה - רפי, בתיה - שלמה, גליה - תומר.

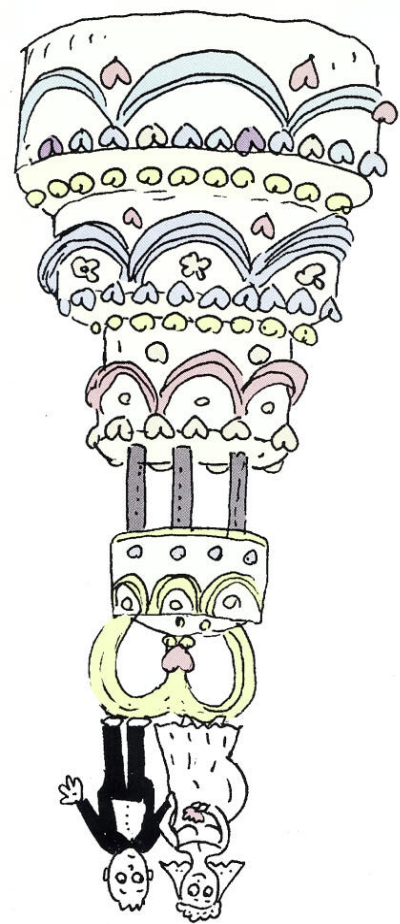
נסתכל על שידוך (1), ועל הזוג אביבה - רפי (שאיננו אחד מהזוגות בשידוך). לפי רשימת ההעדפות, אפשר לראות שאביבה מעדיפה את רפי על פני תומר (שהיא משודכת לו), ורפי מעדיף את אביבה על פני גליה (שהוא משודך לה), כלומר אביבה ורפי מעדיפים זה את זה על פני בני זוגם הנוכחיים. ברגע שיש בשידוך זוג כזה (שנקרא זוג חוסם), השידוך המוצע יתפרק, כיוון שבני הזוג החוסם ינטשו אותו. **זוג חוסם** של שידוך מסוים מוגדר, אם כן, כזוג שאינו אחד מהזוגות באותו שידוך, ומקיים את התכונה הבאה: האשה מהזוג החוסם מעדיפה את הגבר מהזוג החוסם על פני בן-זוגה לשידוך, והגבר מהזוג החוסם מעדיף את האשה מהזוג החוסם על פני בת-זוגו לשידוך. הואיל ושידוך שיש בו זוג חוסם יתפרק, נגדיר **שידוך יציב** כשידוך שאין לו זוג חוסם.

נבדוק עתה האם שידוך (2) (אביבה - רפי, בתיה - שלמה, גליה - תומר) הוא יציב: אביבה, בתיה ורפי ודאי אינם יכולים להיות בזוג חוסם, מכיוון שלושם קיבלו בשידוך את בן/בת הזוג המועדפים עליהם ביותר; גליה ושלמה אינם זוג חוסם, כי שלמה מעדיף את זוגתו הנוכחית (בתיה) על פני גליה. כלומר בדקנו את כל הזוגות שלא נמצאים בשידוך, ומצאנו שאף אחד מהם איננו זוג חוסם, ולכן השידוך יציב.

משפט: תמיד קיים שידוך יציב.
הוכחה: נתאר תהליך שבסופו מתקבל שידוך, ונראה שהשידוך המתקבל הוא יציב, ובכך נוכיח את המשפט:

נדמה לעצמנו שבכל יום הולך כל גבר שאין לו בת-זוג ומציע את עצמו לאחת הנשים, וכל אשה יכולה לקבל את הצעת השידוך של הגבר או לדחותה. ביום הראשון, כל גבר יציע את עצמו לאשה הראשונה ברשימת העדפותיו (בדוגמה שלנו, תומר יציע את עצמו לבתיה, שלמה ורפי יציעו את עצמם לאביבה). כל אשה שקיבלה הצעה אחת או יותר מגבר תשמור את ההצעה של הגבר המועדף ביותר ברשימתה, ותדחה את ההצעות האחרות. גבר שהצעתו לאשה נדחתה ימחק את שמה מרשימתו (בדוגמה שלנו, אביבה תשמור את ההצעה של רפי ותדחה את ההצעה של שלמה; בתיה תשמור את ההצעה של תומר, ושלמה ימחק את שמה של אביבה מרשימתו).

רופ' סרג'יו הרט, המחלקה למתמטיקה, המחלקה לכלכלה והמרכז לחקר הרציונליות וההחלטות האינטראקטיביות, האוניברסיטה העברית בירושלים.



ביום השני, כל גבר שהצעתו נדחתה ביום הראשון יציע את עצמו לאשה הבאה ברשימתו (בדוגמה שלנו, שלמה יציע את עצמו לבתיה). שוב, כל אשה תשמור את ההצעה של הגבר העדיף בעיניה מבין האפשרויות העומדות בפניה, ותדחה את ההצעות האחרות. אם היתה לה הצעה ביום הראשון, היא תבחר, על-פי העדפותיה, איזו הצעה לשמור מבין ההצעה מהיום הקודם וההצעות החדשות (בדוגמה שלנו, בתיה תשמור את ההצעה של תומר ותשחרר את שלמה, והוא ימחק את בתיה מרשימתו). ביום השלישי, באותו אופן, כל הגברים הפנויים באותו יום יציעו את עצמם לאשה הבאה ברשימתם, וכן הלאה.

נסכם בטבלה את תהליך ההצעות בדוגמה שלנו (שמות מודגשים מסמנים את ההצעות המועברות מהשלב הקודם):

| יום | אביבה | בתיה | גליה |
|---------|-----------|------------|------|
| 1 הצעות | שלמה, רפי | תומר | - |
| בחירה | רפי | תומר | - |
| 2 הצעות | רפי | תומר, שלמה | - |
| בחירה | רפי | שלמה | - |
| 3 הצעות | רפי, תומר | שלמה | - |
| בחירה | רפי | שלמה | - |
| 4 הצעות | רפי | שלמה | תומר |
| בחירה | רפי | שלמה | תומר |

בסופו של דבר ייגמר התהליך, ונגיע למצב שכל גבר מצא אשה שלא תדחה את הצעתו, כלומר נקבל שידוך. במקרה זה התקבל השידוך: אביבה - רפי, בתיה - שלמה, גליה - תומר. מדוע התהליך סופי? בכל יום, לפחות גבר אחד מציע את עצמו לאשה (אחרת - התהליך הסתיים), כלומר בכל יום קורה לפחות אחד משני הדברים הבאים: או שאשה שלא היתה לה הצעה קיבלה הצעה, או שגבר נדחה, ומחק שם של אשה אחת מרשימתו. בסופו של דבר, כל אשה תקבל הצעה, כי סדר ההעדפה של הגברים יורד, ובשלב כלשהו יגיעו לכל אשה. אפשר לראות שברגע שכל אשה מקבלת הצעה - התהליך מסתיים.

נראה עתה כי השידוך המתקבל בסופו של התהליך שתואר הוא יציב: ראשית, נשים לב שבדוגמה שהבאנו אכן הביא התהליך לשידוך יציב (זהו שידוך (2) שבדקנו קודם ומצאנו שהוא יציב). נניח עתה על דרך השלילה, שהתהליך הביא לשידוך לא יציב: במקרה כזה קיים לפחות זוג חוסם אחד. בזוג כזה, מאחר שזהו זוג חוסם, הגבר מעדיף את האשה מהזוג החוסם על פני האשה שהוא משודך לה. אבל זה אומר שבשלב כלשהו בתהליך, הגבר כבר הציע את עצמו לאשה מהזוג החוסם, כלומר קרה אחד משני הדברים הבאים: האשה דחתה את הצעת הגבר, מכיוון שהיתה לה כבר הצעה של מישהו שעדיף בעיניה, או שהאשה קיבלה את ההצעה של הגבר, אך בהמשך שחררה אותו לטובת גבר אחר שהציע את עצמו והיה עדיף בעיניה. מכיוון שאשה תמיד דוחה הצעה של גבר רק כדי לשמור הצעה של גבר העדיף בעיניה, לא ייתכן שבסופו של התהליך היא תהיה עם גבר מועדף פחות מהגבר שבזוג החוסם. כלומר, האשה מעדיפה את הגבר שהיא משודכת לו על פני הגבר מהזוג החוסם - סתירה להגדרה של זוג חוסם. כלומר, אכן מתקבל שידוך יציב.

הוכחנו אם כן שתהליך ההצעות מביא לשידוך, ושהשידוך שמתקבל הוא יציב, ובכך הסתיימה הוכחת המשפט.

ברור שהתהליך המתואר מוביל לשידוך יציב מסוים; אבל האם זהו השידוך היציב היחיד? התשובה היא: לא. ייתכן שיהיו שידוכים יציבים רבים עבור אותן רשימות העדפות של הנשים והגברים. תוצאה מעניינת היא, שהתהליך שתוארנו מביא לשידוך היציב הטוב ביותר מבחינת הגברים, והגרוע ביותר מבחינת הנשים (כלומר בכל שידוך יציב אחר, כל גבר משתדך לאותה אשה או לאשה נמוכה יותר ברשימתו, וכל אשה משתדכת לאותו גבר או לגבר יותר גבוה ברשימתה).

עמרי אשחר, המחלקה לכלכלה והמרכז לחקר הרציונליות וההחלטות האינטראקטיביות, האוניברסיטה העברית בירושלים.



תורת המשחקים מטנלת במצבים שבהם קיימים יחסי גומלין בין שחקנים: בני זוג מתווכחים האם ללכת לאופס בלט או לתחרות איגרוף; אונר וקונה מתמקחים על מחירו של מוצר; חברות מתחרות ביניהן על נתח השוק של מוצריהן; מכלגות מקיימות מצעים להקמת קואליציה אחרי הבחירות; מדינות מקיימות משא ומתן (או מלחמה) על קביעת הגבול ביניהן; דבורים מתנשות נרחים אלאי צוך לאנול, ונרחים מתנשים דבורים שיאביקו אותם - כל אלה הן דוגמאות למצבים שתורת המשחקים עוסקת בהם. המצבים השונים, נשהם מתוארים באמצעות אודל מתמטי, הם המשחקים. מהדוגמאות ברור שהשחקנים אינם בהנרח בני-אדם, ושתוצאתו של משחק איננה בהנרח ניתוחן או הפסד לשחקנים. השחקנים יכולים להיות חברות, מדינות וכדומה, ותוצאת המשחק תתבטא בדרך כלל בתשלומים לשחקנים או בתועלת שהם מניקים. יחסי הגומלין בין השחקנים הם תוצאה של מכלול המטרות שלהם, כאשר העניין במשחק נובע מכך שיש ניגוד אינטרסים בין השחקנים. לדוגמה, במיקוח בין אונר לקונה על דנישת מוצר מסוים, שני השחקנים (האונר והקונה) אשתנים נעולה כדי להשיג את מטרותם המשותפת - ביצוע העסקה. לצומת זאת, יש להם מטרות מנוגדות לגבי המחיר. תורת המשחקים מציגה אודלים מתמטיים למצבים אקטואליים כלליים, ומאליצה לשחקנים אילו נעולות לנקוט - איזה מחיר נדאי לאונר להציע, כמה מטרות נוליטיות נדאי למכלגה לדרוש וכדומה. תורת המשחקים היא, אם נן, ענף של המתמטיקה השימושית; אלא שלא נארבית ענפי המתמטיקה השימושית, שישוואם בעיקר במדעי הטבע וההנדסה, משמשת תורת המשחקים בעיקר את מדעי החברה. במיוחד ניכרת השפעתה על הנלנה, אולם היא הולכת ומודרת גם אל תחומים אחרים, כמו נוליטיקה, נסיכולוגיה וביולוגיה.

הכללת המודל

אפשר להחליש חלק מההנחות שהנחנו לגבי המודל, באופן שמשפט השידוכים היציבים עדיין יתקיים (כלומר יתקיים שידוך יציב אחד לפחות): ניתן להניח שמספר הנשים שונה ממספר הגברים, ואז חלק מהנשים או הגברים יישארו ללא שידוך. אפשר להניח שרשימת ההעדפות של הפרטים אינה כוללת את כל אנשי/נשות הקבוצה השנייה, כלומר שאשה עשויה להעדיף להישאר רווקה על פני השתדכות לחלק מהגברים, ולהפך (ואז מתקבל שידוך יציב, שבו חלק מהנשים והגברים עשויים להישאר לא משודכים). אפשר להניח שלפרטים יש העדפות חלשות, כלומר אשה יכולה להעדיף באותה מידה כמה גברים, ולהפך. אפשרות נוספת היא של שידוך של רבים לאחד (למשל בתי-חרושת ועובדים, אוניברסיטאות וסטודנטים). מקרה מעניין שבו המשפט אינו מתקיים הוא כאשר השידוכים הם בין חברי אותה קבוצה ("קבוצה חד-מינית"), כלומר לכל חבר בקבוצה יש רשימת העדפות המדרגת את שאר חברי הקבוצה. במצב כזה ייתכן שהעדפות חברי הקבוצה יובילו לכך ששום שידוך לא יהיה יציב.

שידוכים יציבים וקבלה לסטאזי של סטודנטים לרפואה

כבר מתחילת המאה הצינו בתי-חולים בארצות-הברית הצעות קבלה לסטאזי לסטודנטים לרפואה לקראת סיום לימודיהם. התחרות בין בתי-החולים על הסטודנטים המצטיינים גרמה לכך שמועד הגשת ההצעות לסטודנטים הלך והוקדם בהדרגה במשך השנים, עד שנוצר מצב אבסורדי שבו בתי-החולים הגישו הצעות לסטודנטים שנים רבות לפני סוף לימודיהם, כאשר לא היה אפשר עדיין לדעת באופן מהימן מה טיבם של הסטודנטים.

כדי לפתור את הבעיה, קבעה ב-1945 האגודה האמריקנית של בתי-הספר לרפואה תקנות שהציגו תאריכים שבהם אפשר להגיש הצעות לסטודנטים, ותקנות אלה חייבו את כל בתי-החולים. תקנות אלה אמנם מנעו הגשת הצעות לסטודנטים זמן רב לפני סיום לימודיהם, אך הביאו ליצירת תווה ובוהו בפרק הזמן שבין הגשת ההצעות של בתי-החולים לבין החזרת תשובות הסטודנטים. הסטודנטים העדיפו להשהות את תשובתם לבתי-החולים עד הרגע האחרון, כדי לראות שמה יקבלו בינתיים הצעות טובות יותר, ואילו בתי-החולים לחצו על הסטודנטים לתת את תשובתם בהקדם, כדי שיוכלו לפנות לסטודנטים אחרים במקרה של דחייה. היה ניסיון להקטין את אי-הסדר, על-ידי צמצום למינימום של פרק הזמן שבין הגשת ההצעות של בתי-החולים לבין הגשת התשובות בידי הסטודנטים (עד ל-12 שעות בשנה האחרונה שבה הופעל התהליך), ועל-ידי איסור על קשר בין הסטודנטים לבתי-החולים מלבד משלוח ההצעות והתשובות. ניסיון זה לא היה מוצלח.

החל משנת 1951 הוחלט על שינוי השיטה. כל בתי-החולים וכל הסטודנטים התבקשו למסור את העדפותיהם לגוף מרכזי, וגוף זה השתמש בהליך מסוים כדי לקבוע את השיבוצים. שיטה זו זכתה מיד להצלחה גדולה מאוד, ובשנים הראשונות להפעלתה לקחו בה חלק יותר מ-95 אחוזים מהסטודנטים ומבתי-החולים, אף-על-פי שלא חויבו בכך. רק עשר שנים לאחר מכן כתבו גייל ושלפי, שהוזכרו לעיל, את עבודתם על התהליך למציאת שידוך יציב, ורק שנים לאחר מכן התגלה שהשיטה שהוצעה מיושמת בפועל כבר שנים רבות. תהליך השיבוץ המיושם בעת קבלת הסטודנטים לבתי-החולים הוא בדיוק תהליך החיפוש שתואר למעלה (בהכללה של "הרבה לאחד"), כאשר בתי-החולים ממלאים את תפקיד הגברים בתהליך (מגישי ההצעות), והסטודנטים ממלאים את תפקיד הנשים (מקבלים או דוחים הצעות).

דווקא בשנים האחרונות (החל מאמצע שנות השבעים) ניכרת ירידה בהצלחתה של השיטה, ואחוז הסטודנטים ובתי-החולים שמשתתפים בה יורד (אם כי הוא עדיין גבוה). הבעיה העיקרית הפוגעת בהצלחת השיטה היא דווקא השידוכים - אך לא השידוכים בין הסטודנטים לבתי-החולים, אלא השידוכים בין הסטודנטים והסטודנטיות לרפואה... כאשר שני סטודנטים נישאים, הם רוצים, מטבע הדברים, לעבוד בבתי-חולים הנמצאים באותו אזור, ובשיטה הרגילה הם עלולים למצוא את עצמם כל אחד בצד אחר של המדינה; לכן הם נאלצים לפרוש מהתהליך ולהתקבל לבתי-החולים בצורה אחרת. ■