תורת המשחקים: מדע טהור שימושי

מאת **סרג'יו הרט**

מהי תורת המשחקים? האם היא מדע טהור או מדע שימושי? האם היא ענף של מתמטיקה או ענף של כלכלה – או משהו מעבר לזה?

תורת המשחקים

תורת המשחקים נולדה כתחום מדעי בזמן מלחמת העולם השנייה, עם פרסום הספר המונומנטלי *The Theory of Games and Economic Behavior* מאת המתמטיקאי ג'ון וון נוימן (John von Neumann) והכלכלן אוסקר מורגנשטרן (Oskar Morgenstern) [1].

רוב החוקרים בתורת המשחקים בראשית דרכה היו מתמטיקאים – לא מעט בזכותו של וון נוימן, שהיה אחד המתמטיקאים הדגולים במאה העשרים. עם הזמן הלך התחום והתבסס, וכיום הוא תופס מקום נכבד בדיסציפלינות מדעיות רבות – בראש ובראשונה בכלכלה, אך גם בפסיכולוגיה, בביולוגיה אבולוציונית, במדעי המחשב, במדע המדינה, בסטטיסטיקה, במשפטים, בפילוסופיה ואפילו בהיסטוריה ובספרות (ראו למשל את מגוון הפרקים בשלושת הכרכים של *Handbook of Game Theory* [2]).

תורת המשחקים חוקרת התנהגות וקבלת החלטות במצבים מרובי משתתפים שבהם פעולותיו של כל משתתף משפיעות לא רק עליו אלא גם על האחרים. כל משתתף, "שחקן", מעוניין להגיע לתוצאה הטובה ביותר מבחינתו, אך בדרך כלל אין באפשרותו לגרום לכך בעצמו (וזה בדיוק מה שהופך את המצב ל"משחק", להבדיל מבעיית אופטימיזציה). על המשתתף להביא בחשבון שגם המשתתפים האחרים פועלים בצורה דומה: הם מנסים להגיע לתוצאה הטובה ביותר **מבחינתם**, שהיא לאו דווקא הטובה ביותר **מבחינתו**. יתר על כן, המשתתפים האחרים מביאים בחשבון את מה שהוא עושה, וכן הלאה... לכאורה, מעגל קסמים בלתי פתיר.

תורת המשחקים מצליחה לחתוך קשר גורדי זה ולהציע מושגי פתרון הולמים.

שיווי משקל נש (Nash)

נתחיל במושג הידוע "שיווי משקל אסטרטגי" או "שיווי משקל נש" [3], על שם ממציאו ג'ון נש (John Nash Jr.), חתן פרס נובל בכלכלה לשנת 1994. שיווי משקל נש הוא מצב שבו אין לשום משתתף דרך לשפר את מצבו בכוחות עצמו. כלומר, שינוי חד־צדדי בפעולה של משתתף אחד בלבד – כאשר כל האחרים אינם משנים את פעולותיהם – אינו יכול להביא לתוצאה עדיפה מבחינתו על פני התוצאה הנוכחית.

שיווי משקל מתואם

מושג אחר, "שיווי משקל מתואם", הוצע על ידי עמיתנו ישראל אומן [4], חתן פרס נובל בכלכלה לשנת 2005. בדומה לשיווי משקל נש, שיווי משקל מתואם הוא מצב שבו שום משתתף אינו יכול לשפר את מצבו בשינוי חד־צדדי של פעולתו בלבד. אולם להבדיל משיווי משקל נש, כאן מניחים כי לפני שהמשתתפים מחליטים על פעולותיהם הם נחשפים למידע מסוים. מידע זה יכול להיות משותף לכולם ("מידע פומבי"), שונה ממשתתף למשתתף ("מידע פרטי") או שילוב שלהם. נוסף על כך, מידע זה אינו משפיע ישירות על תוצאות המשחק – ובכל זאת הוא עשוי להיות מובא בחשבון ולהשפיע על החלטות המשתתפים.

ניקח לדוגמה מידע פומבי כמו מזג האוויר: אנשים עשויים להתנהג אחרת ביום יפה ושטוף שמש מאשר ביום גשום וקר. כך הם עשויים להגיע לשיוויֵי משקל שונים, גם כאשר אין למזג האוויר השפעה ישירה על תוצאות המשחק.

באופן כללי יותר, המידע שהשחקנים מקבלים מאפשר להם לתאם את פעולותיהם במידה זו או אחרת. דוגמה לכך בטבע היא אותן ה"מלחמות" שעלותן למשתתפים גבוהה והנמנעות על ידי כלל תיאום פשוט: בעל השטח נשאר במקומו והפולש עוזב – ללא תלות בחוזק היחסי של שני הפרטים [5], [6].

במקרים מסוימים יש גם אפשרויות תיאום משוכללות יותר, העשויות להביא לתוצאות עדיפות.

ידיעה משותפת של רציונליות

נראה כעת דרך אחרת להבין מה הוא שיווי משקל מתואם – דרך אשר אינה משתמשת כלל במושג "שיווי משקל".

נניח שכל אחד ממקבלי ההחלטות מתנהג בצורה הטובה ביותר להשגת מטרותיו, רצונותיו ו"תועלתו". כל זאת, כמובן, בהינתן המידע העומד לרשותו, הערכותיו ו"אמונותיו" לגבי הסביבה שבה הוא פועל, המשתתפים האחרים – על החלטותיהם ועל המידע העומד לרשותם – וכדומה. מקבל החלטות כזה מוגדר כ"רציונלי".

נניח שהמשתתפים – שמעון ולוי – הם רציונליים. נניח עוד שכל אחד מהם יודע זאת: שמעון יודע שלוי רציונלי ולוי יודע ששמעון רציונלי. כמו כן לוי יודע ששמעון יודע שהוא, לוי, רציונלי, וגם שמעון יודע כל זאת – שלוי יודע ששמעון יודע שלוי רציונלי, וכן הלאה. מצב זה נקרא "ידיעה משותפת של רציונליות".

המפתיע והמעניין בדבר הוא שמצב של ידיעה משותפת של רציונליות שקול למצב של שיווי משקל מתואם [7].

קיום שיווי משקל נש

לאחר שמגדירים מושג פתרון, כגון שיווי משקל נש או שיווי משקל מתואם, מתעוררת באופן טבעי השאלה אם תמיד קיים שיווי משקל כזה. לכאורה ייתכנו משחקים שבהם בכל מצב יש משתתף שכדאי לו לשנות את החלטתו ובכך לשפר את מצבו – וכך כל המערכת נכנסת למעגל אין־סופי.

ג'ון נש הוכיח [3] כי בכל משחק סופי (שבו יש מספר סופי של משתתפים ולכל אחד מהם יש מספר סופי של פעולות אפשריות) יש לפחות שיווי משקל נש אחד. ייתכן כי שיווי המשקל ידרוש מהשחקנים לבחור את פעולותיהם באופן הסתברותי ולא דטרמיניסטי (כמו למשל במשחק הילדים הידוע "זוג או פרט"). ההוכחה כאן משתמשת בכלי מתמטי לא פשוט, הנקרא משפט "נקודת שֶׁבֶת" (המשפט של בראוור [Brouwer] או המשפט של קקוטאני [Kakutani]).

קיום שיווי משקל מתואם

ומה לגבי שיווי משקל מתואם? נשים לב כי כל שיווי משקל נש הוא גם שיווי משקל מתואם: שיווי משקל נש מתקבל כאשר אין תלות בין המידע שמקבלים המשתתפים השונים; זאת אומרת, שום משתתף אינו יכול ללמוד מהמידע שקיבל דבר על אודות המידע שקיבלו האחרים. מכאן ומהמשפט בסעיף הקודם על קיום שיווי משקל נש נובע ישירות שבכל משחק סופי יש שיווי משקל מתואם.

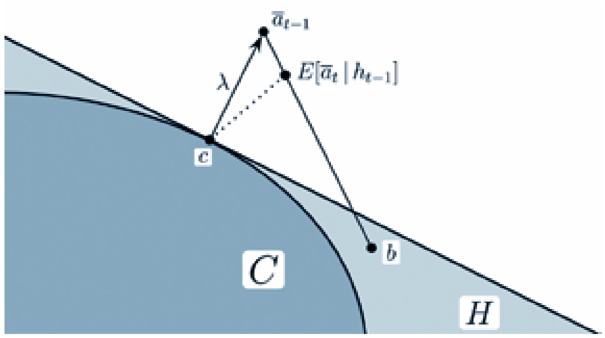
כאן מתעוררת בעיה: שיווי משקל מתואם הוא מושג מתמטי פשוט יחסית (הוא מוגדר על ידי מערכת של אי־שוויונים לינֵאריים), ואילו הוכחת הקיום, כפי שראינו, משתמשת בכלי מתמטי מסובך יחסית (משפט "נקודת שֶׁבֶת" לא־לינֵארי). אף על פי כן, במשך שנים רבות לא נמצאה הוכחה אחרת.

באמצע שנות השמונים, בעבודה משותפת של פרופ' דוד שמיידלר (מאוניברסיטת תל־אביב) ושלי, הצלחנו למצוא הוכחה אלמנטרית – אך לאו דווקא פשוטה – למשפט מתמטי זה של קיום שיווי משקל מתואם [8]. ההוכחה שלנו אכן משתמשת בכלים לינֵאריים (כגון משפט "ההפרדה", משפט "המינימקס" או משפט "הדואליות הלינֵארית").

לכאורה, מחקר זה לא נראה חשוב כלל (מלבד אולי למתמטיקאים המעריכים את היופי והאלגנטיות של ההוכחות ה"מתאימות") – הרי זו רק הוכחה נוספת למשהו ידוע ומוכח. ואולם...

כללי התנהגות פשוטים ו"כלל החרטה"

הוכחה זו הובילה בסופו של דבר לגילויים חדשים. באמצע שנות התשעים, בעבודה משותפת של פרופ' אנדראו מס־קולל (Andreu Mas-Colell, אז באוניברסיטת הרוורד ועכשיו באוניברסיטת פומפיאו פברה בברצלונה) ושלי, הצענו כללי התנהגות פשוטים של למידה והסתגלות המובילים לשיווי משקל מתואם [9], [10]. כללים אלו והמערכות הדינמיות המתאימות התקבלו כתולדה של הבנייה בהוכחה של הרט ושמיידלר לקיום שיווי משקל מתואם, לאחר מספר שלבי פיתוח (שנועדו להבטיח, בין השאר, שכל שחקן פועל באופן "עצמאי").



"הגאומטרייה" של "כלל החרטה"

המעניין בתוצאה זו הוא שיש כללי התנהגות פשוטים – "היוריסטיקות" או "כללי אצבע" – המובילים לאורך זמן לשיוויי משקל מתואמים; כזכור, אלה הם המצבים המגלמים רציונליות מלאה של המשתתפים (ואפילו ידיעה משותפת של הרציונליות). המשתמשים בכללים אלו צריכים לדעת מעט מאוד על סביבתם ועל המשתתפים האחרים (אם בכלל), והם רחוקים מאוד מלהיות רציונליים (זהו מצב של "רציונליות חסומה"); ובכל זאת הראינו כי התנהגותם לאורך זמן נראית כמו ההתנהגות של משתתפים רציונליים לחלוטין.

דוגמה לכלל התנהגות כזה הוא "כלל החרטה" (regret matching) אשר הוצע במאמר [9]. "חרטה" מודדת בכמה היו התוצאות יכולות להיות טובות יותר, אם בכלל, לו הייתה החלטה שונה בעבר. חרטות אלו קובעות את ההתנהגות: אם אין חרטה – ממשיכים ללא שינוי; ואם יש חרטה – נוטים לשנות את ההחלטה, כאשר הנטייה (קרי: ההסתברות) לשינוי גוברת ככל שהחרטה חזקה יותר.

כללי התנהגות אלה – אשר, כאמור, התקבלו מתוך בנייה מתמטית טהורה – מתבררים בסופו של דבר קרובים מאוד לאופן שבו אנשים באמת מתנהגים (כמו למשל הכלל הידוע "הרכב מנצח אין מחליפים"); ניתן לראות זאת בספרות בפסיכולוגיה ובכלכלה ההתנהגותית [11], ולאחרונה גם בנֵירוביולוגיה ובמדעים הקוגניטיביים [12].

"רדיו קוגניטיבי"

לאחרונה הוצע שימוש אפשרי להיוריסטיקות כמו כלל החרטה באלגוריתמים המיועדים לפתור בעיות תעבורה ברשתות תקשורת. התחום הידוע בשם "רדיו קוגניטיבי" מתמודד עם הצורך של מכשירי הקשר האישיים הרבים (טלפונים ניידים, איתוריות, מכשירי איכון לוויניים וכדומה) להשתלב ולהשתמש יחד באותם ערוצי תקשורת. פתרון מרוכז של "מנהל רשת" המקבל בקשות ומחלק את התדרים וזמני השימוש אינו בר ביצוע כאן, בגלל ריבוי המשתמשים ושונותם. על כן הוצע לנסות להשתמש בפתרונות "מבוזרים" (distributed): מתקינים בכל מכשיר תכנה פשוטה המטפלת באינטרקצייה שלו עם הסביבה הקרובה, בשאיפה שכל המערכת תתפקד ביעילות. מתברר כי כללים פשוטים מסוג ההיוריסטיקות של הרט ומס־קולל יכולים להיות יעילים מאוד במקרים כאלה [13] (כרגע מדובר בסימולציות תאורטיות בלבד, כך שאיננו מקבלים עלינו אחריות לבעיות התקשורת של הטלפונים הניידים שלכם...).

תורת המשחקים החישובית

שימוש נוסף בבנייה של הרט ושמיידלר נמצא בתחום חדש המתפתח כיום במדעי המחשב, הנקרא "תורת המשחקים החישובית" או "תורת המשחקים האלגוריתמית" – תחום שבו מתמודדים עם בעיות של חישוב נקודות שיווי משקל במצבים מרובי משתתפים, כמו רשתות גדולות [14].

מסקנה: מחקר בסיסי ומחקר שימושי

לסיכום החלק הזה: ראינו כיצד מחקר בסיסי – מחקר ללא תועלת מידית, אם בכלל (כמו הוכחה חדשה למשפט מתמטי ידוע ומוכח) – יכול להביא לתובנות חדשות ולשימושים מפתיעים. קשה מאוד לחזות כיצד יתפתחו הדברים בעתיד ולאיזה כיוון.

יש הטוענים כי מוכיחים יותר מדי משפטים במתמטיקה. זה כנראה נכון. אולם איך נדע מראש מה הם המשפטים ה"מועילים" ומה הם המשפטים ה"מיותרים"? בסופו של דבר רק המועילים ישרדו – "האבולוציה המדעית" תדאג לכך. אך, כמו בטבע, דרושות "מוטציות" מחקריות רבות בדרך – חלקן הגדול לא מועילות – כדי שיהיה לברֵרה הטבעית המדעית ממה לבחור את המוצלחים.

תמריצים והנדסת משחקים

נעבור כעת לבעיה אחרת. נדמיין שני צדדים המתמקחים על נושא מסוים במשך זמן רב ואינם מצליחים להגיע להסכם. למישהו העומד מן הצד מסתבר שיש פתרון פשוט יחסית: פשרה סבירה ב"אמצע הדרך" בין עמדות שני הצדדים. אך כיצד מביאים את הצדדים להסכים לפשרה? אם נציע את הפשרה ורק צד אחד יסכים לה, כי אז ההסכמה תיראה כוויתור מצדו ותשמש נקודת מוצא להמשך המשא ומתן – מה שירע את מצבו של הצד שהסכים לפשרה. הדבר נותן תמריץ לכל אחד מהצדדים שלא להסכים לפשרה המוצעת.

כדי להבהיר זאת, נדמיין משא ומתן בין מוכר לקונה. המוכר מבקש 200, והקונה מוכן לשלם 100. מגיע עכשיו מתווך ומציע פשרה, נאמר 150. נניח שהמוכר מסכים לפשרה אך הקונה לא מסכים לה; עמדות הצדדים נראות עתה 150 למוכר (הוא הרי הסכים לפשרה) ו־100 לקונה (שלא הסכים לפשרה). אם בסופו של דבר יגיעו להסכם, המחיר יהיה בין 100 לבין 150; בכל מקרה יקבל המוכר פחות מ־150. דבר דומה יקרה אם רק הקונה יסכים לפשרה: הוא כבר מוכן לשלם 150, כך שבסופו של דבר הוא יצטרך לשלם יותר מזה. רואים כאן בבירור כיצד הסכמה לפשרה של צד אחד בלבד מרעה את מצבו, דבר המגדיל את התמריץ שלו לא להסכים.

כיצד פותרים את הבעיה? בהנחה שהמתווך אמין בעיני שני הצדדים, ניתן לכנס אותם לפגישה שבה יובהרו להם היטב "כללי המשחק":

- המתווך הולך להציע כאן פשרה.
- כעבור זמן מסוים שנקבע מראש יודיע כל צד **באופן פרטי** למתווך אם הוא מסכים לפשרה שהוצעה או אינו מסכים לה.
- אם כל אחד משני הצדדים יסכים לפשרה, יודיע זאת המתווך לשניהם – "מזל טוב על ההסכם!".
- אם לפחות צד אחד לא יסכים לפשרה, יודיע המתווך לשני הצדדים שאין הסכם, **בלי לגלות לשום צד אם הצד האחר הסכים לפשרה אם לאו**.
- בכך מסתיים סופית חלקו של המתווך.

כאן המקום להבהיר לכל אחד משני הצדדים את הטיעון הבא: "אם נראה לכם שהפשרה סבירה מבחינתכם, אין לכם מה להפסיד מלהודיע זאת למתווך – כי הרי הצד האחר לא יֵדע על כך אלא במקרה שיש הסכם. אם אין הסכם, דבר לא השתנה: שניכם נשארתם בעמדות המוצא שלכם".

מה שחשוב כאן הוא לבנות את ה"משחק" עם מבנה המידע המתאים ועם התמריצים הנכונים. חשוב גם שתהיה ידיעה משותפת (זהו תפקידה של הפגישה הפומבית), כך שכל צד יֵדע את הכללים ויֵדע שהצד האחר יודע את הכללים, וכן הלאה.

האם מדובר כאן רק בתאוריה – ב"סיפור יפה" אך לא מציאותי? מתברר שלא. בדיוק במנגנון הזה השתמשתי לפני כשנה כשתיווכתי בין שני גופים שהיו בעימות קשה וממושך, והוא אכן הביא אותם להסכים לפשרה שהצעתי.

זוהי דוגמה פשוטה ל"הנדסת משחקים" או "תכנון מנגנונים" (mechanism design), תחום מתפתח וחשוב בכלכלה – שעליו ניתן פרס נובל בכלכלה לשנת 2007 – וכיום גם במדעי המחשב, במשפטים ובתחומים אחרים. דוגמה בולטת היא המכרזים למיניהם; דוגמה אחרת היא מציאת הקצאות "יציבות" של, למשל, סטאז'רים בבתי חולים (מנגנון הנמצא בשימוש בארצות הברית ובמדינות אחרות), תלמידים בבתי ספר או תרומות איברים.

תורת המשחקים כשפה וכדיסציפלינה

נחזור עתה לשאלה "מהי תורת המשחקים". ניתן להתייחס לתורת המשחקים כאל "שפה מדעית", המאפשרת לנתח בצורה מסודרת מצבים מרובי משתתפים בעלי השפעות הדדיות. זהו כלי שבעזרתו מנסחים, מנתחים ומביאים למכנה משותף. כאמור, "שפה" זו – תורת המשחקים – ישימה לתחומים רבים: כלכלה, מדעי המחשב, פסיכולוגיה, ביולוגיה, משפטים, מדע המדינה, פילוסופיה ועוד.

אכן חשוב מאוד לנסח דברים בצורה מדויקת: כך מבינים מה קורה, באילו תנאים ובאילו מגבלות. בכך תורת המשחקים דומה למתמטיקה, המשמשת ככלי וכשפה בתחומים אחרים (כמו פיזיקה, ביולוגיה וכלכלה).

אולם תורת המשחקים איננה רק מתמטיקה. השאלות הנידונות בה מקורן בתחומים רבים ומגוונים, והפתרונות שהיא מציעה ישימים בהם. לחוקר בתורת המשחקים חשוב לא לאבד את ההיבט השימושי, לא להיסחף אחרי דברים מופשטים מדי, אלא תמיד לחזור לשאלות בעלות עניין ומשמעות – תאורטית ומעשית.

תורת המשחקים היא דיסציפלינה, תרתי משמע: מצד אחד היא "תחום דעת", ומצד שני היא מכתיבה "משמעת" במחקר: במקום שנמציא מודל חדש ומיוחד לכל תופעה ותופעה, יש לנו מסגרת כללית לתחומים רבים, שבה תובנות דומות ממקורות שונים משתלבות, מַפרות ומחזקות זו את זו – כי הרי כולן מנוסחות באותה השפה ובעזרת אותם המושגים.

סיכום

תורת המשחקים היא "מדע טהור שימושי": היא תאוריה מתמטית מופשטת עם שורשים ושימושים בתחומים רבים ומגוונים. בכך יופייה וחשיבותה.

מקורות

[1] John von Neumann and Oskar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press (1944).

[2] Robert J. Aumann and Sergiu Hart, *Handbook of Game Theory*, Vol. 1 (1992), Vol. 2 (1994), Vol. 3 (2002), Elsevier Science Publishers / North Holland.

[3] John Nash, Jr., "Equilibrium Points in N-person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36 (1950), 48–49.

[4] Robert J. Aumann, "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies", *Journal of Mathematical Economics* 1 (1974), 67–96.

[5] Nick B. Davies, "Territorial Defense in the Speckled Wood Butterfly Pararge aegeria: The Resident Always Wins", *Animal Behaviour* 26 (1978), 138–147.

[6] Avi Shmida and Bezalel Peleg, "Strict and Symmetric Correlated Equilibria Are the Distributions of the ESS's of Biological Conflicts with Asymmetric Roles", in *Understanding Strategic Interaction*, edited by Wulf Albers, Werner Güth, Peter Hammerstein, Benny Moldovanu and Eric van Damme, Springer-Verlag (1997), 149–170.

[7] Robert J. Aumann, "Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality", *Econometrica* 55 (1987), 1–18.

[8] Sergiu Hart and David Schmeidler, "Existence of Correlated Equilibria", *Mathematics of Operations Research* 14 (1989), 18–25.

[9] Sergiu Hart and Andreu Mas-Colell, "A Simple Adaptive Procedure Leading to Correlated Equilibrium", *Econometrica* 68 (2000), 1127–1150.

[10] Sergiu Hart, "Adaptive Heuristics", *Econometrica* 73 (2005), 1401–1430.

[11] Ido Erev and Alvin E. Roth, "Predicting How People Play Games: Reinforcement Learning in Experimental Games with Unique, Mixed Strategy Equilibria", *American Economic Review* 88 (1998), 848–881.

[12] Giorgio Coricelli, Raymond J. Dolan and Angela Sirigu, "Brain, Emotion and Decision Making: The Paradigmatic Example of Regret", *Trends in Cognitive Sciences* 11 (2007), 258–265.

[13] Michael Maskery and Vikram Krishnamurthy, "Decentralized Adaptation in Sensor Networks: Analysis and Application of Regret-Based Algorithms", *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* 2007 (forthcoming).

[14] Christos H. Papadimitriou, "Computing Correlated Equilibria in Multi-Player Games", *Proceedings of the 37th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)* 2005, 49–56.