Un théorème de décomposition, relatif à une classe de systèmes dynamiques isolés

PATRICK IGLESIAS *

Centre de Physique Théorique
Marseille France

Résumé. *Nous montrons que l'espace des mouvements* $\mathcal{U}$ *des systèmes dynamiques massifs isolés dont l'orbite principale de SO (3) est de type* S^2 *est symplectomorphe à la variété:* $S^2 \times [\mathcal{U}/SO(3)]$.

0. INTRODUCTION

Les axiomes de la mécanique [2] définissent les systèmes dynamiques isolés comme des triplets constitués par une variété: l'espace des mouvements du système, une action du groupe de Galilée et une structure symplectique invariante. Lorsqu' un système est massif, le théorème de décomposition barrycentrique permet de considérer, de façon équivalente, le quadruplet constitué par une variété: l'espace des mouvements internes du système, une action de $SO(3)$: groupe des rotations de l'espace, une structure symplectique invariante par $SO(3)$ et un Hamiltonien representant l'action du temps. Nous nous intéressons dans cet article à la structure en types d'orbites de ces variétés des mouvements internes telle qu'elle est imposée par l'existence de la structure symplectique invariante. Nous montrons que les orbites principales ne peuvent être que du type $SO(3)\mathbb{Z}_m$ ou du type S^2. Nous montrons que les seuls systèmes dynamiques isolés et massifs pour lesquels l'orbite principale est de type S^2 sont décrits par un espace des mouvements internes qui est le produit symplectique de S^2 muni de sa structure canonique de particule de spin s, et d'une variété symplectique

* Centre de Physique Théorique C.N.R. - Luminy - Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France

(M, ϵ) pouvant s'interpréter comme une structure dynamique aditionnelle découplée de la nature spatiale du système.

I. SOUS GROUPLES DE SO(3) RAPPELS ET NOTATIONS

Nous rappelons que les groupes discrets de $SO(3)$ sont [1]:

a) les groupes cycliques à m éléments: $\mathbb{Z}_m$, $m \in \mathbb{N}$.

b) les groupes dihedraux à $2m$ éléments: $D_{2m} = \mathbb{Z}_m \times) \mathbb{Z}_2$

c) les groupes polyhedraux: T le groupe du tetrahedre, O le groupe de l'octrahedre, I le groupe de l'icosahedre.

Les sous groupes à une dimension qui sont naturellement: $SO(2)$ et son normalisateur $N[SO(2)] = SO(2) \times) \mathbb{Z}_2$. Le seul groupe de dimension 3 étant $SO(3)$ lui même. Si nous considérons l'action de $SO(3)$ sur R^3 nous spécifierons pour chaque sous groupe $SO(2)$ le vecteur de rotation, par exemple $SO(2, U)$ est le groupe des rotations autor du vecteur $U (U \neq 0)$.

II. ORBITES PRINCIPALES DE SO(3) DANS L'ESPACE DES MOUVEMENTS INTERNES D'UN SYSTEME DYNAMIQUE MASSIF ISOLE

Soit $\mathcal{U}$ l'espace des pouvements internes d'un système dynamique massif isolé, soit $[x \mapsto \sigma]$ son champ de formes symplectiques et $[a \mapsto a_{\mathcal{U}}]$, $a \in \mathrm{SO}(3)$, l'action dinamique de $SO(3)$ sur $\mathcal{U}$ que nous supposerons toujours effective.

$$\forall a \in SO(3) \qquad a_{\mathcal{U}}{}^*(\sigma) = \sigma.$$

Grace à la nature particulière de $SO(3)$, son action sur $(\mathcal{U}, \sigma)$ possède un moment [2] équivariant unique $\mathcal{L}$. En identifiant $so(3)$, $so(3)^*$ et $\mathbb{R}^3$ on a:

$$\mathcal{L} : x \mapsto L\,, \quad \mathcal{L} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$$

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma(\Omega \ \ (x)) = -\bar{\Omega}\, \mathrm{d}L\,, & \forall\, \Omega \in \mathbb{R}^3 \sim so(3) \quad \forall x \in \mathcal{U} \\ \mathcal{L}[a_{\mathcal{U}}(x)] = a \cdot \mathcal{L}(x)\,, & \forall\, a \in SO(3) \qquad \forall x \in \mathcal{U} \end{cases}$$

on note $\bar{\Omega} L$ le produit scalaire dans R^3.

On a le résultat suivant, concernant la nature du type des orbites principales de $SO(3)$ dans $\mathcal{U}$:

PROPOSITION 1. *Si $SO(3)$ agit effectivement sur $\mathcal{U}$, les seuls stabilisateurs principaux de l'action de $SO(3)$ sur $\mathcal{U}$ ne peuvent être que du type:*

$$SO(2) \quad ou \quad \mathbb{Z}_m.$$

Preuve. Puisque $\mathcal{L} \circ a \ \ = a \cdot \mathcal{L}$, on a nécessairement:

$$\text{Stab}\,(x) \subset \text{Stab}\,(\mathcal{L}(x)).$$

Supposons alors que Stab (x) soit du type Polyhedral, dihedral, du type $N[SO(2)]$ ou $SO(3)$. Alors, puisque les seuls stabilisateurs de l'action de $SO(3)$ sur $\mathbb{R}^3$ sont du type $SO(3)$ pour $\Omega = 0$ et du type $SO(2)$ pour $\Omega \neq 0$, Stab $(\mathcal{L}(x))$ ne peut être que $SO(3)$. Donc $\mathcal{L}$ s'annule sur $\mathcal{U}^*$, réunion des orbites principales. Or $\mathcal{U}^*$ est dense dans $\mathcal{U}$, par raison de continuité, $\mathcal{L}$ s'annule partout. Le formule (1) nous indique alors que $\Omega\ \ (x) = 0$ $\forall x\, \mathcal{U}$ et $\forall \Omega \in \mathbb{R}^3 \sim so(3)$, ce qui est impossible puisque $SO(3)$ agit effectivement. ■

III. THEOREME DE DECOMPOSITION $\mathcal{U}$ DANS LE CAS $S^tP(\mathcal{U}) = SO(2)$

Nous nous plaçons, dans la suite de l'article, dans l'hypothèse où les stabilisateurs principaux sont de type $SO(2)$, c'est à dire dans l'hypothèse où les orbites principales sont de type S^2. Nous allons montrer que la variété $\mathcal{U}$ est nécessairement difféomorphe au produit direct $S^2 \times M$ avec $M = \mathcal{U}/SO(3)$.

Pour cela nous donnons d'abort quelques définitions et quelques résultats partiels:

DEFINITIONS. a) *Nous définissons l'ensemble* $\mathcal{U}_{\#}$ *comme l'ensemble des points pour lesquels* $\mathcal{L}$ *ne s'annule pas et* $\mathcal{U}^*_{\#}$, *l'intersection de* $\mathcal{U}_{\#}$ *avec* $\mathcal{U}^*$ *: réunion des orbites principales:*

$$\mathcal{U}^*_{\#} = \{x \in \mathcal{U} \mid \mathcal{L}(x) \neq 0 \ \text{ et } \ \text{Stab}\,(x) \sim SO(2)\}.$$

b) *Nous définissons l'application* $\mathcal{L}^2 \in C^\infty(\mathcal{U}, R^+)$, *invariant sous l'action de* $SO(3)$:

$$\mathcal{L}^2 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \| L \|^2, \quad L = \mathcal{L}(x)$$

c) *Nous définissons Crit (* $\mathcal{L}^2$*) l'ensemble des points critiques de* $\mathcal{L}^2$:

$$\text{Crit}\,(\mathcal{L}^2) = \left\{ x \in \mathcal{U} \mid \frac{\partial \| L \|^2}{\partial x} = 0 \right\}.$$

d) *Nous définissons le champ de vecteur* $\mathcal{L}$ *sur* $\mathcal{U}$ *par l'action infinitesimale de* $L = \mathcal{L}(x)$:

$$\hat{\mathcal{L}}(x) = L_{\mathcal{U}}(x)$$

et Zero ($\hat{\mathcal{L}}$*) l'ensemble des points de* $\mathcal{U}$ *qui annulent* $\hat{\mathcal{L}}$.

$$\text{Zero}\,(\hat{\mathcal{L}}) = \{ x \in \mathcal{U} \mid \hat{\mathcal{L}}(x) = 0\}.$$

PROPOSITION 2. $\forall x \in \mathcal{U}^*_\#$: Stab $(x) = SO(2, L)$, $L = \mathcal{L}(x)$.

Preuve. La démonstration est une conséquence immédiate de: Stab $(x) \subset$ Stab (L), Stab $(x) \sim SO(2)$ et Stab $(L) = SO(2, L)$. ∎

PROPOSITION 3. Crit $(\mathcal{L}^2)$ = Zero $(\hat{\mathcal{L}})$.

Preuve. La démonstration est une application immediate da la formule (1):

$$\sigma(L_{\mathcal{U}}(x))(\delta x) = -\bar{L}\ \frac{\partial L}{\partial x}\ (\delta x) = -\ \frac{1}{2}\ \frac{\partial \| L \|^2}{\partial x}\ (\delta x)$$

et de la régularité de σ: ker $(\sigma) = \{0\}$. ∎

PROPOSITION 4. *Le moment $\mathcal{L}$ ne s'annule jamais, son module est constant et toutes les orbites son principales.*

Preuve. On montre d'abord que $\| L \|$ = Cste : en effet, grace à la proposition (2) on déduit: $\forall x \in \mathcal{U}^*_\#$, $\hat{\mathcal{L}}(x) = 0$, et par raison de continuité: $\forall x \in \mathcal{U}$, $\hat{\mathcal{L}}(x) = 0$, c'est à dire: Zero $(\mathcal{L}) = \mathcal{U}$. Grace à la proposition (3) on a: Crit $(\mathcal{L}^2) = \mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{U}$ est connexe (hypothèse de mécanique [2]) cette denrnière proposition implique que $\mathcal{L}^2$ = Cste, c'est à dire le module de $\mathcal{L}(x)$ est une constante s. Cette constante ne peut être nulle grace au caractère effectif de l'action de $SO(3)$, donc $\mathcal{L}$ ne s'annule jamais. D'autre part, grace au théorème des orbites principales ([1], IV.3) $SO(3)$ est conjugué à un sous groupe de tous le stabilisateurs non principaux qui ne peuvent être donc que du type $SO(2)$ x) $\mathbb{Z}_2$ ou $SO(3)$. Or ceci est impossible puisque $\mathcal{L}$ s'annulerait sur les orbites non principales ce qui n'est pas le cas, donc il n'existe pas d'autres orbites que les orbites principales. ∎

PROPOSITION 5. *Soit $M = \mathcal{U}/SO(3)$, alors M est une variété différentielle et il existe une section différentiable globale $\mathcal{S}$ de $\mathcal{U}$ au dessus de M.*

Preuve. Posons ℓ l'application définie sur $\mathcal{U}$ à valeur dans S^2 par: $\ell(x) = (1/s)\, \mathcal{L}(x)$, $s = \| L \|$. Et possons $M_{\mathcal{U}} = \ell^{-1}(U)$, où U est in point quelconque de la sphère S^2.

Alors:

a) $M_{\mathcal{U}}$ coupe chaque orbite en un point et un seul, en effet supposons le contraire, soient q et $a_{\mathcal{U}}(q)$ deux points tels que $\ell(q) = \ell(a_{\mathcal{U}}(q))$ alors $a \cdot \ell(q) = \ell(q)$ c'est à dire $a \cdot U = U$ et donc $a \in SO(2, U)$, mais Stab $(q) = SO(2, U)$

donc $a_{\mathscr{U}}(q) = q$.

Ainsi $M_{\mathscr{U}}$ peut être identifiée naturellement à $M = \mathscr{U}/SO(3)$. Il nous suffit de montrer que $M_{\mathscr{U}}$ est une sous variété plongée dans $\mathscr{U}$, ce qui se fait grace au théorème du rang constant.

b) $$\ker\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \left\{\delta x \in T_x(\mathscr{U}) \mid \bar{\Omega}\ \frac{\partial L}{\partial x}\ (\delta x) = 0 \ \ \forall \Omega \in \mathbb{R}^3\right\}$$

or $\sigma(\Omega\ (x))(\delta x) = -\bar{\Omega}\ \dfrac{\partial L}{\partial x}\ (\delta x)$ et puisque $\{\Omega_{\mathscr{U}}(x) \mid \Omega \in \mathbb{R}^3\}$ est l'espace tangent en x à l'orbite de $SO(3)$, que nous noterons ϑ_x on a:

$$\ker\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \text{orth}\ [T_x(\vartheta_x)].$$

Mais $T_x(\vartheta_x) \cap \text{orth}\ [T_x(\vartheta_x)] = \{0\}$, en effet si $\delta x = \Lambda_{\mathscr{U}}(x)$ appartient à orth $[T_x(\vartheta_x)]$ alors $\bar{\Omega}\ \dfrac{\partial L}{\partial x}\ (\Lambda_{\mathscr{U}}(x)) = 0\ \forall \Omega \in \mathbb{R}^3$. C'est à dire puisque $\dfrac{\partial L}{\partial x}\ (\Lambda_{\mathscr{U}}(x)) = L \times \Lambda : \Lambda = \lambda L$, et donc $\delta x = \lambda L_{\mathscr{U}}(x) = \lambda \hat{\mathscr{L}}(x) = 0$ (proposition 4). Donc on a:

$$T_x(\mathscr{U}) = T_x(\vartheta_x) \oplus \text{orth}\ [T_x(\vartheta_x)]$$

c'est à dire:

$$T_x(\mathscr{U}) = T_x(\vartheta_x) \oplus \ker\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)$$

donc le noyau de $\dfrac{\partial L}{\partial x}$ est de dimension constante égal à $2(n-1)$ si $\dim(\mathscr{U}) = 2n$, c'est à dire $\dfrac{\partial L}{\partial x}$ est de rang constant. Ainsi M possède une structure de variété différentiable pour laquelle la projectation naturelle de $\mathscr{U}$ sur M est une submersion, et $M_{\mathscr{U}}$ est une section globale de $\mathscr{U}$ au dessues de $M_{\mathscr{U}}$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant:

THEOREME. *Soit $\mathscr{U}$ l'espace des mouvements internes d'un système dynamique massif isolé, sur lequel agit effectivement le groupe $SO(3)$ par symplectomorphismes. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

a) *le type d'orbite principal est S^2*

b) *$\mathscr{U}$ est difféomorphe au produit direct $S^2 \times M$, avec $M = \mathscr{U}/SO(3)$.*

L'action de $SO(3)$ sur $S^2 \times M$ étant donnée par:

$$\forall (x, q) \in S^2 \times M,\quad \forall a \in SO(3) : \underline{a}\,(x, q) = (a \cdot x, q).$$

Preuve. Soit π la projection canonique de $\mathcal{U}$ sur M, soit U un point de S^2 nous savons qu'il existe unes section différentiable $\mathcal{S}$ globale de au dessus de M (proposition 5) telle que:

$$\forall q \in M \qquad \mathcal{S}(q) = x \Longleftrightarrow \pi(x) = q \text{ et } \mathcal{L}(x) = sU, \ s = \| L \|$$

dèfinissons alors φ de $SO(3) \times M$ à $\mathcal{U}$ par:

$$\varphi(a, q) = \underline{a}_{\mathcal{U}}(\mathcal{S}(q))$$

alors φ est invariante par $SO(2, U) = \text{Stab}\ (\mathcal{S}(q))$ et, donc, définit une application $\tilde{\varphi}$ sur $S^2 \times M = [SO(3) \times M]/SO(2, U)$ par:

$$\begin{tikzcd} SO(3) \times M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{U} \\ S^2 \times M \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Il est immédiat de vérifier que $\tilde{\varphi}$ est bijective, son inverse est donné par:

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x) = (\ell(x), \pi(x)), \quad \ell(x) = \frac{1}{s}\, \mathcal{L}(x)$$

$\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\varphi}^{-1}$ étant naturellement différentiables $\tilde{\varphi}$ est un difféomorphisme. De plus il est immédiat de vérifier que l'action de $SO(3)$ sur $S^2 \times M$ est l'action naturelle $\underline{a}(x, q) = (a \cdot x, q)$. ■

IV. STRUCTURE SYMPLECTIQUE SUR $\mathcal{U}$ DANS LE CAS $\mathrm{S^tP}(\mathcal{U}) = \mathrm{SO}(2)$

Pour connaitre la nature de la structure symplectique sur $\mathcal{U}$ il nous suffit, en vertu du théorème précédent, de la connaitre sur la variété $S^2 \times M$, où l'action de $SO(3)$ ne se fait que sur la composante S^2. Elle nous est donnée par le théorème:

THEOREME. *La sturcture symplectique la plus générale défininie sur $S^2 \times M$ invariante sous l'action suivant de $SO(3)$:*

$$\underline{a}(x, q) = (ax, q), (x, q) \in S^2 \times M$$

est connée par:

$$\sigma = s\Pi_1^*(\mathrm{Surf}) \oplus \Pi_2^*(\epsilon)$$

où s est réel, Surf *est la forme volume cannonique de S^2, ϵ est une structure symplectique définie sur M et π_1* (resp. π_2) *la projection* $(X, q) \mapsto X$ (resp. q). *Le moment est donnée par:*

$$L = sX.$$

Preuve. a) les applications équivariantes définies sur $S^2 \times M$ à valeur dans R^3 sont données par:

$$\mathcal{L}(x, q) = f(q) \cdot x.$$

Si $\mathcal{L}$ est le moment d'une structure symplectique invariante par $SO(3)$ nécessairement $\| L \| = \text{cste} = s$ (proposition 4) donc: $f(q) = s$ d'où:

$$L = sX.$$

b) Supposons que deux formes presymplectiques invariantes par $SO(3)$ aient même moment:

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}^3 \sim so(3) \qquad (\sigma_1 - \sigma_2)(\Omega \;\; (x)) = 0$$

donc $(\sigma_1 - \sigma_2)$ est invariante par $SO(3)$ et s'annule sur les vecteurs verticaux, σ_1 et σ_2 ne diffèrent donc que d'une 2-forme fermée ϵ de M:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \oplus \pi_2^*(\epsilon).$$

Donc nous pouvons choisir en particulier pour σ_1 la forme $s\pi_1^*(\text{Surf})$ qui vérifie bien les conditions nécessaires et on a:

$$\sigma = s\;\pi_1^*(\text{Surf}) \oplus \pi_2^*(\epsilon)$$

c) On vérifie immédiatement que $\ker(\sigma) = \{0\}$ si et seulement si $\ker(\epsilon) = \{0\}$.

Ceci achève la démonstration. ■

V. CONCLUSION

Le système dynamique décrit par le théorème de décomposition s'interprète naturellement comme une particule à spin munie d'une structure interne supplémentaire, décrite par (M, ϵ), complètement indépendante de l'influence de l'espace (-Temps), présent par l'intermédiaire de $SO(3)$. On peut penser par exemple à l'isospin.

Ce théorème montre aussi, qu'entre la nature symplectique du système, sa structure en types d'orbites est une information essentielle quant à la nature du système décrit.

Enfin, il permet de préciser un peu la classification des systemes dynamiques isolés en systèmes élémentaires et non élémentaires (construction de Kirilov-Kostant-Souriau). Les systèmes élémentaires sont définis comme des systèmes pour lesquels l'action de $SO(3)$ est transitive, les systèmes non élémentaires étant définis comme étant ceux pour lesquels cette action est non transitive. Le théorème de décomposition montre alors que ces derniers peuvent être encore divisés en deux classes, ceux pour lesquels l'orbite principale de $SO(3)$ est du type S^2, et les autres.

Il semble bien que l'étude de la compatibilité entre: la structure en types d'orbotes (de $SO(3)$) d'une variété $\mathcal{U}$ et l'existence sur cette variété d'une structure symplectique invariante (par $SO(3)$), soit de nature à permetre une classification satisfaisante des systèmes dynamiques non élémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.E. BRENDON, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, 1972.
[2] J.M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, DUNOD Université, 1970.

Manuscript received: January 31, 1983.

Paper presented by
A. Lichnerowicz and J.M. Souriau