

# TYPE COMBINATOIRE DES CORPS DE NOMBRES ALGÈBRIQUES RÉELS

Patrick Iglesias

## Introduction

Cet article a été motivé par la question suivante, posée par V.I Arnold. Considérons la matrice  $A$  de  $GL(3, \mathbf{Z})$  :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle a trois vecteurs propres distincts  $v_1, v_2, v_3$ . Un octant  $\mathcal{O}$  du trièdre formé des plans  $H_i$ , orthogonaux aux vecteurs  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), est invariant par la matrice  $A$ . Quel est le sous-groupe  $\mathcal{S}_A$  de  $GL(3, \mathbf{Z})$  qui fixe  $\mathcal{O}$  ? D'autre part, chaque élément de ce groupe préserve l'ensemble des points entiers de  $\mathcal{O}$ , en particulier les points extrémaux de leur enveloppe convexe, les orbites de ces points sous l'action de  $\mathcal{S}_A$  sont-elles en nombre fini ?

En ce qui concerne la première question, il est possible d'y répondre immédiatement. C'est une conséquence de résultats obtenus dans [IL90] sur les stabilisateurs, dans  $GL(n, \mathbf{Z})$ , des hyperplans irrationnels de  $\mathbf{R}^n$ . Dans le cas qui nous occupe  $\mathcal{S}_A$  est isomorphe, à un sous-groupe d'indice fini près, à  $\mathbf{Z}^2$ . Autrement dit, il existe une autre matrice  $B$  de  $GL(3, \mathbf{Z})$ , indépendante de  $A$ , qui préserve  $\mathcal{O}$ . On peut généraliser cette question aux matrices symétriques  $n \times n$ , à coefficients entiers, dont le polynôme caractéristique est irréductible sur  $\mathbf{Z}$ , et le corps des racines totalement réel. À un sous-groupe d'indice fini près, le groupe recherché sera isomorphe à  $\mathbf{Z}^{n-1}$ .

Pour répondre à la deuxième question, sur la finitude du nombre d'orbites, il est préférable de considérer immédiatement le cadre algébrique général dans lequel elle se situe. Considérons un corps  $\mathbf{K}$  de nombres algébriques, totalement réel, de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$ . Soit  $\sigma_i$  ses différents plongements dans  $\mathbf{R}$ . Introduisons la relation d'ordre suivante sur  $\mathbf{K}$  :  $x \preceq y$  si et seulement si  $\sigma_i(x) \leq \sigma_i(y)$ , pour tout  $i = 1 \dots n$ . Soit  $\mathbf{K}_+^*$  le cône strictement positif de  $\mathbf{K}$ , défini par  $\sigma_i(x) > 0$ ,  $\mathcal{D}$  un ordre de  $\mathbf{K}$  et  $\mathcal{D}_+^* = \mathcal{D} \cap \mathbf{K}_+^*$  sa partie strictement positive. Soit  $\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  l'ensemble des *éléments minimaux* de  $\mathcal{D}_+^*$ , que nous appelons aussi éléments minimaux de  $\mathcal{D}$ . Le groupe  $\mathbf{U}_+$ , des unités positives de  $\mathcal{D}$  agit sur  $\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ , et de plus :

**THÉORÈME.**— *Le nombre de classes des éléments minimaux de tout ordre  $\mathcal{D}$ , sous l'action de ses unités positives, est fini.*

En généralisant aux  $k$ -simplexes de sommets dans  $\mathcal{D}$  la propriété de minimalité définie plus haut, on construit un complexe simplicial abstrait  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  dont les sommets sont les éléments minimaux de  $\mathcal{D}$ . Le groupe  $\mathbf{U}_+$  agit encore sur  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  et le théorème précédent sur la finitude du nombre de classes des éléments minimaux est un cas particulier du suivant :

**THÉORÈME.**— *Le complexe simplicial  $\Sigma(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  quotient de  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  par  $\mathbf{U}_+$  est compact. Nous l'appelons type combinatoire de  $\mathcal{D}$ .*

On peut associer aussi à l'ordre  $\mathcal{D}$  un avatar du complexe simplicial  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ , l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}_+^*$ , et en particulier sa frontière  $\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ . C'est un sous-complexe polyédral de  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  sur lequel agit encore  $\mathbf{U}_+$ . Nous montrons que :

**THÉORÈME.**— *Le quotient de la frontière de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}_+^*$  par le groupe des unités positives de  $\mathcal{D}$  est un tore  $T^{n-1}$  muni naturellement d'une décomposition polyédrale. Nous l'appelons le tore simplicial de  $\mathcal{D}$ .*

Ce théorème répond à la question initiale sur la finitude du nombre de classes des points extrémaux de l'enveloppe convexe des points de  $\mathcal{D}_+^*$ .

Nous traitons ensuite l'exemple le plus simple : celui des corps quadratiques  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ . Nous définissons formellement, dans ce cas, le type combinatoire d'un ordre de conducteur  $f$ . C'est un graphe  $\Gamma_f(d)$ , topologiquement équivalent au cercle et caractérisé par une suite d'entiers positifs  $[b_1, \dots, b_g]$ , où  $g$  est le nombre de sommets géométriques et les  $b_i - 1$  sont les nombres de sommets plats entre deux sommets géométriques consécutifs. Cette construction est évidemment étroitement liée à la décomposition en fraction continue, mais nous avons évité d'utiliser les méthodes de cette théorie afin d'imaginer plus facilement les généralisations éventuelles en degré supérieur.

Dans un autre article [Igl94] nous étudions la répartition, dans l'ensemble des corps quadratiques, de la classe particulière des *corps quadratiques plats*, caractérisés par un graphe dont tous les sommets sont plats, hormis ceux des unités.

L'exemple des corps quadratiques suggère que le prototype combinatoire ou le tore simplicial, ou un enrichissement de ces structures, est aux nombres algébriques ce que la périodicité de la fraction continue est aux nombres quadratiques. C'est un peu ce qui guide ce travail.

Toutes ces questions ont été suscitées par des discussions avec V. I Arnold, je l'en remercie tout particulièrement.

Je suis heureux de remercier pour leur conseils, idées, suggestions et aussi pour leur patience Marc Perret et Nicolas Pouyanne. Pour avoir, en plus, lu diverses ébauches de cet article et en avoir corrigé maladresses ou erreurs, je remercie Frédéric Bosio, certaines idées sont d'ailleurs de lui. Je remercie aussi Elena Korkina avec qui je partage la curiosité pour ces questions.

## 1 Corps réels, relation d'ordre et éléments positifs

Soit  $\mathbf{K}$  un corps de nombres algébrique totalement réel de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$ , et  $\sigma_i$  ses différents plongements dans  $\mathbf{R}$ .

1.1 DÉFINITION. — Nous dirons qu'un élément  $z$  de  $\mathbf{K}$  est *antérieur* à  $z'$ , ou que  $z'$  est *postérieur* à  $z$  si pour tout  $i = 1 \dots n$  :  $\sigma_i(z) \leq \sigma_i(z')$ , nous noterons :

$$z \preceq z' \quad (\text{ou } z' \succeq z) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_i(z) \leq \sigma_i(z'), \quad i = 1 \dots n. \quad (1)$$

Nous dirons qu'il est *strictement antérieur*, et nous noterons  $z \prec z'$ , si  $\sigma_i(z) \preceq \sigma_i(z')$  et  $z \neq z'$ .

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la propriété de multiplicativité des plongements :  $\sigma_i(z z') = \sigma_i(z) \sigma_i(z')$ .

1.2 PROPOSITION. — *La relation  $\preceq$  définie sur  $\mathbf{K}$  est une relation d'ordre partielle, compatible avec la multiplication et l'inversion.*

Autrement dit, si  $0 \preceq z_1 \preceq z'_1$  et  $0 \preceq z_2 \preceq z'_2$  alors  $z_1 z_2 \preceq z'_1 z'_2$ , et si  $0 \prec z \preceq z'$  alors  $1/z' \preceq 1/z$ .

1.3 DÉFINITION. — Nous appellerons *cône positif* d'un élément  $z$  de  $\mathbf{K}$  l'ensemble des éléments postérieurs à  $z$ , nous noterons :

$$\mathcal{C}_+(z) = \{z' \in \mathbf{K} \mid z \preceq z'\}. \quad (2)$$

Nous dirons que  $z' \in \mathbf{K}$  est dans le cône de  $z$  si  $z' \in \mathcal{C}(z)$ .

1.4 DÉFINITION. — Nous appellerons *cône positif*, le cône de zéro, nous le noterons  $\mathbf{K}_+$  :

$$\mathbf{K}_+ = \{z \in \mathbf{K} \mid \forall i, i = 1 \dots n, \sigma_i(z) \geq 0\} \quad (3)$$

Rappelons qu'un ordre  $\mathcal{D}$  d'un corps de nombre algébrique est un  $\mathbf{Z}$ -module complet qui est en même temps un sous-anneau, et que son groupe des unités  $\mathbf{U}$  est, dans le cas totalement réel, isomorphe à  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^{n-1}$  (Théorème de Dirichlet [BC67]). Nous noterons  $\mathcal{D}_+$  la partie positive de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}_+^\times$  sa partie strictement positive :

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D} \cap \mathbf{K}_+, \quad \mathcal{D}_+^\times = \mathcal{D} \cap \mathbf{K}_+ - \{0\}. \quad (4)$$

Nous noterons  $\mathbf{U}_+$  la partie positive de  $\mathbf{U}$ , ses éléments seront appelés *unités positives* :

$$\mathbf{U}_+ = \mathbf{U} \cap \mathbf{K}_+. \quad (5)$$

1.5 PROPOSITION. — *Les unités positives  $\mathbf{U}_+$  de  $\mathcal{D}$  constituent un sous-groupe d'indice fini, au plus égal à  $2^n$  et au moins égal à 2, de son groupe des unités  $\mathbf{U}$  :*

$$2 \leq [\mathbf{U} : \mathbf{U}_+] \leq 2^n. \quad (6)$$

DÉMONSTRATION. — Le fait que  $\mathbf{U}_+$  soit un sous-groupe de  $\mathbf{U}$  découle de la proposition 1.2. Soit  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$  un système d'unités fondamentales des unités de  $\mathcal{D}$ . Toute unité se met sous la forme  $\varepsilon = \pm \varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_{n-1}^{a_{n-1}}$  (théorème de Dirichlet [BC67]). On peut choisir les unités fondamentales de telle sorte que le nombre d'unités totalement positives soit maximum. Soit  $0 \leq k \leq n-1$  le nombre d'unités fondamentales non-positives du système générateur, on peut supposer que ce sont les  $k$  premières. Si  $k \neq 0$ , les unités  $\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_k^2$  sont positives, le groupe  $A$  engendré par  $\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_k^2, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_{n-1}$  vérifie  $A \subset \mathbf{U}_+ \subset \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}_+$  est donc d'indice fini. La pire situation est  $k = n-1$  à quoi s'ajoute l'inversion de signe. L'indice maximum de  $\mathbf{U}_+$  est donc  $2^n$  et l'indice minimum est 2 puisqu'on peut toujours changer de signe des unités fondamentales de  $\mathbf{U}$ . ■

1.6 REMARQUE. — Pour le corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$  et l'ordre des entiers, l'unité fondamentale  $1 + \sqrt{2}$  n'est pas positive, mais son carré  $3 + 2\sqrt{2}$  engendre le groupe des unités positives, dans ce cas  $\mathbf{U}_+$  est d'indice maximum : 4. En revanche  $5 + 2\sqrt{6}$  est une unité fondamentale de  $\mathbf{Q}(\sqrt{6})$  et elle est positive, dans ce cas  $\mathbf{U}_+$  est d'indice minimum : 2. Nous aurons l'occasion de retrouver ces corps plus loin. ►

La proposition suivante est une conséquence immédiate de 1.2.

1.7 PROPOSITION. — *Le groupe des unités positives agit par multiplication sur le cône positif en respectant la relation d'ordre.*

## 1.1 Éléments minimaux

1.8 DÉFINITION. — Nous noterons  $\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  l'ensemble des éléments minimaux, pour la relation d'ordre  $\preceq$ , de  $\mathcal{D}_+^\times$  :

$$\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D}) = \{z \in \mathcal{D}_+^\times \mid z' \preceq z \Rightarrow z = z'\}. \quad (7)$$

Nous dirons qu'un élément de  $\mathcal{D}$  est *minimal* s'il appartient à  $\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ .

1.9 PROPOSITION. — *Le groupe des unités positives agit librement sur l'ensemble des éléments minimaux.*

DÉMONSTRATION. — Soit  $\varepsilon \in \mathbf{U}_+$  et  $z$  minimal, supposons que  $\varepsilon z$  ne soit pas minimal et soit  $z'$  tel que  $z' \preceq \varepsilon z$ . Pour tout  $i = 1 \dots n$  on a :  $\sigma_i(z') \leq \sigma_i(\varepsilon)\sigma_i(z)$  d'où  $\sigma_i(z')/\sigma_i(\varepsilon) = \sigma_i(z'/\varepsilon) \leq \sigma_i(z)$  puisque  $\sigma_i(\varepsilon) > 0$ . Mais  $z$  est minimal donc  $z'/\varepsilon = z$  ce qui implique  $z' = \varepsilon z$ ,  $\varepsilon z$  est donc minimal. L'action est évidemment libre. ■

1.10 PROPOSITION. — *Les unités positives sont minimales.*

DÉMONSTRATION. — D'après la proposition 1.9, il suffit de démontrer que 1 est minimal. Supposons le contraire, il existe  $z \in \mathcal{D}$ ,  $z \neq 1$ , tel que pour tout  $i = 1 \dots n$  :  $\sigma_i(z) \leq 1$ . Cela implique en particulier qu'il existe un indice  $j$  tel que  $\sigma_j(z) < 1$ , car sinon  $z = 1$ . Soit  $N$  la norme sur le corps  $\mathbf{K}$ , rappelons que :

$$\forall z \in \mathbf{K} \quad N(z) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(z). \quad (8)$$

On déduit alors de ce qui précède que  $N(z) < 1$ . Mais la norme des éléments de tout ordre est entière donc  $N(z) = 0$  ce qui est impossible puisque le seul élément de norme nulle du cône positif est 0, donc 1 est minimal ainsi que toutes les unités positives. ■

1.11 REMARQUE. — Cette dernière proposition montre en particulier, s'il fallait le prouver, que l'ensemble des éléments minimaux n'est pas vide. ►

Soit  $\ell$ , la représentation logarithmique du corps  $\mathbf{K}$  :

$$\ell : \mathbf{K}_+^\times \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \ell(z) = (z_1, \dots, z_n) \quad z_i = \log \sigma_i(z). \quad (9)$$

Notons  $H_a \subset \mathbf{R}^n$  l'hyperplan *de hauteur a* défini par :

$$x \in H_a \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i = a. \quad (10)$$

L'image par  $\ell$  des éléments de  $\mathbf{K}$  de norme  $\nu$  est contenue dans l'hyperplan de hauteur  $\log \nu$ . En particulier les unités positives sont envoyées dans l'hyperplan de hauteur nulle  $H_0$ . La restriction de  $\ell$  au groupe des unités positives est un morphisme de groupe de  $\mathbf{U}_+$  dans  $H_0$ , soit  $\mathcal{L}$  son image :

$$\mathcal{L} = \ell(\mathbf{U}_+), \quad (11)$$

d'après le théorème de Dirichlet et la proposition 1.5,  $\mathcal{L}$  est un réseau du sous-espace vectoriel  $H_0$  de  $\mathbf{R}^n$ . Nous noterons  $R_{\mathcal{D}}$  son rayon, il est défini par :

$$R_{\mathcal{D}} = \inf\{r > 0 \mid \forall x \in H_0, \exists \varepsilon \in \mathbf{U}_+ : x \in B(\ell(\varepsilon), r)\}, \quad (12)$$

où  $B(\ell(\varepsilon), r)$  est la boule dans  $H_0$  de centre  $\ell(\varepsilon)$  et de rayon  $r$ .

1.12 DÉFINITION. — Nous dirons que  $R_{\mathcal{D}}$  est le *rayon de l'ordre  $\mathcal{D}$* .

Ce nombre est défini sans ambiguïté, il ne dépend du choix d'aucune base, il n'est fonction que de  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire de  $\mathbf{U}_+$  et donc de  $\mathcal{D}$ . C'est le demi-diamètre du tore quotient  $T_{\mathcal{D}} = H_0/\mathcal{L}$ , muni de la métrique ordinaire induite par  $H_0 \subset \mathbf{R}^n$ .

1.13 LEMME. — *Soit  $z$  un élément quelconque de  $\mathbf{K}_+$ , si :*

$$N(z) \geq \mu_{\mathcal{D}} = \exp\left(R_{\mathcal{D}}\sqrt{n(n-1)}\right), \quad (13)$$

*alors  $z$  est dans le cône d'une unité positive. Si de plus,  $z \in \mathcal{D}_+$  et :*

$$N(z) > \nu_{\mathcal{D}} = \lfloor \mu_{\mathcal{D}} \rfloor, \quad (14)$$

*alors  $z$  ne peut pas être minimal.*

DÉMONSTRATION. — Soit  $\varepsilon$  une unité positive, l'image par  $\ell$  de son cône positif  $\mathcal{C}_+(\varepsilon)$  est contenue dans le cône réel  $V_\varepsilon \subset \mathbf{R}^n$  (figures 1 et 2) défini par les inégalités :

$$x \in V_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_i \geq \varepsilon_i \quad (15)$$

La trace, sur l'hyperplan  $H_a$ , des cônes  $V_\varepsilon$ , quand  $\varepsilon$  parcourt le réseau des unités positives  $\mathbf{U}_+$ , est constitué de la famille des  $(n-1)$ -simplexes  $\Delta_a(\varepsilon)$ , centrés aux sommets du réseau translaté  $[a/n](1, 1, \dots, 1) + \mathcal{L}$  :

$$x \in \Delta_a(\varepsilon) = H_a \cap V_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_i = \varepsilon_i + a t_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n t_i = 1. \quad (16)$$

La figure 3 illustre cette construction pour  $n = 3$ . Tout point  $z \in \mathbf{K}$  dont l'image est contenue dans l'un quelconque de ces simplexes est dans le cône d'une certaine unité  $\varepsilon \in \mathbf{U}_+$ . Le volume de ces simplexes étant une fonction strictement croissante de la norme et le volume du réseau  $\mathcal{L}$  étant fini, on conclut qu'il existe une valeur minimum  $\alpha$  pour laquelle

$$\bigcup_{\varepsilon \in \mathbf{U}_+} \Delta_\alpha(\varepsilon) = H_\alpha. \quad (17)$$

Autrement dit, tout point de norme supérieure à  $\alpha$  est contenu dans le cône d'une unité positive  $\varepsilon$ . Nous pouvons encore majorer cette valeur en remplaçant les simplexes  $\Delta_a(\varepsilon)$  par les boules inscrites de rayon  $r_a$  :

$$r_a = a / \sqrt{n(n-1)}. \quad (18)$$

Il suffit donc que  $r_{\log \nu}$  soit supérieur au rayon  $R_{\mathcal{D}}$  du réseau  $\mathcal{L}$ , d'où le résultat. Enfin, si  $z \in \mathcal{D}_+$ , sa norme est entière, il suffit alors que  $N(z)$  soit supérieur à la partie entière  $\lfloor \mu_{\mathcal{D}} \rfloor$  de  $\mu_{\mathcal{D}}$  pour que  $N(z) \geq \mu_{\mathcal{D}}$ . ■

Bien que différent, le théorème suivant est à rapprocher des résultats de T. Shintani dans [Shi76].

1.14 THÉORÈME. — *Le quotient de l'ensemble des éléments minimaux de l'ordre  $\mathcal{D}$  par son groupe des unités positives  $\mathbf{U}_+$  est fini :*

$$\#\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D}) / \mathbf{U}_+ < \infty. \quad (19)$$



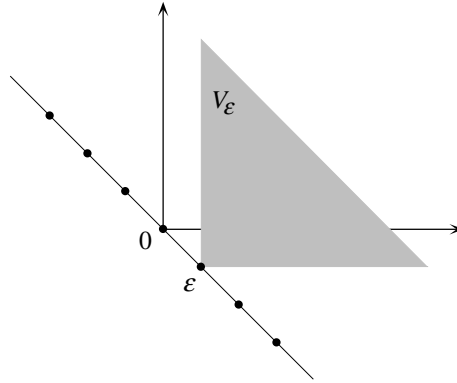


Figure 1: Le cône  $V_\varepsilon$  dans  $\mathbf{R}^2$ .

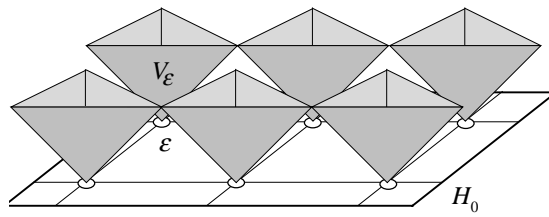


Figure 2: Le cône  $V_\varepsilon$  dans  $\mathbf{R}^3$ .

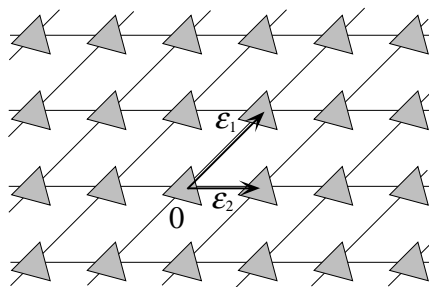


Figure 3: La trace des cônes  $V_\varepsilon$  sur l'hyperplan  $H_\rho$ .

DÉMONSTRATION. — Soit  $\mathcal{M}_\nu(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  l'ensemble des éléments minimaux de  $\mathcal{D}$  de norme  $\nu \in \mathbf{N}^*$  :

$$\mathcal{M}_\nu(\mathbf{K}, \mathcal{D}) = \{z \in \mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D}) \mid N(z) = \nu\}, \quad (20)$$

alors :

$$\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D}) = \bigcup_{\nu \in \mathbf{N}^*} \mathcal{M}_\nu(\mathbf{K}, \mathcal{D}). \quad (21)$$

L'action d'une unité positive  $\varepsilon$  sur un élément  $z$  de  $\mathbf{K}$  préservant sa norme :  $N(\varepsilon z) = N(z)$ , il vient évidemment :

$$\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D})/\mathbf{U}_+ = \bigcup_{\nu \in \mathbf{N}^*} \mathcal{M}_\nu(\mathbf{K}, \mathcal{D})/\mathbf{U}_+. \quad (22)$$

Il est connu d'autre part [BC67, II th. 5] que, pour tout ordre, le nombre d'éléments non associés par une unité, ayant pour norme un nombre donné, est fini. On en conclut en particulier que, pour tout  $\nu \in \mathbf{N}^*$ , l'ensemble  $\mathcal{M}_\nu(\mathbf{K}, \mathcal{D})/\mathbf{U}_+$  est ou bien vide ou fini.

Il suffit donc de vérifier l'ensemble des normes des éléments minimaux est fini, or le lemme 1.13 indique en particulier que pour tout  $\nu > \nu_{\mathcal{D}}$ ,  $\mathcal{M}_\nu(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  est vide, d'où le résultat. ■

1.15 REMARQUE. — Le lemme 1.13 nous permet donc de majorer le nombres des normes des éléments minimaux, il est inférieur ou égal à  $\nu_{\mathcal{D}}$  :

$$1 \leq \#\{N(z) \mid z \in \mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D})\} \leq \nu_{\mathcal{D}}. \quad (23)$$

Mais cette majoration est relativement grossière. Elle peut être nettement amélioré pour l'anneau des entiers des corps quadratiques, nous verrons plus loin qu'il suffit alors que  $N(z) > (2 + \text{tr } \varepsilon)/4$  pour que  $z$  ne soit pas minimal, alors que  $\nu_{\mathcal{O}} = \lfloor \varepsilon \rfloor$ . ►

## 1.2 Enveloppe simpliciale

Introduisons maintenant l'*enveloppe simpliciale* associée à l'ordre  $\mathcal{D}$ . Désignons par  $[z_0, \dots, z_k]$  le  $k$ -simplexe de sommets  $z_0, \dots, z_k$  dans  $\mathbf{K}$  :

$$[z_0, \dots, z_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i z_i \mid t_i \in \mathbf{Q}_+, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}. \quad (24)$$

1.16 DÉFINITION. — Nous appellerons *k-simplexe minimal* de  $\mathcal{D}$  tout  $k$ -simplexe  $[z_0, \dots, z_k]$  de  $\mathbf{K}$  vérifiant les conditions suivantes :

1. Les sommets  $\{z_0, \dots, z_k\}$  sont les seuls éléments de  $\mathcal{D}_+^\times$  contenus dans le simplexe  $[z_0, \dots, z_k]$  :

$$[z_0, \dots, z_k] \cap \mathcal{D}_+^\times = \{z_0, \dots, z_k\}. \quad (25)$$

2. Les seuls éléments  $z \in \mathcal{D}_+^\times$  dont le cône  $\mathcal{C}_+(z)$  intersecte le simplexe  $[z_0, \dots, z_k]$ , sont ses sommets  $z_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Dans chacun de ces cas, l'intersection est réduite à  $\{z_i\}$  :

$$\mathcal{C}_+(z) \cap [z_0, \dots, z_k] \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \exists i = 0, \dots, k : z = z_i, \\ \mathcal{C}_+(z) \cap [z_0, \dots, z_k] = \{z_i\}. \end{cases} \quad (26)$$

Nous noterons  $\mathcal{C}_k(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  l'ensemble des  $k$ -simplexes minimaux.

1.17 REMARQUE. — Les sommets  $z_i$  d'un  $k$ -simplexe minimal sont nécessairement des éléments minimaux de  $\mathcal{D}$ . En effet si  $z \preceq z_i$ , c'est-à-dire si  $z_i \in \mathcal{C}_+(z)$ , alors  $z_i \in [z_0, \dots, z_k] \cap \mathcal{C}_+(z)$  d'où  $z = z_i$ , et donc  $z_i$  est minimal. On a en particulier  $\mathcal{C}_0(\mathbf{K}, \mathcal{D}) = \mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ . ►

1.18 DÉFINITION. — Nous appellerons *enveloppe simpliciale* de l'ordre  $\mathcal{D}$  le complexe simplicial abstrait,

$$\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D}) = \{\mathcal{C}_k(\mathbf{K}, \mathcal{D}) \mid k = 0 \dots n\}. \quad (27)$$

Nous appellerons *enveloppe simpliciale du corps  $\mathbf{K}$* , l'enveloppe simpliciale de l'ordre maximum (l'anneau des entiers  $\mathcal{O}$  de  $\mathbf{K}$ ). Nous le noterons simplement  $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ .

1.19 THÉORÈME. — *L'enveloppe simpliciale  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  de l'ordre  $\mathcal{D}$  est un complexe simplicial localement fini.*

DÉMONSTRATION. — Par construction,  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  est un complexe simplicial, montrons qu'il est localement fini. Considérons le plongement linéaire de  $\mathbf{K}$  dans  $\mathbf{R}^n$  défini par :

$$\sigma : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \sigma(z) = (\sigma_1(z), \dots, \sigma_n(z)). \quad (28)$$

Les images par  $\sigma$  des éléments minimaux de  $\mathcal{D}$  sont contenus dans des hyperboles d'équations  $x_1 x_2 \dots x_n = a$  avec  $1 \leq a \leq \nu_{\mathcal{D}}$ . Autrement dit, l'image par  $\sigma$  de tout élément minimal  $z$  est contenu entre les deux hyperboles :

$$\begin{aligned} H_{\min} &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 x_2 \dots x_n = 1\} \\ H_{\max} &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 x_2 \dots x_n = \nu_{\mathcal{D}}\} \end{aligned} \quad (29)$$

De même, tout segment joignant  $z$  à  $z'$  dont l'image par  $\sigma$  coupe l'hyperbole  $H_{\max}$  contient des points dans le cône d'un élément minimal, l'image de tout simplexe minimal est donc elle aussi contenue entre les deux hyperboles  $H_{\min}$  et  $H_{\max}$ . Considérons alors l'enveloppe  $E_z$  des hyperplans issus de  $\sigma(z)$  et tangents à l'hyperbole  $H_{\max}$  et soit  $D_z$  la réunion du domaine compris entre le cône  $H_{\min}$  et  $E_z$ , d'une part, et entre  $E_z$  et  $H_{\max}$  d'autre part (voir figure 4), c'est un domaine compact de  $\mathbf{R}^n$ . Le bord de son intersection avec  $H_{\min}$  et  $H_{\max}$  sont les coniques d'équations  $\sum_i x_i/z_i = 1$  et  $\sum_i x_i/z_i = \nu_{\mathcal{D}}$

Tout point  $z'$  qui appartient au même simplexe minimal que  $z$  est nécessairement contenu dans ce domaine compact  $D_z$ . Comme l'image par  $\sigma$  de l'ordre  $\mathcal{D}$  est un réseau de  $\mathbf{R}^n$ , on conclut que le nombre des  $k$ -simplexes minimaux dont  $z$  est un sommet est fini. Autrement dit, le complexe simplicial  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  est localement fini. ■

1.20 PROPOSITION. — *Le groupe des unités positives  $\mathbf{U}_+$  agit sur les simplexes minimaux, c'est un groupe d'automorphismes de l'enveloppe simpliciale  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ .*

DÉMONSTRATION. — Le groupe  $\mathbf{U}_+$  agissant linéairement sur  $\mathbf{K}$  et préservant l'ordre  $\preceq$  (proposition 1.2), transforme tout simplexe en un autre simplexe et tout simplexe minimal en un autre simplexe minimal. Il agit donc comme un groupe d'automorphismes de  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ . ■

1.21 DÉFINITION. — Le quotient  $\Sigma(\mathbf{K}, \mathcal{D}) = \mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})/\mathbf{U}_+$  est un ensemble simplicial compact, il sera appelé *prototype combinatoire* de l'ordre  $\mathcal{D}$ . Dans le cas de l'anneau des entier  $\mathcal{O}$  de  $\mathbf{K}$ , nous l'appellerons prototype combinatoire du corps  $\mathbf{K}$ , et noterons  $\Sigma(\mathbf{K})$ .

Dans la suite de cet article nous étudions quelques propriétés de l'enveloppe simpliciale des ordres des corps quadratiques. Pour ces corps, nous le verrons, la construction de  $\mathcal{C}$  et  $\Sigma$  est relativement simple car elle se réduit à la construction de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}_+^\times$ . Mais il apparaîtra vite que la construction de l'enveloppe simpliciale du corps  $\mathbf{K}$  (et son prototype combinatoire) est insuffisante à notre étude. Nous serons conduits à l'enrichir par la distinction de ses sommets qui sont aussi des sommets de l'enveloppe convexe des points de  $\mathcal{D}_+^\times$ , mais nous pourrions aussi lui associer la fonction norme ou l'habiller d'autres structures. Si la notion de *type combinatoire* apparaîtra clairement, dans le cas des corps quadratiques, il faudra étudier davantage le cas des corps réels de degré supérieur (au moins  $n = 3$ ) pour décider du contenu exact que nous désirons lui attacher. C'est pour cela qu'une définition générale de *type combinatoire* semble ici prématurée, et c'est ce qui justifie l'emploi du mot *prototype*. L'étude des corps de nombres réels de degré supérieur sera sûrement plus difficile, ne serait-ce qu'en ce qui concerne la topologie de  $\mathcal{C}$  et  $\Sigma$ . Il n'est pas clair, par exemple, que la groupe  $\mathbf{U}_+$  agisse librement sur la réalisation géométrique  $|\mathcal{C}|(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  et définisse, par quotient, une variété topologique. C'est probablement une des premières questions à étudier au moins pour  $n = 3$ .

### 1.3 Le tore simplicial

Notons toutefois que dans l'ensemble des sommets de  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  c'est-à-dire des éléments minimaux de  $\mathcal{D}$ , certains sont distingués : les sommets de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}_+^\times$ , en particulier,

1.22 PROPOSITION. — *Les unités positives  $\mathbf{U}_+$  de  $\mathcal{D}$  sont des sommets de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}_+^\times$ .*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de montrer que 1 est un sommet de l'enveloppe convexe. Supposons le contraire, 1 est contenu dans un segment joignant deux

éléments minimaux  $z$  et  $z'$ . Mais l'image de ce segment par le plongement  $\sigma$  (ou plutôt son adhérence) est un segment réel dont une des extrémité doit nécessairement se trouver en dessous de l'hyperbole  $H_{\min}$ , par propriété de convexité. Or, il n'y a pas d'élément de  $\mathcal{D}$  en dessous de  $H_{\min}$ . ■

Pour les corps quadratiques, prototype combinatoire et (frontière de l') enveloppe convexe des points de  $\mathcal{D}_+^\times$  se confondent, comme nous le verrons plus loin. Ce n'est pas (toujours) le cas pour les corps de nombres algébriques réels de degré supérieur. On peut donc définir un sous-produit du prototype combinatoire  $\Sigma(K, \mathcal{D})$ , son *enveloppe convexe*.

1.23 DÉFINITION. — Nous appellerons *frontière* de l'ordre  $\mathcal{D}$ , la frontière de l'enveloppe convexe, dans  $\mathbf{R}^n$ , des images de  $\mathcal{D}_+^\times$  par le plongement canonique  $\sigma$ . Nous la noterons  $\mathcal{F}(K, \mathcal{D})$  :

$$\mathcal{F}(K, \mathcal{D}) = \text{Fr}(\sigma(\mathcal{D}_+^\times)). \quad (30)$$

1.24 PROPOSITION. — *La frontière  $\mathcal{F}(K, \mathcal{D})$  de  $\mathcal{D}$  est une variété affine par morceaux, homéomorphe à  $\mathbf{R}^{n-1}$ , munie naturellement d'une décomposition polyédrale. Le groupe des unités positives  $\mathbf{U}_+$  agit librement, proprement discontinument sur  $\mathcal{F}(K, \mathcal{D})$ . Le quotient*

$$\mathcal{T}(K, \mathcal{D}) = \mathcal{F}(K, \mathcal{D})/\mathbf{U}_+ \quad (31)$$

*est un tore  $T^{n-1}$  muni naturellement d'une décomposition polyédrale, affine par morceaux. Nous l'appellerons le tore simplicial associé à l'ordre  $\mathcal{D}$ .*

DÉMONSTRATION. — La première partie est évidente, l'image de  $\mathcal{D}$  par  $\sigma$  est un réseau de  $\mathbf{R}^n$  dont on prend l'enveloppe convexe des points situés dans le cône positif de  $\mathbf{R}^n$ . Le groupe des unités agit sur l'image de  $K$  par  $\sigma$  mais cette action se prolonge linéairement en une action sur  $\mathbf{R}^n$ . La matrice d'une unité  $\varepsilon$  de  $\mathcal{D}$  étant diagonale dans la base canonique, de coefficients  $\varepsilon_i = \sigma(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  agit sans point fixe ( $\varepsilon \neq 1$ ). L'action du groupe  $\mathbf{U}_+$  est donc libre et proprement discontinue. Par linéarité  $\mathbf{U}_+$  respecte l'enveloppe convexe, et par conséquent respecte  $\mathcal{F}(K, \mathcal{D})$ . Il suffit de vérifier encore que le quotient

$\mathcal{F}(K, \mathcal{D})/\mathbf{U}_+$  est homéomorphe au tore  $T^{n-1}$ . Pour cela projetons les points de  $\mathcal{F}(K, \mathcal{D})$  sur l'hyperbole normique  $H_1$  le long des rayons par :

$$\mathcal{F}(K, \mathcal{D}) \ni x \mapsto \frac{x}{\sqrt[n]{N(x)}}, \quad (32)$$

où la fonction norme a été prolongée par continuité  $N(x) = \prod_i x_i$ . Cette projection est un homéomorphisme, par transport de structure la nappe  $H_1$  se retrouve munie d'une décomposition polyédrale (les images des faces de  $\mathcal{F}(K, \mathcal{D})$ ). L'action du groupe des unités  $\mathbf{U}_+$  est équivariante puisque  $N(\varepsilon) = 1$  pour toute unité positive  $\varepsilon$ , donc  $\mathcal{F}(K, \mathcal{D})/\mathbf{U}_+ \simeq H_1/\mathbf{U}_+$ . Mais,  $H_1/\mathbf{U}_+ \simeq T^{n-1}$ , il suffit de passer en représentation logarithmique pour se ramener à l'action ordinaire de  $\mathbf{Z}^{n-1}$  sur  $\mathbf{R}^{n-1}$ . ■

1.25 REMARQUE. — Nous pouvons aussi associer à l'enveloppe simpliciale  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  comme au tore  $\mathcal{T}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ , la restriction de la norme  $N$  du corps  $\mathbf{K}$ . C'est une fonction polynomiale, de degré  $n$ , sur chacune des faces de ces complexes. Elle est entière sur les sommets et prend ses valeurs entre 1 à  $\nu_{\mathcal{D}}$ . ►

## 1.4 Application à la matrice d'Arnold

Revenons au cas particulier de la matrice d'Arnold dont il a été question dans l'introduction. Soit  $H_i$  les plans orthogonaux aux trois vecteurs propres  $V_i$  de  $A$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Dans [IL90], nous avons montré le résultat suivant. Soit  $H$  un *hyperplan irrationnel* :  $H \cap \mathbf{Z}^n = \{0\}$ , dirigé par la forme linéaire  $W = (1, w_2, \dots, w_n)$ ,  $H = \ker W$ . Soit  $E = W(\mathbf{Q}^n)$  le  $\mathbf{Q}$ -sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}$  des combinaisons  $\mathbf{Q}$ -linéaires des coefficients  $W_i$ , et  $\mathbf{K}$  le corps des stabilisateurs de  $E$ , c'est-à-dire l'ensemble des réels  $\lambda$  tels que  $\lambda E \subset E$ . Alors le stabilisateur de  $H$  dans  $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$  est isomorphe au groupe des unités  $\mathbf{U}$  de l'ordre  $\mathcal{D}$  des stabilisateurs du module  $\mathcal{A} = W(\mathbf{Z}^n)$ . Si le plan  $H$  est totalement agébrique (*i.e.*  $E = \mathbf{K}$  et donc  $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ) et totalement réel (*i.e.*  $\mathbf{K}$  totalement réel), alors d'après le théorème de Dirichlet  $\mathbf{U} \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^{n-1}$ .

D'autre part, soit  $\sigma_i$  les  $n$  plongements réels de  $\mathbf{K}$ , et  $W_i = \sigma_i \circ W$ , étendus par linéarité à  $\mathbf{R}^n$ . Les hyperplans  $H_i = \ker W_i$  sont les *hyperplans conjugués* de  $H$  ( $H_1 = H$  et  $\sigma_1 = \text{id}$ ). Les stabilisateurs des hyperplans  $H_i$  sont tous identiques et coïncident avec  $\mathbf{U}$ . En effet,  $WA = \lambda W \Rightarrow \sigma_i \circ WA = \lambda \sigma_i \circ W$  et donc  $W_i A = \lambda W_i$ , d'où  $AH = H \Rightarrow AH_i = H_i$ . Le cône  $\mathcal{C}$  de  $\mathbf{R}^n$  délimité par les plan  $H_i$  et contenant le point  $(1, 0 \dots, 0)$  est stabilisé par le groupe des unités positives  $\mathbf{U}_+$ . Les points entiers de  $\mathcal{C}$  s'envoient, par  $W$ , sur la partie positive de  $\mathcal{D}$ . D'autre part, tout élément de  $\text{GL}(n, \mathbf{Z})$  préservant  $\mathcal{C}$  ne peut qu'échanger les hyperplans  $H_i$ , donc, à un sous-groupe d'indice fini près (le groupe des automorphisme de  $\mathcal{D}$ ), le stabilisateur du cône  $\mathcal{C}$  est le groupe des unités positives  $\mathbf{U}_+$ .

C'est exactement ce qui se passe pour la matrice d'Arnold avec  $W_i = V_i^t$ . Pour plus de précisions à propos de cette matrice particulière voir les travaux de E. Korkina [Kor93a] [Kor93b],

## 2 Les corps quadratiques

Soit  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$  un corps quadratique réel, et  $\mathcal{D}_f$  l'ordre de conducteur  $f$  :

$$\mathcal{D}_f = \{n + mf\omega \mid n, m \in \mathbf{Z}\}, \quad (33)$$

engendré par sa base canonique  $(1, f\omega)$ , avec :

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \text{ si } d \equiv 1 \pmod{4}, \text{ et } \omega = \sqrt{d} \text{ si } d \equiv 2, 3 \pmod{4}. \quad (34)$$

Nous noterons simplement  $\omega$  pour l'anneau des entiers  $\mathcal{O}$  ( $f = 1$ ). Pour simplifier l'écriture des plongements canoniques, nous noterons pour tout élément  $z$  de  $\mathbf{K}$  :

$$z = \sigma_1(z) = x + y\sqrt{d} \quad \text{et} \quad \bar{z} = \sigma_2(z) = x - y\sqrt{d}, \quad (35)$$

et nous désignerons par la lettre capitale  $Z$ , le point du plan réel  $\mathbf{R}^2$  de coordonnées :

$$\sigma : z \mapsto Z = (z, \bar{z}). \quad (36)$$



Soit  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathcal{D}_+^\times$  et  $[a, b]$  le segment les joignant :

$$[a, b] = \{z = sa + tb \mid s, t \in \mathbf{Q}_+ \text{ et } s + t = 1\}. \quad (37)$$

**2.1 DÉFINITION.** — Nous dirons qu'un point  $z'$  est *au dessus* du segment  $[a, b]$ , s'il existe  $z \in [a, b]$  tel que  $z \preceq z'$ . Si  $z'$  est au dessus de  $[a, b]$  et si  $z' \notin [a, b]$ , nous dirons qu'il est *strictement au dessus* du segment  $[a, b]$ .

Cette définition s'interprète naturellement à l'aide du plongement canonique  $\sigma$  comme l'indique la figure 5. Considérons les points  $A = (a, \bar{a})$  et  $B = (b, \bar{b})$  du plan  $\mathbf{R}^2$  tels que  $a < b$  et  $\bar{b} < \bar{a}$ . Le segment joignant  $A$  à  $B$  est défini par :

$$[A, B] = \left\{ \bar{z} = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{b - a}(z - a) + \bar{a} \mid a \leq z \leq b \right\}, \quad (38)$$

où  $Z = (z, \bar{z})$  désigne un point courant de  $\mathbf{R}^2$ . La situation du point  $Z$  par rapport au segment  $[A, B]$  se traduit donc de la façon suivante :

$$Z \text{ au dessus de } [A, B] \Leftrightarrow \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} \geq \frac{\bar{b} - \bar{a}}{b - a} \quad (39)$$

$$Z \text{ au dessous de } [A, B] \Leftrightarrow \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} \leq \frac{\bar{b} - \bar{a}}{b - a} \quad (40)$$

Dans le cas des corps quadratiques, la construction de l'enveloppe simpliciale se simplifie grâce à la proposition suivante.

**2.2 PROPOSITION.** — *Si  $a$  et  $b$  sont deux points incomparables de  $\mathcal{D}_+^\times$ , il n'y a pas de points minimaux de  $\mathcal{D}$  strictement au dessus du segment  $[a, b]$ .*

**DÉMONSTRATION.** — Nous pouvons supposer  $a < b$ , ce qui implique  $\bar{b} < \bar{a}$ , car sinon  $a$  serait antérieur à  $b$ . Supposons qu'il existe un point minimal  $z$  strictement au dessus du segment  $[a, b]$ , il vérifie nécessairement :

$$a < z < b \quad \text{et} \quad \bar{b} < \bar{z} < \bar{a}, \quad (41)$$

car sinon il serait dans le cône de  $a$  ou  $b$ , or il est supposé minimal. Soit  $z'$  le symétrique de  $z$  par rapport au milieu du segment  $[a, b]$  :

$$z' = a + b - z. \quad (42)$$

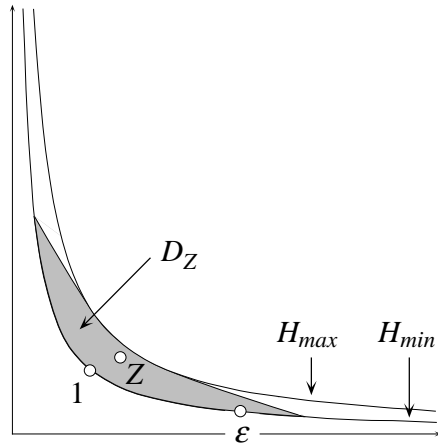


Figure 4: Domaine visible par le point  $z$ .

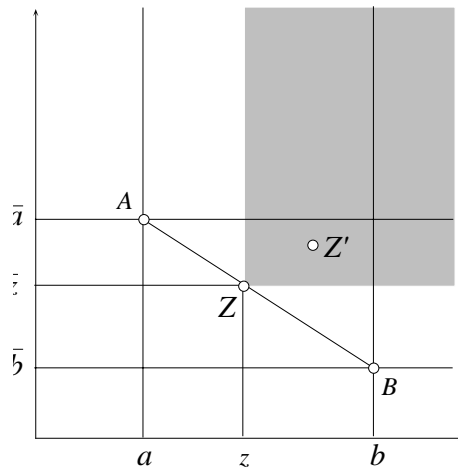


Figure 5: Régions définies par deux points de  $\mathcal{D}_+^\times$

Si  $z \in \mathcal{D}$  alors  $z' \in \mathcal{D}$ . Si, d'autre part,  $z$  est strictement au dessus du segment  $[a, b]$  alors  $z'$  est strictement en dessous, mais il appartient toujours au rectangle  $R_{a,b}$  défini par le système 41. On peut s'en convaincre en étudiant la figure 6, où nous avons noté par des lettres capitales les images des points  $a, b, z, z'$  par le plongement canonique  $\sigma$ .

Deux cas se présentent : ou bien  $a < z' < z < b$  et  $\bar{a} > \bar{z}' > \bar{z} > \bar{b}$ , ou bien  $a < z < z' < b$  et  $\bar{a} > \bar{z} > \bar{z}' > \bar{b}$ , sinon  $z$  serait dans le cône de  $z'$  et ne serait pas minimal. Définissons  $a' = z'$  et  $b' = b$  dans le premier cas, et  $a' = a$  et  $b' = z'$  dans le deuxième. Dans les deux cas  $a'$  et  $b'$  appartiennent à  $\mathcal{D}_+^\times$  et sont incomensurables, de plus le point  $z$  est au dessus du segment  $[a', b']$ , et le rectangle  $R_{a',b'}$  est strictement contenu dans  $R_{a,b}$ . On construit ainsi, par récurrence, une infinité de rectangles

$$R_{a,b} \supsetneq R_{a',b'} \supsetneq R_{a'',b''} \supsetneq \cdots \quad (43)$$

d'aires entières et strictement décroissantes :

$$\text{Aire}(R_{a^{(k)},b^{(k)}}) = (b^{(k)} - a^{(k)})(\bar{b}^{(k)} - \bar{a}^{(k)}) = N(b^{(k)} - a^{(k)}) \in \mathbf{N}^*, \quad (44)$$

ce qui est impossible. ■

**2.3 COROLLAIRE.** — *D'un élément minimal partent deux arêtes et deux seulement. les sommets de l'enveloppe simpliciale sont les point de  $\mathcal{D}_+^\times$  situés sur la frontière de son enveloppe convexe. De plus, le plongement canonique  $\sigma$  est une réalisation géométrique du complexe simplicial  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ .*

**DÉMONSTRATION.** — Ordonnons, pour l'ordre total induit par  $\mathbf{R}$ , les points minimaux entre 1 et l'unité positive fondamentale  $\varepsilon > 1$ . Il y en a un nombre fini, soit :

$$x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{b-1} < x_b = \varepsilon, \quad b \geq 1. \quad (45)$$

Nous savons que les autres points minimaux sont obtenus par l'action de  $\varepsilon^k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Puisque les  $x_i$  sont minimaux nous avons  $x_i < x_j \Rightarrow \bar{x}_i > \bar{x}_j$ , pour tout  $0 \leq i < j \leq m$ . Posons alors  $\bar{x}_1 = x_{-1}$ ,  $\bar{x}_2 = x_{-2}$  etc.. Soit  $p \in \mathbf{N}$  et

$p = qb + r$  la division euclidienne par  $b$ ,  $r < b$ , alors  $x_p = \varepsilon^q x_r$ , et  $x_{-p} = \bar{x}_p$ . Cela définit une bijection entre  $\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  et  $\mathbf{Z}$ .

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & & \bullet & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \cdots & & \bullet & & \cdots \\ \cdots & & x_{-m} = \bar{\varepsilon} & & \cdots & & x_{-1} = \bar{x}_1 & & x_0 = 1 & & x_1 & & \cdots & & x_b = \varepsilon & & \cdots \end{array}$$

Démontrons maintenant qu'entre  $x_i$  et  $x_j$  il n'y a une arête si et seulement si  $j = i + 1$  ou  $j = i - 1$ . Supposons que  $j > i + 1$ , d'après ce qu'on a vu précédemment  $x_{i+1}$  est au dessous (ou sur) le segment  $[x_i x_j]$ . Il existe donc  $t \in \mathbf{Q}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , tel que  $x_t = (1-t)x_i + tx_j$  soit postérieur à  $x_{i+1}$ , c'est-à-dire  $x_{i+1} \preceq x_t$ . Le segment  $[x_i x_j]$  n'est donc pas minimal au sens de la définition 1.16. Il est clair, dans ces conditions que le plongement canonique est une réalisation géométrique du complexe simplicial  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ . C'est ce qu'il fallait démontrer. ■

2.4 COROLLAIRE. — *Le prototype combinatoire d'un ordre quelconque d'un corps quadratique réel est le cercle marqué d'autant de sommets que d'éléments minimaux de cet ordre.*

DÉMONSTRATION. — Le groupe des unités positives  $\mathbf{U}_+$  agit sur le complexe simplicial  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ , ordonné totalement par la relation introduite en 2.3, comme le groupe des translations engendré par  $\varepsilon$ . Le quotient par  $\mathbf{U}_+$  de  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  (ou plutôt de sa réalisation géométrique  $|\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})|$ ) est donc homéomorphe à  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  c'est-à-dire à  $S^1$ . ■

2.5 REMARQUE. — Le quotient  $\Sigma(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  hérite de la décomposition simpliciale de  $\mathcal{C}(\mathbf{K}, \mathcal{D})$  si et seulement si ses sommets ne se réduisent pas aux seules unités, contrairement, par exemple, à  $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{15})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{21})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{35})$  etc. ►

2.6 REMARQUE. — Nous pouvons majorer le nombre de normes intervenant dans le graphe  $\Gamma_f(d)$ . En effet, le maximum est nécessairement inférieur au maximum de la fonction norme restreinte au segment  $[1, \varepsilon]$ , c'est-à-dire  $N(1 + t(\varepsilon - 1))$ , puisqu'il n'y a pas d'élément minimum au dessus. Hors le maximum est atteint pour la valeur  $t = 1/2$ , et donc :

$$\nu_{\mathcal{D}} = \left\lfloor \frac{2 + \text{tr } \varepsilon}{4} \right\rfloor. \quad (46)$$

Ce qui est une meilleure majoration que celle du lemme 1.13. ►

La figure 7 représente divers prototypes combinatoires de corps quadratiques, où les croix représentent les sommets. Il apparait bien—puisque, par exemple, les corps cités plus haut,  $d = 3, 5, 15, 21, 35 \dots$  ont tous un graphe à un seul sommet—que, même sans penser un instant à classer les corps quadratiques par leur prototype combinatoire, cette représentation est trop grossière. Pour cette raison, nous distinguerons entre les deux types suivants de sommets.

**2.7 DÉFINITION.** — Parmi les sommets du graphe  $\Sigma(\mathbf{K}, \mathcal{D})$ , nous appellerons *sommets géométriques*, ceux qui sont aussi sommets de l’enveloppe convexe de  $\mathcal{D}_+^\times$ . Nous appellerons *sommets plats*, les autres.

Nous avons choisi cette terminologie parce que les sommets plats sont justement les points minimaux de  $\mathcal{D}$  qui se trouvent sur les faces de l’enveloppe convexe. Ce que nous retenons, de  $\mathcal{D}$ , dans cette définition c’est la combinatoire qui consiste à distinguer les divers points minimaux de  $\mathcal{D}$  suivant qu’ils sont sur les faces de l’enveloppe convexe ou aux sommets. Cette suggestion est due à V.I. Arnold.

**2.8 DÉFINITION.** — Nous appellerons *graphe* (ou *type combinatoire*) de l’ordre  $\mathcal{D}_f$  d’un corps quadratique  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ , et nous noterons  $\Gamma_f(d)$ , le prototype combinatoire de ce ordre, où nous aurons distingué les sommets géométriques des sommets plats.

Nous représenterons géométriquement ces graphes sous la forme de cercles ou de segments marqués (leur domaine fondamental), voir figure 8. Les sommets géométriques seront désignés par des petits disques (sombre pour la classe de l’unité) et les sommets plats par des petits carrés. Par exemple, les graphes de  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$  et  $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$  ont chacun deux sommets, mais le second a deux sommets géométriques alors que le premier a un sommet géométrique et un sommet plat. Dans les deux figures 9 et 10 nous avons représenté  $\Sigma(\mathbf{Q}(\sqrt{2}))$ ,  $\Sigma(\mathbf{Q}(\sqrt{7}))$  réalisés par le plongement linéaire  $z = x + y\sqrt{d} \mapsto (x, y)$ .

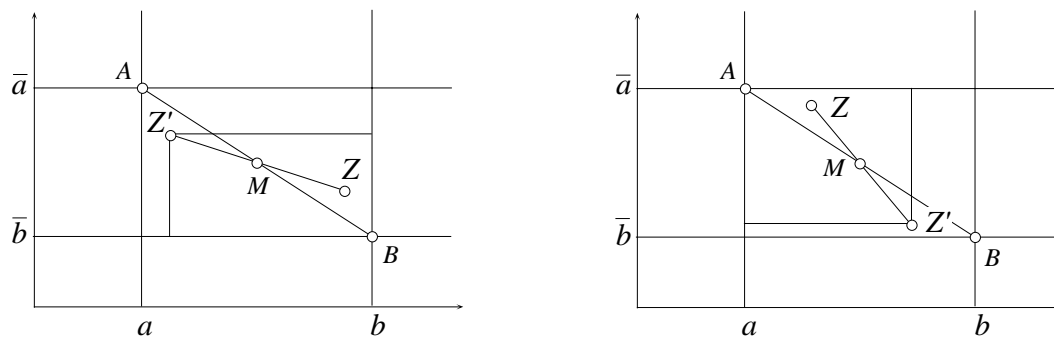


Figure 6: Situations des symétriques de  $z$

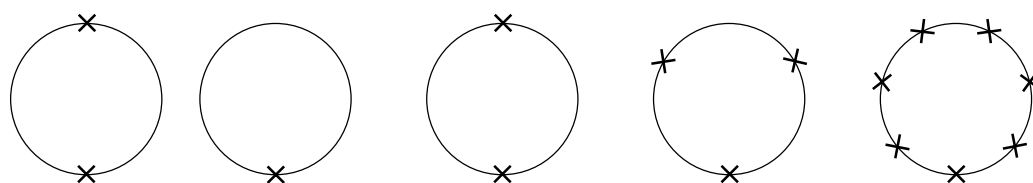


Figure 7: Les prototypes de  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{11})$  et de  $\mathbf{Q}(\sqrt{19})$

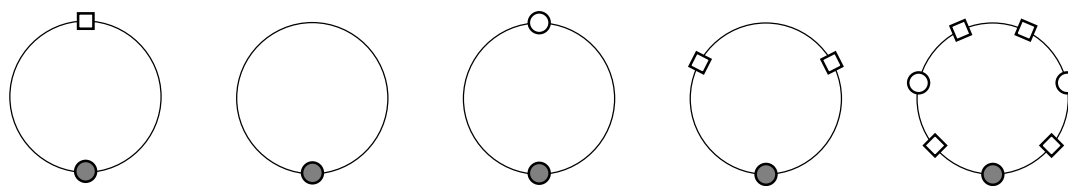


Figure 8: Les graphes de  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{11})$  et de  $\mathbf{Q}(\sqrt{19})$

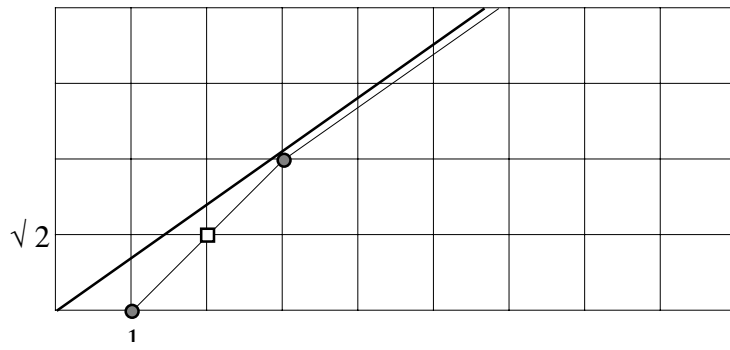


Figure 9: La réalisation géométrique du graphe de  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$

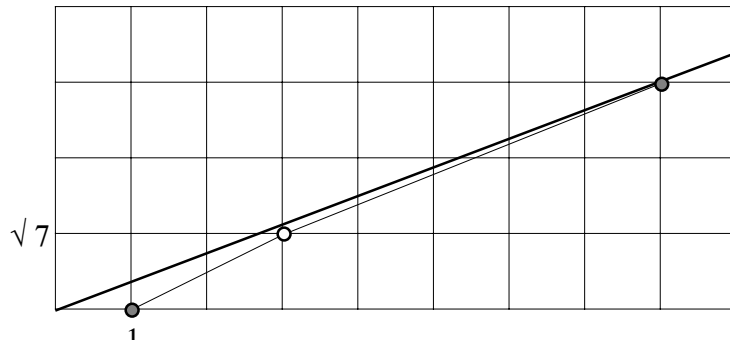


Figure 10: La réalisation géométrique du graphe de  $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$

Les graphes des corps quadratiques ainsi définis sont entièrement caractérisés par une suite de nombres entiers représentant chacun le nombre d'intervalles, séparés par un sommet plat, entre deux sommets géométriques consécutifs. Nous utiliserons la notation suivante pour les désigner :

$$\Gamma_f(d) = [b_1, \dots, b_g], \quad \text{avec } b = b_1 + b_2 + \dots + b_g. \quad (47)$$

Dans ce cas,  $g$  est le nombre de (classes de) sommets géométriques, il y a  $b_1 - 1$  sommets plats entre 1 et le premier sommet géométrique consécutif,  $b_2 - 1$  entre le second et le troisième, etc., et  $b_g - 1$  entre l'avant dernier sommet géométrique et l'unité fondamentale  $\varepsilon$  (voir figures 9 10). Par exemple :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= [2] & \Gamma(3) &= [1] & \Gamma(5) &= [1] \\ \Gamma(7) &= [1, 1] & \Gamma(19) &= [2, 3, 2] & \Gamma(43) &= [1, 3, 5, 3, 1] \end{aligned} \quad (48)$$

nous donnons en annexe la table des premiers graphes des corps quadratiques.

2.9 REMARQUE. — Comme nous pouvons le constater sur le tableau 1, les nombres  $b_i$  sont symétriques par rapport à l'involution

$$b_i \mapsto g - i + 1. \quad (49)$$

Cette symétrie est la conséquence de l'involution suivante définie sur les éléments minimaux :

$$S : z \mapsto \varepsilon \bar{z}. \quad (50)$$

En effet, si  $z$  est un point minimal alors  $\bar{z}$  est encore minimal, puisque  $\varepsilon$  préserve les éléments minimaux (proposition 1.9),  $\varepsilon \bar{z}$  est donc minimal. D'autre part, si  $1 < z < \varepsilon$  et  $\bar{\varepsilon} < \bar{z} < 1$ , alors  $1 < S(z) < \varepsilon$  et  $\bar{\varepsilon} < \overline{S(z)} < 1$ , puisque  $\varepsilon$  et  $\bar{\varepsilon}$  sont tous deux des nombres positifs. Autrement dit,  $S(z)$  est un point minimal contenu dans le segment  $[1, \varepsilon]$ . On vérifie facilement que son effet sur  $\Gamma_f(d)$  est bien celui décrit plus haut.

Considérons la symétrie  $z \mapsto 1 + \varepsilon - z$ , par rapport au milieu du segment  $[1, \varepsilon]$ . Elle envoie un point minimal sur un point qui ne l'est pas (proposition 2.2). On peut vérifier que le point  $S(z)$  empêche justement  $1 + \varepsilon - z$  d'être minimal, autrement dit que :  $S(z) \preceq 1 + \varepsilon - z$ . En effet, puisque  $1 < z < \varepsilon$  et  $1 > \bar{z} > \bar{\varepsilon}$ ,  $S(z) \preceq 1 + \varepsilon - z$  équivaut à  $\varepsilon \bar{z} \leq 1 + \varepsilon - z$  et  $\bar{\varepsilon} z \leq 1 + \bar{\varepsilon} - \bar{z}$ , c'est-à-dire  $\varepsilon \geq (z-1)/(1-\bar{z})$  et  $\bar{\varepsilon} \geq (1-\bar{z})/(z-1)$ . Mais ces deux inégalités



sont identiques puisque  $\bar{\varepsilon} = 1/\varepsilon$ . Or  $z$  est en dessous du segment  $[1, \varepsilon]$ , en utilisant alors la propriété 40, pour  $a = 1$  et  $b = \varepsilon$ , on obtient l'inégalité recherchée en remarquant que  $\varepsilon = (\varepsilon - 1)/(1 - \bar{\varepsilon})$ . ►

Définissons précisément les nombres  $b_i$  qui caractérisent le graphe  $\Gamma_f(d)$ . Soit  $1 = x_0, x_1, x_2, \dots, \varepsilon = x_b$  la suite des éléments minimaux entre 1 et  $\varepsilon$  telle qu'elle est définie dans le corollaire 2.3. Soit  $v_1, v_2, \dots, v_b$  la suite des différences :

$$v_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1 \dots b. \quad (51)$$

Regroupons par paquets les termes  $v_i$  successifs égaux. Autrement dit, définissons :

$$u_1 = v_{i_0=1} \dots = v_{i_1}, u_2 = v_{i_1+1} = \dots = v_{i_2}, u_g = v_{i_{g-1}} = \dots = v_{i_g=b}, \quad (52)$$

tels que :

$$u_1 \neq u_2, u_2 \neq u_3, \dots, u_{g-1} \neq u_g. \quad (53)$$

En posant alors :

$$b_1 = i_1, b_2 = i_2 - i_1, \dots, b_g = i_g - i_{g-1}, \quad b = b_1 + b_2 + \dots + b_g, \quad (54)$$

on obtient la décomposition suivante de  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = 1 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_g u_g. \quad (55)$$

Décomposons maintenant les  $u_i$  sur la base  $(1, f\omega)$ , alors :

$$u_i = r_i + s_i f\omega, \quad r_i, s_i \in \mathbf{N}^* \quad \text{et} \quad r_i \wedge s_i = 1. \quad (56)$$

En effet si  $r_i$  et  $s_i$  n'étaient pas premiers entre eux, il se trouverait, sur le segment décrit par  $u_i$  des points minimaux qui ne sont pas dans la liste  $(1, x_1, \dots, x_b)$ .

Les sommets géométriques s'obtiennent alors tous par l'action des unités positives sur l'ensemble de leurs représentants :

$$X_i = 1 + \sum_{k=1}^i b_k u_k \quad i = 1 \dots g. \quad (57)$$

Nous ne détaillerons pas plus ici les relations entre les  $u_i$  et  $b_i$ , c'est-à-dire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle suite de couples  $(b_1, u_1) \dots (b_g, u_g)$  définisse l'unité d'un ordre  $\mathcal{D}_f$  dont les  $X_i$  sont les sommets géométriques.

2.10 REMARQUE. — Le graphe de l'anneau des entiers des corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ , avec  $d \equiv 2$  ou  $3 \pmod{4}$ , est étroitement lié à la décomposition en fraction continue de  $1/\sqrt{d}$ . En effet, la décomposition de  $1/\sqrt{d}$  est du type

$$1/\sqrt{d} = [0 \ a_0 \ b_1 \ a_1 \ b_2 \ a_1 \dots b_g \ a_2 \ b_1 \ a_1 \ b_2 \ a_1 \dots b_g \ a_2 \dots],$$

par exemple :

$$1/\sqrt{19} = [0 \ 4 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 8 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 8 \dots] \quad \text{alors que} \quad \Gamma(d) = [2 \ 3 \ 2].$$

Cela peut être une méthode pour trouver le graphe  $\Gamma(d)$ , les nombres  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  viennent de l'enveloppe des points entiers contenus dans le quadrangle de  $\sqrt{d}$ . On peut les considérer comme des termes parasites dans la mesure où ils n'offrent pas plus d'informations que  $\Gamma(d)$ . ►

Le type de corps quadratique le plus simple est sans doute celui dont le graphe est du type  $\Gamma(d) = [b]$ , dont tous les sommets sont plats hormis les sommets des unités. Nous montrons dans [Igl94] que pour tout  $b$  il existe une infinité de tels corps et nous calculons leur répartition (au sens des densités de Dirichlet) dans l'ensemble des corps quadratiques. Il resterait à faire la même chose pour les autres types de corps quadratiques.

## Bibliographie

- [BC67] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch. *Théorie des nombres*. Monographies Internationales de mathématiques Modernes. Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [Igl94] P. Iglesias. Statistique sur les corps quadratiques plats. Prépublication, ENS-Lyon, 1994.
- [IL90] P. Iglesias et G. Lachaud. Espaces différentiables singuliers et corps de nombres algébriques. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 40(1) :723–737, 1990.
- [Kor93a] E. Korkina. Fractions continues multidimensionnelles et enveloppes convexes. ENS-Lyon, décembre 1993.
- [Kor93b] E. Korkina. The simplest 2-dimensional continued fraction. Moskow Independant University, 1993.
- [Shi76] T. Shintani. On evaluation of zeta functions on totally real algebraic number fields at non-positive integers. *J. Fac. Sci. Univ. Toyo*, 24 :393–417, 1976.

Patrick Iglesias  
CMI  
39 rue F. Joliot-Curie  
F-13453 Marseille Cedex 13

`Patrick.Iglesias@cmi.univ-mrs.fr`

$d$	$\Gamma(d)$
2	[2]
3	[1]
6	[2]
7	[1, 1]
10	[6]
11	[3]
14	[1, 1]
15	[1]
19	[2, 3, 2]
22	[1, 4, 1]
23	[1, 1]
26	[10]
30	[2]

$d$	$\Gamma(d)$
31	[1, 3, 3, 1]
34	[1, 1]
35	[1]
38	[6]
39	[4]
42	[2]
43	[1, 3, 5, 3, 1]
47	[1, 1]
51	[7]
55	[2, 2]
58	[1, 1, 1, 14, 1, 1, 1]
59	[1, 7, 1]
62	[1, 1]

$d$	$\Gamma(d)$
66	[8]
67	[5, 1, 7, 1, 5]
70	[2, 2, 2]
71	[2, 1, 1, 2]
74	[1, 1, 16, 1, 1]
78	[1, 1]
79	[1, 1]
82	[18]
83	[9]
86	[3, 1, 8, 1, 3]
87	[3]
91	[1, 5, 5, 1]

Table 1: Table des premiers graphes des corps quadratiques, avec  $d \equiv 2$  ou  $3 \pmod{4}$ .