

CLASSIFICATION DES $SO(3)$ -VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES DE DIMENSION 4

P. IGLESIAS*

Institut Steklov, Moscou URSS

Septembre 1984
CPT-84/PE.1673

* Adresse permanente: Centre de Physique Théorique§
CNRS Luminy case 907
F-13288 Marseille cedex 9 France

§ Laboratoire propre du CNRS.

§0 INTRODUCTION

C'est Joseph Louis Lagrange qui dans ses travaux sur la structure des équations de la mécanique, "invente" la *géométrie symplectique*. L'espace qu'il munit d'une structure symplectique est l'ensemble des solutions des *équations du mouvement* d'un système dynamique (qui sera appelé plus tard espace des mouvements [11]), la structure symplectique apparaît à l'époque sous la forme de crochets et parenthèses qui portent aujourd'hui le nom de *parenthèses et crochets de Lagrange* [7].

Comme le souligne J.M. Souriau [11] "Cette théorie n'a pas été réellement comprise par les contemporains et les épigones de Lagrange. Poisson, Hamilton, par exemple ne l'ont transmise que sous forme tronquée. En particulier la structure symplectique est définie sur l'espace des phase; choix désastreux qui fait disparaître à la fois les propriétés globales et les propriétés relativistes de la mécanique."

L'importance de la structure globale (topologique et différentielle) de l'espace des mouvements apparaît notamment dans les procédés de quantification de la mécanique (*quantification géométrique*). Par exemple, les différentes quantifications d'un système dynamique dépendent des propriétés homotopiques de son espace des mouvements (il existe une description de l'effet Bohm-Aharonov faisant appel à cette propriété [3]). D'autre part, les propriétés relativistes de la mécanique se traduisent simplement, dans le langage de la mécanique symplectique, par l'existence d'un groupe (le groupe de Galilée ou de Poincaré) agissant sur l'espace des mouvements par des transformations conservant la structure symplectique (*symplectomorphisms*).

Pour ces raisons en particulier et non seulement pour des raisons d'ordre conceptuel, la géométrie symplectique apparaît à l'heure actuelle comme le cadre mathématique par excellence de la mécanique.

Ce travail est consacré aux propriétés globales de l'espace des mouvements des systèmes dynamiques Galiléens de masse non nulle. L'étude de ces systèmes, après réduction au centre de gravité, se ramène à celle des *SO(3)-variétés symplectiques*, où $SO(3)$ se traduit comme le groupe des rotations de l'espace. Il est divisé en quatre parties.

Dans la première partie il est établi un certain nombre de propriétés élémentaires des $SO(3)$ -variétés symplectiques. Par exemple le *stabilisateur principal* de l'action de $SO(3)$ est le groupe $SO(2)$ où un groupe cyclique $\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Nous y montrons que toutes les variétés symplectiques répondant au premier cas sont nécessairement difféomorphes au produit direct symplectique de la sphère S^2 (munie de l'action naturelle de $SO(3)$ et de la structure symplectique s .Surf, $s>0$) par une variété symplectique quelconque (munie de l'action triviale de $SO(3)$).

Les deuxième et troisième parties sont consacrées à l'étude particulière des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4 à stabilisateur principal discret. Nous utilisons pour cela certains résultats essentiels de la théorie des actions de groupes compacts de transformations [1].

Dans la deuxième partie nous dressons la liste complète des types¹ de $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4, nous décrivons explicitement cet ensemble pour chaque type. Nous nous apercevons que chacune de ces variétés peut être obtenue (topologiquement) comme le quotient d'un ouvert invariant du produit, muni de l'action diagonale de $SO(3)$, par une certaine action de \mathbf{Z}_m (commutant avec celle de $SO(3)$). Les variétés compactes que nous obtenons sont (munie d'une infinité d'actions de $SO(3)$, indexée chacune par un entier) et $P(2, \mathbf{C})$ (munie de l'action de $SO(3)$ agissant comme le sous-groupe des matrices à coefficients réels de $SU(3)$ par la représentation co-adjointe).

Dans la troisième partie nous caractérisons les types des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4 (les isomorphismes sont ici les symplectomorphismes équivariants). Ceci fait apparaître un certain nombre de constantes qui sont liées à la valeur du moment équivariant de $SO(3)$ sur les orbites singulières et aussi à sa valeur à l'infini dans le cas non-compact. Nous introduisons aussi une notion de prolongement (relation de pré-ordre) qui a comme conséquence de caractériser certains types de $SO(3)$ -

¹Deux $SO(3)$ -variétés ont même type si il existe un difféomorphisme équivariant de l'une à l'autre.

variétés symplectiques pour lesquelles le groupe des automorphismes de la $SO(3)$ -structure n'a qu'un invariant : la classe de cohomologie de la forme symplectique.

Les résultats de ces parties sont résumés dans les tableaux 1,2 et 3. Ce travail suggerera peut-être des développements vers l'étude des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension plus grande.

Faute de place, toute les démonstrations n'ont pas été incluses dans ce papier, nous renvoyons le lecteur qui désire plus de précisions à [4].

§1 GEOMETRIE SYMPLECTIQUE ET MECANIQUE

Mécanique classique Galiléenne

Les *systèmes dynamiques isolés* de la mécanique classique Galiléenne sont définis par :

- ♠ Une variété différentielle connexe X , appelée *espace des mouvements*.
- ♦ Une action différentiable R du *groupe de Galilée* \mathbf{G} sur cet espace.
- ♣ Une *forme symplectique*¹ σ définie sur cet espace, invariante par l'action du *groupe de Galilée*.

Le moment ψ du groupe de Galilée \mathbf{G} , sur X est défini par l'équation [11]

$$\forall Z \in \mathbf{G} \quad \sigma(Z_X) = - \langle Z, d\psi \rangle \quad (1.1)$$

Où G désigne l'algèbre de Lie de \mathbf{G} , Z_X l'action infinitésimale de Z sur X , $\sigma(Z_X)$ le contracté de σ avec le champs de vecteurs Z_X et les crochets \langle, \rangle le tenseur de Killing de G .

Le moment ψ caractérise ce qui est appelé en physique les *quantités conservées* ou *invariants du mouvement* relativement à l'action du groupe de Galilée. Ces grandeurs doivent exister pour tout mouvement, c'est pour cela qu'on est ammené à compléter la liste des axiomes ♠, ♦, ♣ par celui-ci :

- ♥ L'action du groupe de Galilée sur l'espace des mouvements possède un moment partout défini.

Grâce au moment ψ on définit la masse totale du système dynamique comme la classe de cohomologie du cocycle symplectique θ défini par la formule [11] :

$$\theta(a) = \psi(x) \circ \text{Ad}(a) - \text{Ad}^*(a) \circ \psi(x) \quad \forall a \in \mathbf{G} \quad \forall x \in X \quad (1.2)$$

Où Ad et Ad^* désignent respectivement l'action adjointe et co-adjointe de \mathbf{G} . Lorsque le système dynamique considéré est massif, c'est à dire lorsque la classe de cohomologie de θ est non nulle, le théorème de décomposition barycentrique donne une information supplémentaire sur la nature de l'espace des mouvements X [11] :

1.3 Théorème Si la masse totale d'un système dynamique isolé est non-nulle, son espace des mouvements (X, σ) est symplectomorphe au produit symplectique de $(T^*(\mathbf{R}^3), m\omega)$, où m est la masse

¹On dit forme symplectique pour champ de formes symplectiques.

totale du système et ω la forme symplectique canonique du cotangent, par une variété symplectique (Y, ε) possédant $SO(3) \times \mathbf{R}$ comme groupe dynamique ⁽¹⁾.

L'action du groupe $SO(3) \times \mathbf{R}$ sur Y possède deux moments que nous noterons \mathbf{L} et \mathbf{H} , le premier relatif à l'action de $SO(3)$, le second à celle de \mathbf{R} . \mathbf{L} s'appelle moment cinétique propre du système dynamique. On identifie l'algèbre de Lie de $SO(3)$ et son dual avec \mathbf{R}^3 grâce à l'opérateur produit vectoriel j (1.4).

$$j(V)(W) = V \times W \quad \forall (V, W) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{L} \circ r(A) = A \cdot \mathbf{L} \quad \forall A \in SO(3) \quad (1.5)$$

L'action adjointe (et co-adjointe) s'identifie à l'action naturelle de $SO(3)$ sur \mathbf{R}^3 . La cohomologie symplectique de $SO(3)$ étant nulle, il est toujours possible de fixer la constante additive du moment cinétique propre de façon à vérifier l'équation d'équivariance 1.5, où r est l'action de $SO(3)$ sur Y . \mathbf{L} est alors défini de façon unique, il sera appelé le *moment cinétique équivariant* du système dynamique.

\mathbf{H} s'appelle l'*énergie interne* du système dynamique, la commutativité des actions de $SO(3)$ et $(\mathbf{R}, +)$ sur Y implique l'invariance de \mathbf{H} par $SO(3)$:

$$\mathbf{H} \circ r(A) = \mathbf{H} \quad \forall A \in SO(3) \quad (1.6)$$

L'énergie interne reste définie à une constante près. Le *gradient symplectique* de \mathbf{H} , relativement à la structure symplectique ε de Y est défini par la formule :

$$\text{grad}(\mathbf{H}) = -\varepsilon^{-1}(d\mathbf{H}) \quad (1.7)$$

C'est un champ de vecteur complet dont l'exponentielle est l'action de \mathbf{R} qui s'interprète comme l'action du temps et définit ce qui est appelé en physique les mouvements retardés² :

$$t_x(x) = \exp(t \cdot \text{grad}(\mathbf{H}))(x) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \forall x \in Y \quad (1.8)$$

On dit que \mathbf{H} est une variable dynamique complète. Ainsi un système dynamique Galiléen massif isolé est entièrement défini par un quadruplet $(Y, r, \varepsilon, \mathbf{H})$ où (Y, r, ε) est une $SO(3)$ -variété symplectique et \mathbf{H} une variable dynamique invariante complète. L'exigence d'un moment relatif à l'action r de $SO(3)$ est inutile car certaines propriétés de ce groupe suffisent à prouver son existence. Le quadruplet $(Y, r, \varepsilon, \mathbf{H})$ définit la structure interne du système isolé que l'on retrouve entièrement en considérant le produit symplectique $(\mathbf{R}^6, m, \omega) \times (Y, \varepsilon)$, la "différence" entre X et $\mathbf{R}^6 \times Y$ est ce qu'il est convenu d'appeler en physique le *choix d'un référentiel*.

Une question naturelle que l'on peut se poser en mécanique est celle de la classification des systèmes dynamiques isolés. C'est à dire, en ce qui concerne les systèmes massifs, de répertorier tous les quadruplet $(Y, r, \varepsilon, \mathbf{H})$ modulo les isomorphismes naturels de cet ensemble (voir troisième partie). Il est inutile de pré-

¹ Quand $\theta \neq 0$ le sous groupe invariant $(\mathbf{R}^6, +)$ du groupe de Galilée agit librement sur X , cette action muni X d'une structure de variété fibrée principale, X est donc difféomorphe au fibré trivial $\mathbf{R}^6 \times [X/\mathbf{R}^6]$. On pose alors $Y = X/\mathbf{R}^6$, Y peut alors s'interpréter grâce à la réduction de Marsden-Weinstein [7] comme l'espace des mouvements à moment constant (relatifs à \mathbf{R}^6) nul, c'est à dire les mouvements autour du centre de gravité.

²On note a_V l'action d'un élément a d'un groupe G agissant sur V . et Z_V l'action infinitésimale d'un élément de son algèbre de Lie.

ciser que ce problème est très vaste. Malgré tout, certaines réponses partielles ont été apportées, en particulier on sait après les travaux de Kirillov, Kostant et Souriau [5] [6] [11] que toute G -variété symplectique (où G est un groupe de Lie quelconque) qui est un G -espace homogène est un revêtement d'une orbite co-adjointe de G pour la structure symplectique co-adjointe canonique. Dans le deuxième paragraphe de ce travail on montre que toute $SO(3)$ -variétés symplectiques dont le type d'orbite principale est S^2 est symplectomorphe au produit symplectique de (S^2, s, Surf) , où $s \in \mathbf{R}$ et Surf est le volume de la sphère, par une variété symplectique quelconque. Dans le troisième paragraphe on résoud entièrement le problème énoncé plus haut pour la dimension 4. Il semble alors qu'un critère possible pour la classification des systèmes dynamiques soit la décomposition en types d'orbites de $SO(3)$ de la variété X .

L'étude initiale des quadruplets $(Y, r, \varepsilon, \mathbf{H})$ peut se réduire dans un premier temps à l'étude des $SO(3)$ variétés symplectiques, c'est à dire des triplets (X, r, ε) . En effet toute $SO(3)$ -variété symplectique admet des variables dynamiques complètes, ne seraient ce que les constantes. Mais il apparaîtra dans la suite une variable particulière que nous appellerons le hamiltonien canonique et que nous noterons \mathbf{H}_c , elle est définie par :

$$\mathbf{H}_c = \frac{1}{2} \|\mathbf{L}\|^2 \tag{1.9}$$

Grâce à l'équivariance de \mathbf{L} , \mathbf{H}_c est évidemment invariante, elle définit sur l'espace des orbites une fonction réelle que nous noterons \mathbf{h}_c et que nous appellerons le *petit hamiltonien canonique*. La variable dynamique \mathbf{H}_c est complète, en effet un calcul simple permet de montrer :

$$\begin{cases} \forall x \in X \text{ grad}(\mathbf{H}_c)(x) = L_X(x) \quad L = \mathbf{L}(x) \\ \exp(\text{tgrad}(\mathbf{H}_c))(x) = r(e^{\text{tj}(\mathbf{L})})(x) \end{cases} \tag{1.10}$$

Cet hamiltonien canonique n'a pas, en général, de signification physique particulière, il apparaîtra simplement dans les paragraphes suivants comme une variable fondamentale. Ainsi la répertoration des structures symplectiques internes se réduit dans un premier à celle des $SO(3)$ -variétés symplectiques.

Quelques propriétés des $SO(3)$ -variétés symplectiques

Rappelons que les sous groupes de $SO(3)$ sont :

- dimension 3 : $SO(3)$
- dimension 1 : $SO(2)$ et $O(2)$
- dimension 0 : les groupes cycliques \mathbf{Z}_m et les groupes diédraux $\mathbf{D}_m = \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_2$, $m \in \mathbf{N}$, les groupes du tétraèdre \mathbf{T} , de l'octaèdre \mathbf{O} et de l'icosaèdre \mathbf{I} .

Nous allons montrer dans ce paragraphe que la nature de l'orbite principale¹ de l'action de $SO(3)$ sur une $SO(3)$ -variété symplectique (X, r, ε) est imposée par l'existence du moment équivariant \mathbf{L} .

1.11 Théorème Soit (X, r, ε) une $SO(3)$ -variété symplectique, $SO(3)$ agissant effectivement sur X , le stabilisateur principal est un sous groupe de Lie de $SO(2)$, c'est à dire : $SO(2)$ ou \mathbf{Z}_m .

- Soit \mathbf{L} le moment équivariant de l'action de $SO(3)$ sur X , la condition d'équivariance $\mathbf{L} \circ r(a) = a.\mathbf{L}$ implique nécessairement $\text{stab}(x) \subset \text{stab}(\mathbf{L}(x))$. Donc si $\text{stab}(x)$ n'est pas conjugué à un sous-groupe de $SO(2)$ alors $\mathbf{L}(x) = 0$, puisque $\text{stab}(\mathbf{L}(x))$ est de type $SO(2)$, si $\mathbf{L}(x) \neq 0$ et de type $SO(3)$ si $\mathbf{L}(x) = 0$.

¹Une orbite est principale s'il existe un ouvert dense pour lequel son stabilisateur est conjugué au stabilisateur de toutes les autres orbites de cet ouvert [1].

Supposons que $\text{stab}(x)$ ne soit pas conjugué à un sous-groupe de $\text{SO}(2)$ et que x appartienne à une orbite principale, on a alors $L(x) = 0$ sur la réunion des orbites principales qui constitue un ouvert dense de X , et donc par continuité L est identiquement nul. La formule du moment 1.1 indique alors $\varepsilon(\Omega_X(x)) = 0 \forall \Omega \in \mathbf{R}^3$ et donc, puisque ε est régulière $\Omega_X(x) = 0 \forall \Omega \in \mathbf{R}^3$. Ceci est impossible puisque $\text{SO}(3)$ agit effectivement. Donc $\text{stab}(x)$ a le type d'un sous groupe de Lie de $\text{SO}(2)$.•

Décomposition des $\text{SO}(3)$ -variétés symplectiques à stabilisateur principal $\text{SO}(2)$

Soit (X,r,ε) une $\text{SO}(3)$ -variété symplectique, nous supposons que son type de stabilisateur principal est $\text{SO}(2)$ et nous noterons L le moment équivariant de l'action de $\text{SO}(3)$. Nous allons démontrer que X est nécessairement isomorphe au produit direct symplectique¹ de (S^2,s,Surf) par une variété symplectique quelconque (Y,α) . Donnons auparavant quelques définitions.

Nous noterons X^* la réunion des orbites principales de $\text{SO}(3)$, $X^\#$ étant l'ensemble des points de X pour lesquels le moment équivariant L ne s'annule pas. Nous noterons encore X^\dagger l'intersection de $X^\#$ et de X^* : $X^\dagger = X^\# \cap X^*$.

1.12 Lemme X^\dagger est un ouvert dense de X saturé par $\text{SO}(3)$.

• L'ensemble des points x de X vérifiant $L(x) = 0$ est la réunion d'orbites de $\text{SO}(3)$, grâce à l'équivariance de L . Ainsi $X^\#$, le complémentaire de cet ensemble, est lui aussi une réunion d'orbites de $\text{SO}(3)$. D'autre part X^\dagger est l'intersection de deux ouverts saturés par $\text{SO}(3)$, c'est donc un ouvert saturé par $\text{SO}(3)$. Considérons alors un point $x \in X$ et supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de x tel que $V \cap X^\dagger = \emptyset$, $V \cap X^*$ est un voisinage W de x . Il existe donc un voisinage ouvert W de x sur lequel le moment équivariant L s'annule : $W \cap X^\# = \emptyset$. En appliquant la formule du moment on a : $\forall y \in W, \forall \Omega \in \mathbf{R}^3 : \varepsilon(\Omega_X) = -\langle dL, \Omega \rangle = 0 \Rightarrow \Omega_X(y) = 0$, donc l'action de $\text{SO}(3)$ est triviale sur le voisinage W de x ce qui est impossible puisque $W \subset X^*$. Tout ouvert de X intersecte X^\dagger , c'est donc un ouvert dense. •

1.13 Lemme Le hamiltonien canonique H_c de L est une constante non nulle, toutes les orbites de $\text{SO}(3)$ sont principales.

• Pour tout $x \in X^\dagger$ $\text{stab}(x) = \text{SO}(2;L)^2$, où $L = L(x)$, puisque $\text{stab}(x) \subset \text{stab}(L)$ et $\text{type}(\text{stab}(x)) = \text{SO}(2)$. Donc $L_X(x)$ est identiquement nul et par conséquent $\text{grad}(H_c)(x)$. Par continuité $\text{grad } H_c$ s'annule sur tout X . Donc H_c est constant (X est connexe). Cette constante est nécessairement non-nulle (1.12). D'autre part grâce au théorème des orbites principales [1] $\text{SO}(2)$ est conjugué à un sous-groupe de tous les stabilisateurs non principaux de $\text{SO}(3)$, ils ne peuvent donc être que du type $\text{O}(2)$ ou $\text{SO}(3)$ or à cause de l'équivariance du moment L celui-ci s'annulerait sur ces orbites ce qui contredit le résultat précédent. Les orbites sont donc toutes principales •

La variété X est alors fibré sur son quotient par $\text{SO}(3)$ (qui est canoniquement une variété [1]). Nous allons montrer maintenant que X est une fibration triviale grâce à l'existence du moment équivariant.

1.14 Théorème Soit (X,r,ε) une $\text{SO}(3)$ -variété symplectique dont le stabilisateur principal est de type $\text{SO}(2)$. Soit $Y = X/\text{SO}(3)$ la variété des orbites. Il existe alors sur Y une structure symplectique α telle que la variété symplectique (X,ε) soit symplectomorphe au produit direct de (S^2,s,Surf) par (Y,α) où $\text{SO}(3)$ agit naturellement sur S^2 et trivialement sur Y , s étant un réel tel que le moment équivariant de $\text{SO}(3)$ s'écrive $L(U,y) = sU, (U,y) \in S^2 \times Y$.

¹ Surf désigne l'élément de surface de la sphère S^2 .

² Nous noterons $\text{SO}(2;U)$ le sous groupe des rotations autour de U .

• Posons $\mathbf{I} = (1/s)\mathbf{L}$ où $s = \|\mathbf{L}(x)\|$, $s > 0$ grâce à (1.13), donc $\mathbf{I} \in C^\infty(X, S^2)$. Posons $Y = \mathbf{I}^{-1}(U_0)$ où $U_0 \in S^2$ alors :

a) Y coupe toutes les orbites en un point et un seul :

supposons le contraire et soient x_0 et x_1 deux points d'une même orbite appartenant à Y : $x_1 = r(a)(Y)$, $a \in SO(3)$. On a alors $\mathbf{I}(Y) = a.\mathbf{I}(x_0)$ et donc $U_0 = a.U_0$. Donc $a \in SO(2; U_0)$, mais $\text{stab}(x_0) = SO(2; U_0)$ donc $a.x_0 = x_0$, c'est à dire $x_0 = x_1$. Ainsi Y s'identifie à $X/SO(3)$.

b) Y est une sous-variété de X :

$\ker(D(\mathbf{L})(x)) = \{\delta x \in T_x(X) \mid \langle \Omega, D(\mathbf{L})(x)(\delta x) \rangle = 0 \forall \Omega \in \mathbf{R}^3\}$ mais $\varepsilon(\Omega_X(x), \delta x) = \langle \Omega, D(\mathbf{L})(x)(\delta x) \rangle$ donc puisque : $\{\Omega_X(x) \mid \Omega \in \mathbf{R}^3\} = T_x(SO(3).x)$, on a : $\ker(D(\mathbf{L})(x)) = \text{Orth}_e(T_x(SO(3).x))$, or $T_x(SO(3).x) \cap \text{Orth}_e(T_x(SO(3).x)) = 0$ car si $\Omega_X(x) \in \text{Orth}_e(T_x(SO(3).x))$, alors : $\langle \Lambda, D(\mathbf{L})(x)(\Omega_X(x)) \rangle = 0 \forall \Lambda \in \mathbf{R}^3$, c'est à dire $\Omega = \lambda L$ puisque $D(\mathbf{L})(x)(\Omega_X(x)) = L \times \Omega$, $L = \mathbf{L}(x)$ et donc $\Omega_X(x) = \lambda \Lambda_X(x) = \lambda \text{grad}(\mathbf{H}_c)(x) = 0$. Donc : $T_x(X)$ est égal à la somme $T_x(SO(3).x) \oplus \text{Orth}_e(T_x(SO(3).x))$ et encore à $T_x(SO(3).x) \oplus \ker(D(\mathbf{L})(x))$, et donc $\dim[\ker(D(\mathbf{L})(x))] = \dim(X) - 2$, $D(\mathbf{L})(x)$ est de rang constant. Par application du théorème du rang on déduit que $\mathbf{I}^{-1}(U_0) = Y$ possède une structure de variété différentielle unique pour laquelle la projection canonique de X à Y est une submersion.

c) Il existe un difféomorphisme équivariant de X à $Y \times S^2$:

Soit π la projection de X sur Y , on définit f de $SO(3) \times Y$ à X par : $f : (a, Y) \rightarrow r(a)(x)$, $\forall (a, Y) \in SO(3) \times Y$, f est alors invariante par $SO(2; U_0) = \text{stab}(Y)$, elle permet de définir à son tour, par factorisation sur $S^2 \times Y$ une application différentiable φ à valeurs dans X . Il est immédiat de vérifier que φ est bijective et que son inverse est donné par : $\varphi^{-1}(x) = (\mathbf{I}(x), \pi(x))$, φ est donc un difféomorphisme. Le transport de l'action de $SO(3)$ sur $Y \times S^2$ donne le produit de l'action canonique sur S^2 et de l'action triviale sur Y . On transporte alors la structure symplectique de X sur $Y \times S^2$ par φ . Son moment équivariant s'écrit alors $L(y, U) = f(y).U$ où $f \in C^\infty(Y, \mathbf{R})$; or nous avons vu que $\mathbf{H}_c(y, U) = (1/2).\|L(y, U)\|^2$ est constant et donc $f(y) = s$, $s \in \mathbf{R}$. Soient alors : π_1 et π_2 Les projections de $Y \times S^2$ sur S^2 et Y et considérons la deux-forme pré-symplectique $s.\pi_1^*(\text{Surf})$ définie sur $Y \times S^2$, la différence entre ε et $s.\pi_1^*(\text{Surf})$ est une deux-forme invariante qui s'annule sur les vecteurs verticaux, c'est donc l'image réciproque par π_2 d'une deux-forme fermée α de Y : $\varepsilon = s.\pi_1^*(\text{Surf}) \oplus \pi_2^*(\alpha)$. On vérifie immédiatement que $\ker(\varepsilon) = \{0\} \Rightarrow \ker(\alpha) = \{0\}$ et donc que (Y, α) est une variété symplectique. Ainsi : (X, ε) est symplectomorphe à $(S^2, s.\text{Surf}) \times (Y, \alpha)$.•

On peut paraphraser ce résultat en disant que les seules $SO(3)$ -variétés dont les orbites principales sont de type S^2 et qui admettent une structure symplectique invariante sont de type $S^2 \times Y$ où Y est elle même un variété symplectique.

Un mot de physique

Le cas dégénéré où Y est réduite à un point est un cas particulier de la situation décrite dans ce paragraphe. On reconnaît, pour le système complet avec centre de gravité, la structure d'orbite co-adjointe du groupe de Galilée qui s'interprète en physique comme le modèle classique de la particule de spin $|s|$. L'énergie interne, le dernier élément de la structure dynamique, est une fonction réelle \mathbf{H} invariante par $SO(3)$, c'est à dire : $\mathbf{H}(U, y) = \mathbf{h}(y)$ $\mathbf{h} \in C^\infty(Y, \mathbf{R})$. Dans le cas où Y est réduite à un point, ce point peut s'identifier avec la la valeur E de l'énergie interne \mathbf{h} , c'est ce qui fait écrire parfois $X = S^2 \times \{E\}$, et dire que le système est constitué d'une particule de spin s et d'énergie interne E [11]. Dans le cas où $\dim(Y) \geq 2$ l'énergie interne est une fonction quelconque. L'évolution du système est définie par intégration de l'équation différentielle : $dx/dt = \text{grad}_c(\mathbf{H})$, c'est à dire par :

$$U(t) = U_0 \text{ et } y(t) = \exp(t \text{grad}_a(\mathbf{h}))(y_0)$$

Comme dans le cas de la particule à spin il y a stationarité du vecteur de spin U ce qui permet d'interpréter physiquement l'espace (Y, α) comme une structure interne additionnelle et le système complet, avec centre de masse, comme une particule de spin s et à structure interne complexe (par exemple isospin). Les deux structures étant parfaitement découplées. Les systèmes dynamiques où la structure de spin va pouvoir interagir avec une autre structure sont dans la classe des systèmes pour lesquels le type de stabilisateur principal de $SO(3)$ est discret. La distinction entre les deux situations possibles $SO(2)$ et Z_m s'interprète comme l'expression de deux situations physiques distinctes.

§2 LE MOMENT DES $SO(3)$ -VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES DE DIMENSION 4

Notations et définitions

Soit $\zeta = (X, R)$ une $SO(3)$ -variété. Nous noterons $\Sigma[\zeta]$ l'ensemble des deux-formes fermées $SO(3)$ -invariantes et $\Sigma^*[\zeta]$ le sous-ensemble des formes symplectiques (condition supplémentaire de fermeture). Si cet ensemble n'est pas réduit à l'ensemble vide nous dirons que la $SO(3)$ -variété ζ est *symplectisable*. Nous noterons $\text{Eq}(\zeta, \mathbf{R}^3)$ l'ensemble des applications différentiables équivariantes définies sur X à valeurs dans \mathbf{R}^3 . Il existe une application naturelle définie sur $\Sigma[\zeta]$ à valeurs dans $\text{Eq}(\zeta, \mathbf{R}^3)$ qui à chaque deux-forme fermée invariante associe son moment équivariant (il n'est pas nécessaire que la forme soit exacte, c'est à dire symplectique). Nous noterons M cette application et $M[\zeta]$ l'image par M de $\Sigma^*[\zeta]$:

$$\begin{cases} M : \Sigma^*[\zeta] \rightarrow \text{Eq}(\zeta, \mathbf{R}^3) \spadesuit \\ M[\zeta] = M(\text{Eq}(\zeta, \mathbf{R}^3)) \blacklozenge \end{cases} \quad (2.1)$$

Propriétés principales du moment équivariant

Nous donnons dans ce paragraphe certaines propriétés que vérifie le moment équivariant d'une structure symplectique invariante définie sur une $SO(3)$ -variété de dimension 4. Ces propriétés permettront de donner plus loin une énumération complète de ces variétés.

2.2 Lemme Soit (X, R, σ) une $SO(3)$ -variété symplectique de dimension 4 et de stabilisateur principal discret. Alors σ est entièrement définie par son moment équivariant. En d'autres termes, l'application M définie en (2.1) est injective.

- Soit σ_1 et σ_2 deux éléments de $\Sigma^*[\zeta]$ où $\zeta = (X, R)$ tels que $M(\sigma_1) = M(\sigma_2) = \mathbf{L}$. En utilisant la définition du moment on obtient : $\sigma_1(\Omega_X) = \sigma_2(\Omega_X)$, c'est à dire : $\sigma_1 - \sigma_2$ s'annule sur les vecteurs tangents aux orbites. Sa restriction à la réunion des orbites principales X^* est l'image réciproque d'une deux-forme de la variété $X^*/SO(3)$. Or cette variété est de dimension 1 : $\sigma_1 - \sigma_2$ est donc nulle sur $X^*/SO(3)$. Par continuité $\sigma_1 - \sigma_2$ est nulle sur tout X .

Cette proposition, comme il est facile de le remarquer, s'étend à toutes les G -variétés symplectiques dont les orbites principales sont de codimension un. Ceci permet de considérer l'ensemble $\Sigma[\zeta]$ comme un sous-ensemble de $\text{Eq}(\Sigma, G^*)$, où G^* est le dual de l'algèbre de Lie G de G .

2.3 Lemme Soit (X, R, σ) une $SO(3)$ -variété symplectique de dimension 4 et de stabilisateur principal discret. Soit $L = M(\sigma)$ son moment équivariant, L ne s'annule pas sur les orbites de dimension 3.

- Grâce à la définition du moment équivariant et à la régularité de la forme symplectique σ on déduit que $\ker[D(L)(x)] = \text{Orth}_0[T_x(SO(3), x)]$ ce qui implique : $\dim\{\ker[D(L)(x)]\} = \dim X + \dim[\text{stab}(x)] - \dim[SO(3)]$, c'est à dire dans le cas où $\dim[\text{stab}(x)] = 0$ alors $\dim\{\ker[D(L)(x)]\} = 1$. Donc si $L(x) = 0$, L s'annule sur

toute l'orbite de x (propriété d'équivariance) et donc $\dim\{\ker[D(L)(x)]\} \geq 3$ ce qui est contradictoire : L ne s'annule pas sur les orbites de dimension 3. •

En anticipant sur le résultat final, nous voyons que cette proposition permet d'éliminer, dans l'étude des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4, toutes les $SO(3)$ -variétés possédant des orbites de type $SO(3)/K$ avec $K = \mathbf{T}, \mathbf{O}, \mathbf{I}, \mathbf{D}_{2m}$ $m > 1$, puisque le moment équivariant s'annule nécessairement sur ces orbites (on utilise : $\text{stab}(x) \subset \text{stab}(L(x))$).

2.4 Lemme Soit $\zeta = (X, R)$ une $SO(3)$ -variété de dimension 4 dont tous les stabilisateurs sont de type \mathbf{Z}_m . Soit σ un élément de $\Sigma[\zeta]$, L son moment équivariant et \mathbf{h}_c son petit hamiltonien canonique. Alors σ est symplectique si et seulement si \mathbf{h}_c , défini sur $X/SO(3)$, n'a pas de points critiques.

• soit $\sigma \in \Sigma^*[\zeta]$, \mathbf{H}_c son hamiltonien canonique, on a : $\sigma(\text{grad}_\sigma(\mathbf{H}_c)) = -d\mathbf{H}_c$. Puisque toutes les orbites sont principales $X/SO(3)$ est une variété. On peut alors écrire : $\sigma(\text{grad}_\sigma(\mathbf{H}_c)(x)) = -D(\mathbf{h}_c)(x) \circ D(\pi)(x)$. Où π est la projection canonique de X sur $X/SO(3)$ et $\rho = \pi(x)$. Alors : $D(\mathbf{h}_c) = 0 \circ \text{grad}(\mathbf{H}_c) = 0$ c'est à dire $L_X(x) = 0$ $L = L(x)$. Donc L appartient à l'algèbre de Lie de $\text{stab}(x)$ qui est nulle puisque $\text{stab}(x) = \mathbf{Z}_m$, donc $L = 0$ ce qui est interdit par le lemme 2.3. Donc si σ est symplectique $\text{grad}(\mathbf{h}_c)$ n'a pas de points critiques. Réciproquement supposons $D(\mathbf{h}_c)(x) \neq 0$. Soit $\delta x \in T_x(X)$ et $\delta x \in \ker(\sigma_x)$, on a alors : $\sigma(L_X(x), \delta x) = 0$ avec $L = L(x)$, c'est à dire $D(\mathbf{H}_c)(x)(\delta x) = 0$ où encore : $D(\mathbf{h}_c)(\rho) \circ D(\pi)(x)(\delta x) = 0$, $\forall \delta x \in \ker(\sigma_x)$. Donc on déduit $D(\pi)(x)(\delta x) = 0$ c'est à dire : $\exists \Omega \in \mathbf{R}^3$ tel que $\delta x = \Omega_X(x)$ et donc $\ker(\sigma_x) \subset T_x(SO(3).x)$. En utilisant l'équation du moment on obtient : $\langle \Omega, D(L)(x)(\delta'x) \rangle = 0$, $\forall \delta'x \in T_x(X) \Rightarrow \Omega \in \text{Orth}(\text{im}(D(L)(x)))$. Mais nous savons que $\dim[\ker(D(L)(x))] = 1$ (lemme 2.2 démonstration) et donc que $\dim[\text{im}(D(L)(x))] = 3$ d'où on déduit : $\text{Orth}(\text{im}(D(L)(x))) = \{0\}$ et donc $\Omega = 0$ c'est à dire $\ker(\sigma_x) = \{0\}$, c'est à dire : σ est symplectique. •

Terminons ce paragraphe de résultats sur la nature des stabilisateurs singuliers des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4 :

2.5 Lemme Soit (X, R, σ) une $SO(3)$ - variété symplectique de dimension 4, $SO(3)$ n'a pas d'orbite exceptionnelle. De plus si l'action de $SO(3)$ admet une orbite singulière celle-ci est nécessairement de type S^2 où $P(2, \mathbf{R}) = S^2/\mathbf{Z}_2$.

• Si le stabilisateur principal est de type S^2 la question est réglée par le théorème 1.14. Supposons donc que le stabilisateur principal soit de type \mathbf{Z}_m et que $SO(3)$ possède une orbite exceptionnelle, alors le stabilisateur singulier exceptionnel n'est pas de type $\mathbf{T}, \mathbf{O}, \mathbf{I}, \mathbf{D}_{2m}$ $m > 1$, d'après 2.2. En effet le moment s'annulerait sur ces orbites en raison de son équivariance. Il ne reste que le cas \mathbf{Z}_q (car $\mathbf{D}_2 = \mathbf{Z}_2$). En vertu du théorème sur l'existence de voisinages tubulaires [1] il existe un voisinage de cette orbite difféomorphe au produit fibré $SO(3) \times_{\mathbf{Z}_q} \mathbf{R}$ où \mathbf{Z}_q agit transitivement sur $S^0 \subset \mathbf{R}$, $S^0 = \mathbf{Z}_2$, et donc $q = 2m$, le lecteur peut vérifier que l'action de \mathbf{Z}_{2m} sur \mathbf{R} est donné par : $(\xi, k) \rightarrow (-1)^k \cdot \xi$, $\forall k \in \mathbf{Z}_{2m} = \{0, 1, \dots, 2m-1\}$. Puisque \mathbf{Z}_{2m} agit librement sur $SO(3) \times \mathbf{R}$, la structure symplectique définie sur $SO(3) \times_{\mathbf{Z}_{2m}} \mathbf{R}$ se relève sur $SO(3) \times \mathbf{R}$ par une structure symplectique (\mathbf{Z}_{2m} est discret) invariante par le produit direct $SO(3) \times \mathbf{Z}_{2m}$. Par raison d'équivariance le moment relevé sur $SO(3) \times \mathbf{R}$ s'écrit : $L^\#(g, \xi) = g.l(\xi)$, $\forall (g, \xi) \in SO(3) \times \mathbf{R}$ où l est une application C^∞ de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^3 . L'invariance de $L^\#$ par \mathbf{Z}_{2m} s'écrit alors : $l((-1)^k \xi) = g_k \cdot \xi$ où $g_k \in \mathbf{Z}_{2m}$ est inclus dans $SO(3)$. D'après la proposition 2.4 le petit hamiltonien canonique, qui s'écrit $\mathbf{h}_c = [\xi \rightarrow 1/2 \|l(\xi)\|^2]$, n'a pas de points critiques, c'est à dire $\mathbf{h}_c'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbf{R}$. Ce qui peut encore s'écrire : $\langle l(\xi), D(l)(\xi) \rangle \neq 0$. Or l'invariance de l par \mathbf{Z}_{2m} implique : $D(l)(-\xi) = -D(l \circ g_{2k+1})(\xi)$ car $g_{2k+1} \xi = -\xi$. D'où on déduit $\mathbf{h}_c'(-\xi) = -\mathbf{h}_c'(\xi)$ et donc $\mathbf{h}_c'(0) = 0$. Ceci est alors en contradiction avec la proposition 2.4. Ainsi le stabilisateur singulier n'est pas exceptionnel. Sa dimension est donc non nulle ce qui ne laisse que $SO(2)$, $O(2)$ ou $SO(3)$. Supposons alors qu'il soit de type $SO(3)$. D'après le théorème sur les voisinages tubulaires en codimension 1 [1], il existe un voisinage de cette orbite difféomorphe à \mathbf{R}^4 où

$SO(3)$ agit orthogonalement et transitivement sur la sphère unité, c'est à dire S^3 , or une telle action n'existe pas car S^3 serait difféomorphe au quotient $SO(3)/\mathbf{Z}_{2m}$, la simple connexité de S^3 interdit cette éventualité. Il ne reste donc au stabilisateur singulier que les seules possibilités $SO(2)$ ou $O(2)$.•

Extension symplectique d'une variété quantique

Nous donnons dans ce paragraphe une construction géométrique permettant d'obtenir une variété symplectique à partir d'une variété quantique (Y, ρ, ω) et d'une $SO(2)$ -variété symplectique (M, r, ε) . Rappelons la définition d'une variété quantique [11] :

2.6 Définition On appelle variété quantique tout triplet (Y, ρ, ω) où Y est une variété, ρ est une action libre et différentiable de $SO(2)$ sur Y et ω est une forme de connexion sur (Y, ρ) telle que la courbure $d\omega$ se projette sur le quotient $X = Y/SO(2)$ en une forme symplectique.

Notons $\mathbf{1}_Y$ le champ de vecteurs fondamental défini sur Y par l'action infinitésimale de $1 \in \mathbf{R} \approx so(2)$, algèbre de Lie de $SO(2)$. Les propriétés de (Y, ρ, ω) sont données par :

$$\forall y \in Y \quad \omega(\mathbf{1}_Y(y)) = 1 \ker(d\omega_y) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{1}_Y(y) \quad (2.7)$$

Conservons ces notations et notons $\rho \times r$ l'action produit de $SO(2)$ sur $Y \times M$:

$$\rho \times r(a, y, m) = (\rho(a)(y), r(a)(m)) \quad \forall (a, y, m) \in SO(2) \times Y \times M \quad (2.8)$$

Notons encore pr_Y et pr_M les projections naturelles de $Y \times M$ sur Y et M .

2.9 Lemme Soit (Y, ρ, ω) une variété quantique et (M, r, ε) une variété symplectique munie d'un moment λ borné (inférieurement ou supérieurement) sur M . Soit σ la deux-forme définie sur $Y \times M$ par : $\sigma = d[pr_M^*(\lambda).pr_Y^*(\omega)] - pr_M^*(\varepsilon)$. C'est une deux-forme pré-symplectique et son feuilletage caractéristique coïncide avec celui de $SO(2)$ agissant par $\rho \times r$. Ceci munit le produit fibré $Y \times_{SO(2)} M$ d'une structure symplectique indéxée par ω, ε et λ . De plus si Y possède une action différentiable d'un groupe de Lie G commutant avec celle de $SO(2)$ et invariant la forme de connexion ω , la variété $Y \times_{SO(2)} M$ hérite alors de cette action et devient une G -variété symplectique. Si Ψ désigne le moment de G sur Y , Le moment Ψ^\ddagger de G sur $Y \times_{SO(2)} M$ est la factorisation de l'application $\lambda\Psi$ définie naturellement sur $Y \times M$ par $\lambda\Psi(y, m) = \lambda(m)\Psi(y)$.

• Posons $\alpha \rightarrow \alpha_{Y \times M}$ l'action infinitésimale de $SO(2)$ sur $Y \times M$, $\alpha \in \mathbf{R} \approx so(2)$. On a : $\alpha_{Y \times M}(y, m) = (\alpha_Y(y), \alpha_M(m))$. L'équation du moment λ sur M s'écrit : $\varepsilon(\alpha_M(m))(\delta m) = -\alpha \cdot \delta \lambda \quad \forall m \in M \quad \forall \delta m \in T_m(M)$. Puisque λ est borné nous pourrions toujours supposer qu'il ne s'annule nulle part sur M , il suffit, en effet, d'ajuster la constante additive. La cohomologie d'algèbre de Lie de $so(2)$ étant nulle, le moment λ est invariant par $SO(2)$: $\forall a \in SO(2) : \lambda \circ r(a) = \lambda$. D'où on déduit : $\forall m \in M \quad d\lambda(\mathbf{1}_Y(m)) = 0$. Soient $x = (y, m) \in Y \times M$, $\delta x = (\delta y, \delta m)$ et $\delta'x = (\delta'y, \delta'm)$ deux vecteurs tangents en x à $Y \times M$. Les équations du noyau de σ s'écrivent : $\delta x \in \ker(\sigma_x) \Leftrightarrow d\lambda(\delta m)\omega(\delta'y) - d\lambda(\delta'm)\omega(\delta y) + \lambda(m)d\omega(\delta y)(\delta'y) - \varepsilon(\delta'y)(\delta y) = 0 \quad \forall \delta'x$. Ou encore :

$$\delta x \in \ker(\sigma_x) \Leftrightarrow \begin{cases} d\lambda(\delta'm) \cdot \omega(\delta y) + \varepsilon(\delta m)(\delta'm) = 0 \quad \forall \delta'm \in T_m(M) \\ d\lambda(\delta m) \cdot \omega(\delta y) + \lambda(m) \cdot d\omega(\delta y)(\delta'y) = 0 \quad \forall \delta'y \in T_y(Y) \end{cases}$$

De la première équation on tire : $\varepsilon(\delta m)(\delta'm) = -\omega(\delta y) \cdot d\lambda(\delta'm) \Rightarrow \varepsilon(\delta m) = -\omega(\delta y)\varepsilon^{-1}(d\lambda)$ or $\varepsilon^{-1}(d\lambda) = -\mathbf{1}_Y$ donc $\delta m = \omega(\delta y) \cdot \mathbf{1}_Y$. En reportant dans la deuxième équation et en utilisant $d\lambda(\mathbf{1}_Y(m)) = 0$, on obtient : $\lambda(m) \cdot d\omega(\delta y)(\delta'y) = 0 \quad \forall \delta'y$. Puisque par hypothèse λ ne s'annule nulle part on déduit $d\omega(\delta y)(\delta'y) = 0 \quad \forall \delta'y$, et donc $\delta y \in \ker(d\omega)$ c'est à dire (2.7) $\delta y = \alpha_Y(y)$ pour un certain $\alpha \in \mathbf{R}$. Ceci implique alors $\delta m = \omega(\alpha_Y(y))\mathbf{1}_M(m)$, c'est à dire $\delta m = \alpha \mathbf{1}_M(m) = \alpha_M(m)$ et donc : $\delta x \in \ker(\sigma_x) \Leftrightarrow \delta x = (\alpha_Y(y), \alpha_M(m)) = \alpha_Y$

$\times_M(x) \Leftrightarrow \ker(\sigma_x) = T_x(SO(2).x)$. Ainsi le quotient $Y \times_{SO(2)} M = Y \times M/SO(2)$ est égal au quotient de $Y \times M$ par le feuilletage caractéristique de σ , ceci le munit naturellement, par projection, d'une structure symplectique. Supposons maintenant que Y possède une action R d'un groupe de Lie G commutant avec celle de $SO(3)$ et invariant la forme de connexion ω . La variété $Y \times M$ est elle-même munie de l'action induite de G , agissant trivialement sur M . Puisque l'action de G commute avec celle de $SO(2)$ elle passe au quotient. Elle vérifie de plus : $\forall g \in G \ R(g)^*(\sigma) = d[\text{pr}_M^*(\lambda).\text{pr}_Y^*(R(g)^*\omega)] - \text{pr}_M^*(\epsilon) = \sigma$. Et donc la structure symplectique de $Y \times_{SO(2)} M$ est invariante par G . Soit Ψ le moment de G sur Y . Le moment Ψ^\sharp de G sur $Y \times M$ est alors solution de l'équation : $\sigma(Z_{Y \times M}) = -d\Psi.Z$ où Z est un élément de l'algèbre de Lie de G . Donc, puisque d'une part $Z_{Y \times M}(y,m) = (Z_Y(y),0)$ et de l'autre $\omega(Z_Y(y)) = \Psi.Z$ on a $\Psi^\sharp = \lambda\Psi$. •

La construction précédente sera appelée *extension de la variété symplectique* (X,α) où $X = Y/SO(2)$ et $\alpha = \text{pr}_*(d\omega)$, par la variété (M,ϵ) . Cette construction dépend explicitement du choix de la borne inférieure ou supérieure du moment λ . L'extension de variétés symplectiques est d'une certaine façon une généralisation du produit direct symplectique.

Supposons que $SO(2)$ agisse trivialement sur M on peut alors choisir $\lambda = 1$, le quotient $Y \times_{SO(2)} M$ est isomorphe au produit direct $X \times M$, la factorisation de σ sur $X \times M$ est alors la somme directe $\epsilon \oplus \alpha$.

Considérons l'autre cas particulier, celui pour lequel la fibration $SO(2)$ de Y est triviale, c'est à dire $Y \approx X \times SO(2)$. Toute forme de connexion sur Y s'écrit : $\omega(\delta x, \delta a) = a^{-1}\delta a + \overline{\omega}(\delta x)$ où $\overline{\omega}$ est le potentiel de α , $(\delta x, \delta a) \in T_{(x,a)}(Y)$. La structure symplectique définie sur $X \times M$ par la construction précédente s'écrit alors dans ce cas : $d[\text{pr}_M^*(\lambda).\text{pr}_X^*(\overline{\omega})] - \text{pr}_M^*(\epsilon)$. Cette forme symplectique ne coïncide généralement pas avec le produit direct de α et ϵ .

Remarquons encore que, grâce à sa commutativité, $SO(2)$ agit encore naturellement sur $Y \times_{SO(2)} M$:

$$(a, \text{orb}(y,m)) \rightarrow \text{orb}(y, r(a)(m)) \quad \forall (a,y,m) \in SO(2) \times Y \times M$$

Où orb désigne l'orbite par $SO(2)$. On peut vérifier que cette action est dynamique et qu'elle possède un moment donné par : $\lambda^\sharp(\text{orb}(y,m)) = \lambda(m)$. Ce moment ne s'annule donc jamais ce qui permet de recommencer la procédure autant de fois qu'on le désire. Si on recommence l'opération n fois, la variété obtenue est le quotient de $Y^n \times M$ par $SO(2)^n$, $SO(2)^n$ agissant naturellement sur Y^n et trivialement sur M . Cette variété est fibré sur X^n de fibre M . Remarquons enfin que les fibres de $Y \times_{SO(2)} M$ sur X sont non seulement difféomorphes à M mais aussi symplectomorphes, il s'ensuit que c'est une variété de Poisson dont toutes les feuilles sont symplectomorphes.

Achéons ce paragraphe par la description de la structure quantique canonique de $SO(3)$ au dessus de (S^2, Surf) qui sera largement utilisée par la suite. Ceci nous permettra aussi de fixer quelques notations. Nous identifierons S^2 à $SO(3)/SO(2, \mathbf{I}_1)$ où \mathbf{I}_1 est vecteur de coordonnées $(1,0,0)$. Nous noterons θ la forme de Cartan de $SO(3)$ à valeur dans \mathbf{R}^3 . Nous noterons ρ_c l'action de $SO(2, \mathbf{I}_1)$ sur $SO(3)$ et π la projection canonique de $SO(3)$ sur S^2 :

$$\begin{cases} \pi : SO(3) \rightarrow S^2 \text{ avec } \pi(g) = g\mathbf{I}_1 \\ \theta(\delta g) = j^{-1}(g^{-1}\delta g) \quad \forall g \in T_g(SO(3)) \\ \rho_c(a)(g) = ga^{-1} \quad \forall (a,g) \in SO(2, \mathbf{I}_1) \times SO(3) \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous noterons encore ω la forme de connexion définie par :

$$\omega(\delta g) = -\langle \mathbf{I}_1, \theta(\delta g) \rangle \quad \forall \delta g \in T_g(SO(3)) \quad (2.11)$$

L'élément de surface de S^2 est défini par :

$$\text{Surf}(\delta x, \delta'x) = \langle x, \delta x \times \delta'x \rangle \quad (2.12)$$

La variété $(SO(3), \rho_c, \omega)$ est une variété quantique : $d\omega = \pi^*(\text{Surf})$.

§3 SO(3)-VARIETES SYMPLECTIQUES NON-COMPACTES DE DIMENSIONS 4

Définitions et notations

Dans ce paragraphe nous donnons un ensemble de $SO(3)$ -variétés symplectisables, pour chacune d'entre elles nous calculons l'espace des structures symplectiques dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1. Nous montrerons au paragraphe 5 que cette liste est la liste complète des types de $SO(3)$ -variétés symplectiques non compactes de dimension 4 à stabilisateur principal discret. Nous utiliserons les notations suivantes :

♣ Nous appelons L_m la variété $[SO(3)/\mathbf{Z}_m] \times \mathbf{R}$, \mathbf{Z}_m plongé dans $SO(2; \mathbf{I}_1)$, agit sur $SO(3)$ par :

$$(g, g_k) \rightarrow gg^{-1}_k \quad \forall (g, g_k) \in SO(3) \times SO(2, \mathbf{I}_1) \quad (3.1)$$

$SO(3)/\mathbf{Z}_m$ admet un plongement naturel dans (Appendice), nous utiliserons les variables (x, y) de ce plongement pour décrire L_m . $SO(3)$ agit sur L_m : naturellement sur $SO(3)/\mathbf{Z}_m$ et trivialement sur \mathbf{R} .

♦ Nous appellerons F_m le produit fibré $[SO(3)/\mathbf{Z}_m] \times_{SO(2)} \mathbf{R}^2$ où $SO(2)$ agit de façon canonique sur \mathbf{R}^2 et, identifié à $SO(2, \mathbf{I}_1)$, agit sur $SO(3)/\mathbf{Z}_m$ par :

$$(a, cl_{\mathbf{Z}_m}(g)) \rightarrow cl_{\mathbf{Z}_m}(ga^{1/m}) \quad (3.2)$$

Où $cl_{\mathbf{Z}_m}(g)$ désigne l'orbite de g par \mathbf{Z}_m et $a^{1/m}$ est une racine m -ème de $a \in SO(2)$. F_m admet un plongement naturel dans $S^2 \times \mathbf{R}^3$ (Appendice), nous utiliserons les variables (x, v) du plongement pour décrire F_m . $SO(3)$ agit naturellement sur F_m , F_1 est naturellement identifiée à TS^2 .

♣ Nous identifierons la variété $TP(2, \mathbf{R})$ au quotient $TS^2/\mathbf{Z}_2 = F_1/\mathbf{Z}_2$ où l'élément non trivial de \mathbf{Z}_2 agit sur TS^2 par $(x, v) \rightarrow (-x, -v)$.

Précisons que \mathbf{R}_+ désigne la demie droite $[0, +\infty[$, muni de sa structure différentiable de variété à bord [10]. L'ensemble des fonctions différentiables sur \mathbf{R}_+ n'ayant pas de points critiques même au bord (i.e $f \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f' \neq 0$) sera noté :

$$C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})^* \quad (3.3)$$

Structures symplectiques invariantes sur L_m

Dans chacun des cas que nous traiterons, nous expliciterons l'ensemble $\text{Eq}(\zeta, \mathbf{R}^3)$, où ζ est la $SO(3)$ -variété en question, et nous calculerons le sous-ensemble $M[\zeta]$ que nous savons être en bijection avec $\Sigma^*[\zeta]$ (notations §2).

3.4 Proposition Les ensembles $\text{Eq}(L_1, \mathbf{R}^3)$ et $\text{Eq}(L_m, \mathbf{R}^3)$, $m > 1$, sont des modules de dimensions respectives 3 et 1 sur $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$:

$$\begin{cases} \text{Eq}(L_1, \mathbf{R}^3) = \{ \mathbf{L} : (x, y, E) \rightarrow f_1(E)x + f_2(E)y + f_3(E)x \times y \mid f_i \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \} \\ \text{Eq}(L_m, \mathbf{R}^3) = \{ \mathbf{L} : (x, y, E) \rightarrow f(E)x \mid f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \} \quad m > 1 \end{cases}$$

Les ensembles $M(L_m)$, $m>0$, sont donnés par : $M(L_m) = \{ \mathbf{L} \in \text{Eq}(L_m, \mathbf{R}^3) \mid \mathbf{h}_c \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})^* \}$, Où \mathbf{h}_c est le petit hamiltonien canonique défini par \mathbf{L} (notations §1).

• $L_1 = SO(3) \times \mathbf{R}$ les applications équivariantes s'écrivent : $\mathbf{L}(g, E) = g \cdot \mathbf{l}(E)$ avec $\mathbf{l} \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)$. $SO(3)$ identifié au fibré unitaire tangent de S^2 les fonctions f_i sont les composantes de \mathbf{l} . Pour $m>1$, L_1 est un revêtement de L_m . L'ensemble des application équivariante sur L_m peut être considéré comme le sous-ensemble des applications équivariantes sur L_1 invariantes sous l'action de \mathbf{Z}_m , ce qui implique : $\mathbf{l}(E) = g_k \mathbf{l}(E) \forall g_k \in \mathbf{Z}_m$. Et donc, puisque $m>1$: $\mathbf{l}(E) = f(E) \mathbf{I}_1$. Ceci permet d'écrire \mathbf{L} dans les variables (x, v) . Il suffit maintenant que l'ensemble $\Sigma[L_m]$ soit non vide, le reste est une conséquence de 2.4. Pour cela considérons $L \in \text{Eq}(L_1, \mathbf{R}^3)$ défini plus haut et considérons la un-forme ω définie sur L_1 par : $\omega(\delta g, \delta E) = \langle \mathbf{l}(E), \theta(\delta g) \rangle \forall (\delta g, \delta E) \in T_{(g, E)}(L_1)$. Où θ est définie en 2.10. Sa dérivée extérieure est par construction invariante et possède \mathbf{L} comme moment. On vérifie qu'elle passe au quotient $L_m = L_1/\mathbf{Z}_m$.

On notera, grâce à la construction précédente, que toute ces structures sont exactes, cc désignant la classe de cohomologie on a :

$$\forall \sigma \in \Sigma^*[L_m] : cc(\sigma) = 0 \quad (3.5)$$

Structures symplectiques invariantes sur F_m

Nous réaliserons le quotient $F_m/SO(3)$ comme la demie-droite \mathbf{R}_+ grâce à la projection π_m :

$$\begin{aligned} \pi_m : F_m &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x, v) &\rightarrow E = \frac{1}{2} \|v\|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Où $y = (x, v)$ désignent encore les variables du plongement $F_m \rightarrow S^2 \times \mathbf{R}^3$ (Appendice). Précisons, pour ce qui va suivre, que les applications $\Phi_m \in C^\infty(SO(3))$ et $\mathbf{f}_m \in C^\infty(S^2)$ sont définies dans l'appendice, σ étant la forme de connexion définie par la formule 2.11, nous noterons γ_m la un forme définie sur S^2 par :

$$\gamma_m \in \Lambda^1(S^2) \quad \pi^*(\gamma_m) = \sigma - \frac{1}{m} \Phi_m^*(\sigma) \quad (3.7)$$

Où $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$, est la projection standard et $\Phi_m : SO(3) \rightarrow SO(3)$ est définie dans l'appendice.

3.8 Proposition Les ensembles $\text{Eq}(F_1, \mathbf{R}^3)$ et $\text{Eq}(F_m, \mathbf{R}^3)$, $m>1$, sont des modules de dimensions respectives 3 et 1 sur $C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$:

$$\begin{cases} \text{Eq}(F_1, \mathbf{R}^3) = \{ \mathbf{L} : (y) \rightarrow f_1(E)x + f_2(E)v + f_3(E)x \times v \mid E = \frac{1}{2} \|v\|^2 \text{ et } f_i \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \} \\ \text{Eq}(F_m, \mathbf{R}^3) = \{ \mathbf{L} : (y) \rightarrow f(E)x \mid f \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \} \quad m>1 \end{cases}$$

Les ensembles $M(F_m)$, $m>0$, sont donnés par : $M(F_m) = \{ \mathbf{L} \in \text{Eq}(F_m, \mathbf{R}^3) \mid \mathbf{h}_c \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})^* \}$. Où \mathbf{h}_c est le petit hamiltonien canonique défini par \mathbf{L} (notations §1 et 3.3). L'application M est définie par les formules :

$$\begin{cases} \sigma \in \Sigma^*[F_1] , \mathbf{L} = M(\sigma) \Leftrightarrow \sigma = dW_1 - f_1(0) \cdot [\pi_{S^2}]^*(\text{Surf}) \quad m = 1 \\ \sigma \in \Sigma^*[F_m] , \mathbf{L} = M(\sigma) \Leftrightarrow \sigma = dW_m - f(0) \cdot [\pi_{S^2}]^*(\text{Surf}) \quad m>1 \end{cases}$$

Où π_{S^2} est la projection naturelle $F_m \rightarrow S^2$ et W_m les un-formes définies par :

$$\begin{cases} W_1(dy) = \frac{1}{2E} [f_1(E) - f_1(0)] \langle x, v \times dv \rangle + f_2(E) \langle v, x \times dx \rangle + f_3(E) \langle v, \delta x \rangle \\ W_m(\delta y) = \frac{1}{2mE} [f_1(E) - f_1(0)] \langle \mathbf{f}_m(x), v \times \delta v \rangle + [f(0) - f(E)] \gamma_m(\delta x) m \end{cases}$$

Où $\delta y = (\delta x, \delta v) \in T_y(F_m)$. La forme σ peut encore s'écrire, respectivement¹ pour $m = 1$ et $m > 1$:

$$\begin{cases} \sigma(\delta y)(dy) = -f_1(E) \langle x, \delta x \times dx \rangle + f_1'(E) \langle x, \delta v \times dv \rangle + f_2'(E) \langle v, \delta v \times dv \rangle \\ \quad - [2Ef_2'(E) + f_2(E)] \langle x, \delta v \times dx - dv \times \delta x \rangle - f_3(E) [\langle \delta x, dv \rangle - \langle dx, \delta v \rangle] \langle x \times v, \delta v \times dv \rangle \\ \sigma(\delta y)(dy) = -f(E) \langle x, \delta x \times dx \rangle + f'(E) \left[\left(\frac{1}{m} \langle \mathbf{f}_m(x), \delta v \times dv \rangle + \langle v, dv \rangle \gamma_m(\delta x) - \langle v, \delta v \rangle \gamma_m(dx) \right) \right] \end{cases}$$

La classe de cohomologie de σ est caractérisée par : $\mathbf{h}_c(0) = \frac{1}{2} \|\mathbf{L}(x, 0)\|^2$. Elle n'est jamais nulle pour $\sigma \in \Sigma^*[F_m]$ quand $m > 1$.

- En raison de la longueur de la démonstration et de son caractère technique renvoyons le lecteur à [4]•

Structures symplectiques invariantes sur $TP(2, \mathbf{R})$

La variété $P(2, \mathbf{R})$ est le quotient de S^2 par \mathbf{Z}_2 agissant par transformation antipodale. Le tangent à $P(2, \mathbf{R})$ peut être indifféremment considéré comme le quotient de TS^2 par \mathbf{Z}_2 où -1 agit par :

$$[(x, v) \rightarrow (x, -v)] \text{ ou bien } [(x, v) \rightarrow (-x, -v)] \quad \forall (x, v) \in TS^2 \quad (3.9)$$

Il suffit pour s'en assurer de considérer le difféomorphisme de TS^2 défini par :

$$[(x, v) \rightarrow (x, \exp(\frac{\pi}{2} j(x))v)]$$

qui commute avec l'action de $SO(3)$. TS^2 étant un revêtement de $P(2, \mathbf{R})$ (son revêtement universel), les ensembles $Eq(TP(2, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$, $\Sigma[TP(2, \mathbf{R})]$, $\Sigma^*[TP(2, \mathbf{R})]$ et $M[TP(2, \mathbf{R})]$ sont identifiés au sous-ensemble des éléments de $Eq(TS^2, \mathbf{R}^3)$, $\Sigma[TS^2]$, $\Sigma^*[TS^2]$, $M[TS^2]$ qui sont invariants par l'action de \mathbf{Z}_2 . Nous noterons $[x, v] \in TP(2, \mathbf{R})$ la classe de $(x, v) \in TS^2$ suivant \mathbf{Z}_2 et nous donnons la proposition suivante sans démonstration étant donné son caractère évident en vertu de ce qui précède :

3.10 Proposition : L'ensemble $Eq(TP(2, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$ est un module de dimension 1 sur $C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$:

$$Eq(TP(2, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3) = \{ \mathbf{L} : [x, v] \rightarrow f(E)x \times v \mid E = \frac{1}{2} \|v\|^2, f \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \}$$

L'ensemble $M[TP(2, \mathbf{R})]$ est défini par : $M[TP(2, \mathbf{R})] = \{ \mathbf{L} \in Eq(TP(2, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3) \mid \mathbf{h}_c \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})^* \}$. L'application M est définie par : $\mathbf{L} \in Eq(TP(2, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$ $\mathbf{L} = M(\sigma)$ $\sigma = dW$, avec $W(\delta[x, v]) = f(E) \langle v, \delta x \rangle$. Où $\delta[x, v] \in T_{[x, v]}(TP(2, \mathbf{R}))$. La classe de cohomologie de σ est nulle.

Remarquons que W est simplement la forme canonique de cotangent multipliée par la fonction f .

¹ Le signe ' (prime) indique la fonction dérivée, ici δx et dx sont des vecteurs tangents en x .

§4 $SO(3)$ -VARIETES SYMPLECTIQUES COMPACTES DE DIMENSIONS 4

Définitions et notations

Dans ce paragraphe nous donnons un ensemble de $SO(3)$ -variétés symplectisables, pour chacune d'entre elles nous calculons l'espace des structures symplectiques dont les caractéristiques sont données dans le tableau 2. Nous montrerons dans un prochain paragraphe que cette liste est la liste complète des types de $SO(3)$ -variétés symplectiques compactes de dimension 4 à stabilisateur principal discret. Nous utiliserons les notations suivantes :

a) Nous noterons r_{S_m} l'action de $SO(3)$ sur définie par le cocycle Ψ_m (voir Appendice) :

$$\begin{cases} \Psi_m \in C^\infty(SO(3) \times S^2, S^2), \forall (A, B, x) \in SO(3) \times SO(3) \times S^2 \\ \Psi_m(AB, x) = \Psi_m(A, Bx)\Psi_m(B, x) \\ r_{S_m}(A)(x, y) = (Ax, \Psi_m(A, x).y) \quad \forall (A, x, y) \in SO(3) \times S^2 \times S^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Nous appellerons S_m la variété $S^2 \times S^2$ munie de cette action. Pour $m = 1$ cette action coïncide avec l'action diagonale.

b) $P(2, \mathbf{C})$ est identifié au quotient $S^5/SO(2)$, nous noterons indifféremment $z = x+iy$ où $z = (x, y)$ les éléments de $S^5 \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ où $(x, y) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. Nous noterons $[z] = [x, y] \in P(2, \mathbf{C})$ l'orbite de $z = (x, y)$ par $SO(2)$. Nous noterons $r_{\mathbf{C}P}$ l'action canonique de $SO(3)$ sur $P(2, \mathbf{C})$ définie par :

$$r_{\mathbf{C}P}(A)([x, y]) = [Ax, Ay] \quad \forall (A, [x, y]) \in SO(3) \times P(2, \mathbf{C}) \quad (4.3)$$

Précisons encore que J et J_o désigneront les intervalles $[-1, +1]$ et $[0, 1]$ munis de leur structure différentiable standard de variété à bord. Les ensembles de fonctions différentiables sur J et J_o n'ayant pas de points critiques seront notés

$$C^\infty(J, \mathbf{R})^* \text{ et } C^\infty(J_o, \mathbf{R})^* \quad (4.4)$$

Structures symplectiques invariantes sur S_m

Dans chacun des cas que nous traiterons nous expliciterons l'ensemble $Eq(\Omega, \mathbf{R}^3)$, où Ω est la $SO(3)$ -variété en question, et nous calculerons le sous-ensemble $M[\Omega]$ que nous savons être en bijection avec $\Sigma^*[\zeta]$ (notations §2).

4.5 Proposition Les ensembles $Eq(S_1, \mathbf{R}^3)$ et $Eq(S_m, \mathbf{R}^3)$, $m > 1$, sont des modules de dimensions respectives 3 et 1 sur $C^\infty(J, \mathbf{R})$:

$$\begin{cases} Eq(S_1, \mathbf{R}^3) = \{ L : (x, y) \rightarrow f_1(\rho)x + f_2(\rho)y + f_3(\rho)x \times y \mid \rho = \langle x, y \rangle, f_i \in C^\infty(J, \mathbf{R}) \} \\ Eq(S_m, \mathbf{R}^3) = \{ L : (x, y) \rightarrow f(\rho_m)x \mid \rho_m = \langle \mathbf{f}_m(x), y \rangle, f \in C^\infty(J, \mathbf{R}) \} \quad m > 1 \end{cases}$$

Où \mathbf{f}_m est défini dans l'appendice. Les ensembles $M(S_m)$, $m > 0$, sont donnés par :

$$M(S_m) = \{ L \in Eq(S_m, \mathbf{R}^3) \mid \mathbf{h}_c \in C^\infty(S_m, \mathbf{R})^* \}$$

Où \mathbf{h}_c est le petit hamiltonien canonique défini par L (cf.§1). L'application M , respectivement pour $m = 1$ et $m > 1$, est définie par les formules¹

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\delta z)(dz) = -(\rho f_1 + f_2)' \text{Surf}(\delta x, dx) - (\rho f_2 + f_1)' \text{Surf}(\delta y, dy) + \langle f_1'(\rho)x + f_2'(\rho)y, \delta x \times dy - dx \times \delta y \rangle \\ \quad + dW(\delta z; dz) \\ \sigma(\delta z)(dz) = -\{f(\rho_m) \text{Surf} + [\frac{1}{m} \rho_m f'(\rho_m)] \mathbf{f}_m^* (\text{Surf})\}(\delta z; dz) \\ \quad + [f'(\rho_m)/m] \langle \mathbf{f}_m(x), \delta[\mathbf{f}_m(x)] \times dy - d[\mathbf{f}_m(x)] \times \delta y \rangle + f'(\rho_m) \{d[\rho_m] \gamma_m(\delta x) - \delta[\rho_m] \gamma_m(dx)\} \end{array} \right.$$

Où $z = (x, y) \in \gamma_m$ est définie au §3, W est la 1-forme définie sur par : $W(\delta z) = \frac{1}{2} f_3(\rho) [\langle y, \delta x \rangle - \langle x, \delta y \rangle]$.

• Considérons d'abord le cas $m = 1$ et $L \in \text{Eq}(S_1, \mathbf{R}^3)$. Les images réciproques de L par les tubes invariants ϕ_+^1 et ϕ_-^1 (voir Appendice) sont les applications L_+ et L_- appartenant à $\text{Eq}(F_m, \mathbf{R}^3)$ qui s'écrivent, en vertu de la proposition 2.3 :

$$L_{\pm}(x, v) = f_1^{\pm}(E_{\pm})x + f_2^{\pm}(E_{\pm})v + f_3^{\pm}(E_{\pm})x \times v \text{ avec } E_{+} = (1+\rho)/2(1-\rho) \text{ et } E_{-} = (1-\rho)/2(1+\rho)$$

Les f_i sont définis par : $f_1(\rho) = f_1^{\pm}(E_{\pm}) \pm (1/2 - E_{\pm}) f_2^{\pm}(\rho)$, $f_2(\rho) = (1/2 + E_{\pm}) f_2^{\pm}(\rho)$, $f_3(\rho) = (1/2 + E_{\pm}) f_3^{\pm}(\rho)$. Les f_i^{\pm} étant des éléments de $C^{\infty}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et les applications $[E_{\pm} \rightarrow \rho]$ étant des difféomorphismes de \mathbf{R}_+ sur les intervalles $[-1, +1[$ et $] -1, +1]$ les fonctions f_i sont des éléments de $C^{\infty}(J, \mathbf{R})$. Le cas $m > 1$ se traite de façon analogue. D'autre part il est commode d'utiliser les voisinages tubulaires $S^2 \times S^2 - O^{\pm}$ isomorphes à F_m (Appendice). les conditions pour que $L \in \text{Eq}(S_m, \mathbf{R}^3)$ définisse une forme symplectique s'écrivent dans chacun de ces voisinages $\mathbf{h}_c^{\pm} \in C^{\infty}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})^*$, pour les mêmes raisons que précédemment ceci est équivalent à $\mathbf{h}_c \in C^{\infty}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})^* \bullet$

Structures symplectiques invariantes sur $P(2, C)$

4.6 Proposition : L'ensemble $\text{Eq}(P(2, C), \mathbf{R}^3)$ est un module de dimension 1 sur $C^{\infty}(J_0, \mathbf{R})$:

$$\text{Eq}(P(2, C), \mathbf{R}^3) = \{L : [x, v] \rightarrow f(e)x \times v \mid e = 1 - 4\|x \times y\|^2, f \in C^{\infty}(J_0, \mathbf{R})\}$$

L'ensemble $M[P(2, C)]$ est défini par $M[P(2, C)] = \{L \in \text{Eq}(P(2, C), \mathbf{R}^3) \mid \mathbf{h}_c \in C^{\infty}(J_0, \mathbf{R})^*\}$. L'application $M : L \rightarrow \sigma$ est définie par : $\sigma(\delta z, dz) = 1/2 \{d[f \cdot \omega_P]\}(\delta z, dz) - f'(e) \text{Surf}_{\mathbf{R}^2}(\delta \xi, d\xi)$. Où ω_P est la forme de connexion sur S_5 : $\omega_P(\delta z) = -i \langle z, \delta z \rangle$ avec $\delta z \in T_z(S_5)$ et ξ est le vecteur de \mathbf{R}^2 de coordonnées $\|x\|^2 - \|y\|^2$ et $2-\langle x, y \rangle$.

• Il suffit de vérifier que l'expression de σ définit bien une deux forme fermée sur S^5 invariante par $SO(3) \times S O(2)$ de moment $L(x, y) = f(e)x \times y$ et dont le feuilletage caractéristique contient le feuilletage défini par l'action de $SO(2)$. On exprime ensuite la condition de régularité de l'image de σ sur $P(2, C)$ en imposant que son feuilletage caractéristique coïncide avec celui de $SO(2)$. Soulignons seulement que les premières vérifications utilisent le fait que la factorisation de l'action de $SO(2)$ sur $D^2 = S^5/SO(3)$ est donné par $(a, \xi) \rightarrow a^2 \xi$ (avec les définitions de ξ de la proposition). Pour la condition de régularité il suffit de les calculer sur les orbites singulières de $SO(3)$ c'est à dire O_{\times} et O_{\perp} (voir Appendice) ce qui n'offre pas plus de difficultés que dans la proposition 3.10 •

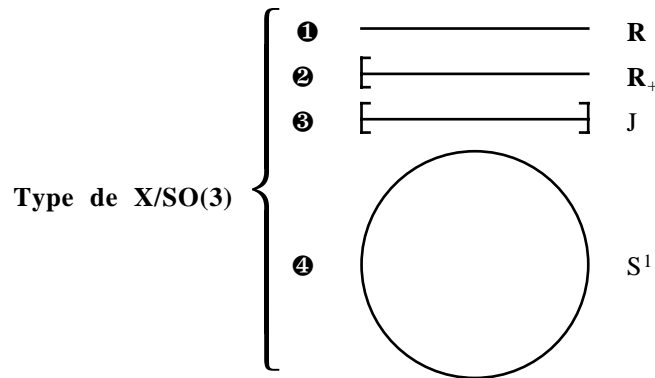
¹ Le signe ' (prime) désigne la dérivée, ici δz et dz désignent des vecteurs tangents en z .

§5 CLASSIFICATION DES $SO(3)$ -STRUCTURES SYMPLECTIQUES EN DIMENSION 4

Caractère exhaustif des tableaux 1 et 2

Nous allons montrer tout d'abord que les seules $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4 sont celles décrites dans les paragraphes précédents, c'est à dire $L_m, F_m, TP(2, \mathbf{R}), S_m$ et $P(2, \mathbf{C})$. pour cela nous utiliserons certains résultats de la théorie des groupes compacts de transformation. Les théorèmes que nous utiliserons sont empruntés à l'ouvrage de G.E. Bredon [1].

Considérons une $SO(3)$ -variété $\zeta = (X, r)$ de dimension 4 et de stabilisateur principal discret Z_m , son espace des orbites est une variété topologique avec ou sans bord de dimension 1, codimension de l'orbite principale. X étant supposé connexe l'espace des orbites est alors d'un des types suivant :



Dans les cas 1 et 2 X est non compacte, dans les cas 3 et 4 X est compacte. Dans les cas 1 et 4 X est une variété fibrée (trivialité locale) de fibre type $SO(3)/Z_m$ sur $X/SO(3)$, dans le cas 2 l'action de $SO(3)$ possède une orbite singulière : l'image réciproque du point de bord et dans le cas 3 l'action de $SO(3)$ possède deux orbites singulières : les images réciproques des points de bord.

Bien que traité dans le paragraphe 1 en toute généralité, pour donner son aspect complet au théorème de classification, nous incluerons dans son énoncé le cas du stabilisateur principal $SO(2)$. Nous utiliserons les notations des paragraphes précédents.

5.1 Théorème : Toute $SO(3)$ -variété différentielle de dimension 4 symplectisable (pouvant être munie d'une structure symplectique invariante), est isomorphe à une des $SO(3)$ -variétés (munies de leur structure différentielle standard) suivantes : $S^2 \times M$ où $SO(3)$ agit naturellement sur S^2 et trivialement sur M (M étant une variété symplectisable $TP(2, \mathbf{R}), L_m, F_m, S^2 \times S^2$ muni des différentes actions r_{S_m} et $P(2, \mathbf{C})$).

• Soit $\zeta = (X, r)$ une $SO(3)$ -variété différentielle de dimension 4 à stabilisateur principal discret, c'est à dire de type Z_m . Considérons d'abord sa structure topologique sous-jacente. Supposons X non compacte, en vertu du théorème sur les voisinages tubulaires [1], X est isomorphe à $[SO(3)/Z_m] \times \mathbf{R}$ avec action triviale sur \mathbf{R} , c'est à dire $\zeta = L_m$ ou X est isomorphe à un fibré vectoriel de type $SO(3) \times_K \mathbf{R}^n$ ou K est un sous-groupe de Lie de $SO(3)$ agissant orthogonalement sur la sphère unité S^{n-1} de \mathbf{R}^n , K est le stabilisateur singulier et vérifie $Z_m \subset K$. La dimension de K vaut alors $n-1$, on a donc à priori 3 possibilités : 1) $\dim K = 0$ $n = 1$ ou 2) $\dim K = 1$ $n = 2$, ou 3) $\dim K = 3$ $n = 4$. Grâce à la proposition 2.5 le premier et le troisième cas sont interdits. Il reste donc $K = SO(2)$ ou $K = O(2)$. Ainsi : $X \approx SO(3) \times_{SO(2)} \mathbf{R}^2$ ou $X \approx SO(3) \times_{O(2)} \mathbf{R}^2$. Le lecteur vérifiera que les seules actions orthogonales de $SO(2)$ transitives sur la sphère unité sont équivalentes aux actions standards : $(a, \xi) \rightarrow a^m \cdot \xi$ ($a, \xi \in SO(2) \times \mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$). Dans ce cas $X \approx F_m$ est symplectisable. La seule action de $O(2)$ sur \mathbf{R}^2 transitive sur la sphère unité est équivalente à l'action standard :

$$((a,\varepsilon),\xi) \rightarrow aM^{(1-\varepsilon)/2} \cdot \xi \quad (a,\varepsilon) \in O(2) \quad \xi \in \mathbf{R}^2 \text{ avec } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La variété X est alors équivalente à $[\mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} \mathbf{R}^2] / \mathbf{Z}_2$ c'est à dire $\mathrm{TS}^2 / \mathbf{Z}_2$ où l'élément -1 de \mathbf{Z}_2 agit par $(x;v) \rightarrow (-x,-v)$, et donc $X \approx \mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$. Supposons X compacte, il existe deux cas [1]. Dans le premier X est isomorphe à l'union des cylindres des applications : $G/K_i \rightarrow G/\mathbf{Z}_m$ $i = 1, 2$, les K_i sont les stabilisateurs singuliers de l'action de $\mathrm{SO}(3)$, l'espace $X/\mathrm{SO}(3)$ est alors du type $J = [-1, +1]$, les images réciproques des intervalles $[-1, +1]$ et $] -1, +1[$ sont des $\mathrm{SO}(3)$ -variété symplectisables et donc d'un des types F_m ou $\mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$. La compatibilité des stabilisateurs principaux indique que X est d'un des types suivants : $F_m \cup F_m$ ou $F_2 \cup \mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$ ou encore $\mathrm{TP}(2, \mathbf{R}) \cup \mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$. On peut établir directement par le calcul que les attachements $F_m \cup F_m$ et $F_2 \cup \mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$ sont isomorphes aux $\mathrm{SO}(3)$ -variétés S_m et $P(2, \mathbf{C})$. On peut néanmoins obtenir ces résultats sans calcul : nous savons que $S_m = (S^2 \times S^2, r_{S_m})$ répond à la décomposition en type d'orbites de $F_m \cup F_m$ et $P(2, \mathbf{C})$ à celle de $F_2 \cup \mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$ et que chaque décomposition en type d'orbites correspond à une $\mathrm{SO}(3)$ -variété topologique unique, d'où on déduit l'équivalence de ces variétés. Puisque $S_m = (S^2 \times S^2, r_{S_m})$ et $P(2, \mathbf{C})$ sont symplectisables il ne reste donc à étudier que le cas $\mathrm{TP}(2, \mathbf{R}) \cup \mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$: si une telle variété était symplectisable le petit hamiltonien canonique (cf. §2) de la structure symplectique s'annulerait sur le bord de $X/\mathrm{SO}(3) \approx] -1, +1[$ par raison d'équivariance du moment de $\mathrm{SO}(3)$. Il atteindrait donc son maximum sur l'intervalle $] -1, +1[$ qui serait alors un point critique, or d'après 2.4 le petit hamiltonien canonique n'a pas de points critiques. Donc $\mathrm{TP}(2, \mathbf{R}) \cup \mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$ n'est pas symplectisable. Dans le deuxième cas l'espace des orbites de $\mathrm{SO}(3)$ est isomorphe au cercle S^1 , toute fonction continue atteint son maximum et donc pour la même raison que précédemment les $\mathrm{SO}(3)$ -variétés de ce type sont non-symplectisables. Ainsi la structure topologique des $\mathrm{SO}(3)$ -variétés symplectisables est bien seulement d'un des types annoncé. Il reste à préciser la structure différentielle. Remarquons d'abord que les $\mathrm{SO}(3)$ -variétés topologiques F_m , $\mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$, S_m et $P(2, \mathbf{C})$ sont des $\mathrm{SO}(3)$ -variétés topologiques spéciales au sens de Janich [1], c'est à dire qu'il y a au plus deux types d'orbites dans le voisinage de chaque orbite et que pour tout voisinage tubulaire $\mathrm{SO}(3) \times_{\mathbf{K}} \mathbf{R}^k$ d'une orbite singulière $P \approx \mathrm{SO}(3)/\mathbf{K}$, \mathbf{K} agit transitivement sur la sphère unité du complément orthogonal à l'ensemble des points invariants par \mathbf{K} . Donc pour chaque structure C^∞ des espaces $X/\mathrm{SO}(3)$ où X est une des variétés en question, il existe une structure différentielle unique sur X pour laquelle $\mathrm{SO}(3)$ agisse différemmentiellement et qui induise la structure différentielle donnée sur $X/\mathrm{SO}(3)$. Or dans le cas qui nous intéresse la variété des orbites qui est du type \mathbf{R} , \mathbf{R}_+ ou bien J ne possède qu'une structure différentielle de variété à bord ([10] III.5.3) compatible avec la topologie standard de ces espaces. Donc la structure différentielle des $\mathrm{SO}(3)$ -variétés F_m , $\mathrm{TP}(2, \mathbf{R})$, S_m et $P(2, \mathbf{C})$ est unique c'est bien entendu leur structure canonique. •

Remarquons que si dans le cas non compact, la structure topologique de la variété détermine de façon unique l'action de $\mathrm{SO}(3)$, il n'en est plus de même dans le cas compact où la variété $S^2 \times S^2$ possède une infinité d'actions de $\mathrm{SO}(3)$ inéquivalentes, indexées par les entiers, chacune d'entre elles étant symplectisable.

Principes de classification

Nous avons affirmé dans la première partie qu'un système dynamique massif isolé galiléen est caractérisé par un quadruplet $(X, \mathbf{R}, \sigma, \mathbf{H})$. Partant de ce principe, un tel quadruplet qui décrit la structure interne du système peut être appelé *modèle de structure interne* ou plus simplement *modèle*. Etant donné deux modèles $\alpha = (X, \mathbf{R}, \sigma, \mathbf{H})$ et $\alpha^* = (X^*, \mathbf{R}^*, \sigma^*, \mathbf{H}^*)$ un *morphisme de modèle* est une application différentiable σ de X à X^* telle que $\varphi \in C^\infty(X, X^*)$ et :

$$\{ \varphi \circ \mathbf{R}(A) = \mathbf{R}^*(A) \circ \sigma \quad \forall A \in \mathrm{SO}(3), \varphi \circ \mathbf{R}(A) = \mathbf{R}^*(A) \circ \sigma \quad \forall A \in \mathrm{SO}(3), \varphi^*(\sigma^*) = \sigma \quad (5.2)$$

Il existe alors sur l'espace des modèles une relation d'équivalence naturelle : deux objets α et α^* sont équivalents s'ils sont reliés par un isomorphisme de modèle, c'est à dire, $\varphi \in \mathrm{Diff}(X, X^*)$ tel que 5.2, nous

dirons alors qu'ils ont *même type*. Deux modèles de même type ont nécessairement même dimension, nous noterons M_{2n} l'espace des modèles de dimension $2n$ nous les appellerons *modèles à n degrés de liberté interne*. Le type d'un modèle peut donc être interprété comme la *structure dynamique interne* qu'il décrit. La classification des structures dynamiques internes consiste alors à choisir un représentant de chaque type de modèle c'est à dire un modèle de chaque structure dynamique interne différente. Cette classification est l'expression d'un principe général de la physique que l'on rencontre dans divers domaines sous les noms de principe de relativité générale, principe d'indifférence matérielle ou encore *principe de covariance générale*. Il exprime l'idée simple que la description d'un phénomène physique doit être indépendant du choix des coordonnées servant à repérer les diverses variables du phénomène.

La classification des structures dynamiques internes s'effectue en deux étapes. Considérons l'application naturelle τ qui à un type de structure interne associe le type de $SO(3)$ -variété symplectique sous-jacente :

$$\alpha = (X, R, \sigma, H) \quad \Sigma = (X, R, \sigma) \quad \tau : \text{type}(\alpha) \rightarrow \text{type}(\Sigma) \quad (5.3)$$

L'image réciproque de $\text{type}(\Sigma)$ par τ est égal au quotient de l'ensemble $\text{Ham}(\Sigma)$ des hamiltoniens de Σ (fonctions réelles définies sur X invariantes par $SO(3)$ et complètes relativement à σ (cf. §1) par le groupe $\text{Aut}(\Sigma)$ des automorphismes de Σ . $\text{Aut}(\Sigma)$ n'est autre que l'intersection du groupe $\text{Aut}(\zeta)$ des automorphismes de la $SO(3)$ -structure $\zeta = (X, r)$ avec le groupe $\text{Symp}(\sigma)$ des symplectomorphismes de σ , ce que nous pouvons résumer par les formules :

$$\begin{cases} \tau^{-1}(\text{type}(\Sigma)) = \text{Ham}(\Sigma) / [\text{Aut}(\zeta) \cap \text{Symp}(\sigma)] \\ \text{Aut}(\zeta) = \{ \Psi \in \text{Diff}(X) \mid R(A) \circ \Psi = \Psi \circ R(A) \quad \forall A \in SO(3) \} \\ \text{Symp}(\sigma) = \{ \Psi \in \text{Diff}(X) \mid \Psi^*(\sigma) = \sigma \} \end{cases} \quad (5.4)$$

On est donc amené à la classification des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension donnée c'est à dire à calculer pour chaque représentant d'un type différent de $SO(3)$ -variété symplectisable $\zeta = (X, r)$, l'espace quotient $\Sigma^*[\zeta]/\text{Aut}(\zeta)$ (notations §2). Nous noterons encore que dans le cas particulier qui nous intéresse ici, c'est à dire Les stuctures internes à deux degrés de liberté, nous pouvons séparer notre étude en deux cas : celui du stabilisateur principal de type $SO(2)$ et celui du stabilisateur principal discret. Le premier cas revient à calculer le quotient de l'ensemble des volumes d'une variété de dimension deux par le groupe des difféomorphismes de cette variété. Ce problème a été résolu dans le cas compact [2] chaque volume est caractérisé par sa classe de cohomologie, le cas non compact est à notre connaissance non-résolu, c'est un problème que nous ne considérerons pas. Nous nous limiterons au cas du stabilisateur principal discret. Nous avons alors un premier résultat, en utilisant les notations précédentes :

5.5 Théorème Si $\Sigma = (X, R, \sigma)$ est une $SO(3)$ -variété symplectique de dimension 4 à stabilisateur principal discret, le groupe $\text{Aut}(\zeta) \cap \text{Symp}(\sigma)$, où $\zeta = (X, r)$ est la $SO(3)$ variété sous-jacente, agit trivialement sur $\text{Ham}(\Sigma) : \tau^{-1}(\text{type}(\Sigma)) = \text{Ham}(\Sigma)$.

- Le groupe $\text{Aut}(\zeta)$ se projette sur un sous-groupe de $\text{Diff}(X/SO(3))$ muni de la structure de variété (avec ou sans bord) quotient. L'ensemble $\text{Ham}(\Sigma)$ se projette sur un ensemble de $C^\infty(X/SO(3), \mathbf{R})$ où $\text{Diff}(X/SO(3))$ agit par image réciproque. Etant donné un élément Ψ de $\text{Aut}(\sigma)$ et \mathbf{L} le moment équivariant de σ , Le moment $\Psi^*(\sigma)$ est égal à $\mathbf{L} \circ \Psi$ et le petit hamiltonien canonique est égal à $\mathbf{h}_c \circ \psi$ où \mathbf{h}_c est le petit hamiltonien canonique de \mathbf{L} et ψ est la pojection de Ψ sur $X/SO(3)$. Donc si Ψ est un symplectomorphisme on a $\mathbf{L} \circ \Psi = \Psi$ et $\mathbf{h}_c \circ \psi = \mathbf{h}_c$ or puisque \mathbf{h}_c est strictement monotone (2.4) on déduit que $\psi = \mathbf{1}_{X/SO(3)}$ et donc le groupe $\text{Aut}(\zeta) \cap \text{Symp}(\sigma)$ agit trivialement sur $\text{Ham}(\Sigma)$.

Nous allons introduire maintenant la notion de prolongement de $SO(3)$ -variété symplectique qui appliquée à la dimension 4 va nous permettre de réduire les cas d'étude. Le principe est le suivant : tout ouvert saturé pour l'action de $SO(3)$ d'une $SO(3)$ -variété symplectique est une $SO(3)$ -variété symplectique, les renseignements concernant l'ouvert sont donnés par la variété en question elle-même. Il est inutile

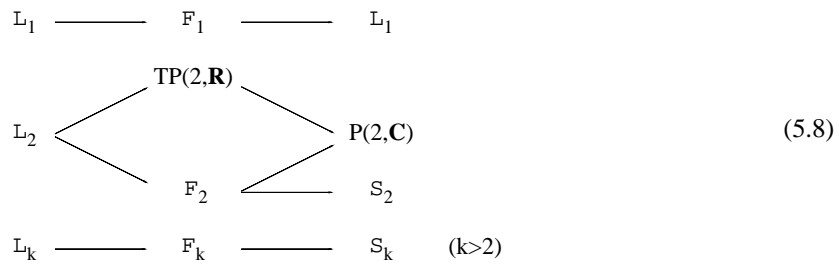
d'encombrer la classification des $SO(3)$ -variétés symplectiques. C'est ce qui nous a conduit à la définition suivante :

5.6 Définition : Soient $\Sigma_i = (X_i, R_i, \sigma_i)$ $i = 1, 2$ deux $SO(3)$ -variétés symplectiques nous dirons que Σ_2 prolonge Σ_1 si il existe un morphisme de $SO(3)$ -variété symplectique injectif bi-différentiable de Σ_1 à Σ_2 . Nous dirons que Σ_2 prolonge strictement Σ_1 si ce morphisme n'est pas un isomorphisme. Nous dirons alors que Σ_1 est complète si elle n'admet pas de prolongement strict : Σ_1 complète $\Rightarrow \forall \Sigma_2 \Sigma_2$ prolonge $\Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_1 \approx \Sigma_2$.

Nous dirons aussi que Σ_1 se prolonge à Σ_2 . Dans ce cas X_1 est diffeomorphe à un ouvert de X_2 saturé pour l'action de $SO(3)$. Nous noterons parfois :

$$\Sigma_1 \leq \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_2 \text{ prolonge } \Sigma_1 \tag{5.7}$$

Le prolongement définit sur les $SO(3)$ -variétés symplectiques une relation de pré-ordre. Notons que si X_1 est compacte alors Σ_1 est complète puisque nous avons supposé les variétés connexes.



Nous éliminerons en dimension 4 le cas du stabilisateur principal $SO(2)$ puisque cela nous conduirait à un problème du même type que celui consistant à classer toutes les variétés symplectiques de dimension deux. Ce problème peut toutefois faire l'objet d'une étude particulière. Considérons donc deux $SO(3)$ -variétés symplectiques à stabilisateur principal discret Σ_1 et Σ_2 (données par les tableaux 1 et 2) si Σ_2 prolonge Σ_1 alors les $SO(3)$ -variétés sous-jacentes se prolongent, ce qui, compte tenu de l'identité des stabilisateurs principaux, ne permet que les éventualités décrites par le diagramme 5.8, où la flèche désigne le prolongement des $SO(3)$ -variétés (voir Appendice).

Ceci signifie qu'une structure symplectique invariante définie sur L_1 ne peut être prolongée qu'à F_1 ou S_1 , tandis par exemple qu'une structure définie sur L_2 peut être prolongée à $TP(2, \mathbf{R})$ ou bien à F_2 ou à $P(2, \mathbf{C})$ ou encore à S_2 . Ceci va nous conduire à partager notre étude en 3 cas correspondant aux types de stabilisateurs principaux $Z_1 = \{1\}$, Z_2 et Z_m $m > 2$.

Classification des structures sur L_1

Ce cas concerne la classification et les prolongements éventuels des structures symplectiques invariantes définies sur $L_1 = SO(3) \times \mathbf{R}$ à $F_1 = TS^2$ ou $S_1 = (S^2 \times S^2, r_{S^1})$, comme le montre le diagramme 5.8. Considérons d'abord $\sigma \in \Sigma^*[L_1]$, soit L son moment équivariant et h_c son petit hamiltonien canonique. Nous savons que h_c est une fonction réelle strictement monotone à valeurs positives, elle admet nécessairement au moins une asymptote horizontale. On partage alors $\Sigma^*[L_1]$ en quatre sous-ensembles \spadesuit \diamondsuit \clubsuit et \heartsuit définis par le comportement de h_c caractérisés par les graphes 1.

Les cas \spadesuit et \diamondsuit (respectivement \clubsuit et \heartsuit) ne diffèrent pas fondamentalement puisque toute structure appartenant au cas \spadesuit (resp. \clubsuit) est équivalente à une structure appartenant au cas \diamondsuit (resp. \heartsuit), il suffit pour s'en convaincre de considérer l'automorphisme $(g, x) \rightarrow (g, -x)$ de $SO(3) \times \mathbf{R}$. Modulo cette identification nous avons deux cas caractérisés par le nombre 1 ou 2 d'asymptôtes horizontales du petit hamiltonien canonique. Puisque seul le type de $SO(3)$ -variété importe nous identifierons dans le premier cas \mathbf{R} à $]0, +\infty[$ et dans le second cas \mathbf{R} à $J_0 =]-1, +1[$. Compte tenu de toutes ces remarques et conventions

$\Sigma^*[L_1]$ peut être partagé en deux sous-ensembles caractérisés par le comportement du petit hamiltonien canonique : graphes 2.♣ et 2.♥. Nous traiterons ces cas séparément :

Considérons d'abord le cas où \mathbf{h}_c a une seule asymptote. Posons Σ_* l'ensemble des éléments de $\Sigma^*[L_1]$ caractérisés par ♣ et Aut_* le groupe des automorphismes des structures de ce type. Nous allons montrer que le quotient Σ_*/Aut_* est égal à $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$. Remarquons d'abord que Aut_* est égal au produit semi-direct du groupe de courant $C^\infty(\mathbf{R}_+^*, SO(3))$ (Isogénies de la $SO(3)$ -structure¹) par le groupe $\text{Diff}^+(\mathbf{R}_+^*)$ des difféomorphismes croissants de \mathbf{R}_+^* :

$$\Psi \in \text{Aut}_* \Rightarrow \Psi(g, E) = (g, K(E), \alpha(E)) \quad K \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*, SO(3)) \quad \alpha \in \text{Diff}^+(\mathbf{R}_+^*) \quad (5.9)$$

Soit $\mathbf{L} = M(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma_*$, on a :

$$\mathbf{L}(g, E) = g.I(E) \quad \mathbf{I} \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*; \mathbf{R}^3) \quad \mathbf{h}_c(E) = \frac{1}{2} \|\mathbf{I}(E)\|^2 \quad (5.10)$$

L'action de Ψ sur \mathbf{L} se traduit par la transformation :

$$\mathbf{I} \rightarrow [E \rightarrow K(E)\mathbf{I} \circ \alpha(E)] \quad (5.11)$$

5.12 Lemme Soit \mathbf{L}_i $i = 1, 2$ deux moments d'éléments de Σ_* , si leurs petits hamiltoniens canoniques respectifs \mathbf{h}_c^i ($i = 1, 2$) coïncident, il existe alors une isogénie K de $SO(3) \times \mathbf{R}_+^*$ transformant \mathbf{L}_1 en \mathbf{L}_2 .

• Posons $E \rightarrow u_i(E) = \mathbf{I}_i(E)/(2\mathbf{h}_c^i(E))^{1/2}$; puisque \mathbf{h}_c^i ne s'annule pas (2.2) $u_i \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*, S^2)$. considérant la fibration canonique $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$ ces deux chemins peuvent se relever sur $SO(3)$ en des chemins g_i $i = 1, 2$ tels que : $g_i \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*, SO(3))$ $g_i(E)\mathbf{I}_i = u_i(E)$, on a donc $u_2(E) = K(E)u_1(E)$ où $K(E) = g_2(E)[g_1(E)]^{-1}$. Donc $\mathbf{I}_2(E) = K(E)\mathbf{I}_1(E)$. L'isogénie K définie par $K(g, E) = (gK(E), E)$ transforme alors \mathbf{L}_2 en \mathbf{L}_1 par la formule 5.11 •

Ceci signifie que le quotient de Σ_* par le groupe des isogénies de la $SO(3)$ -structure est égal à l'ensemble des petits hamiltoniens canoniques, c'est à dire à l'ensemble des fonctions réelles positives croissantes définies sur \mathbf{R}_+^* . L'action de $\text{Diff}^+(\mathbf{R}_+^*)$ sur cet espace se faisant naturellement par image réciproque.

5.13 Lemme Soient \mathbf{h}_c^i $i = 1, 2$ des petits hamiltoniens canoniques d'éléments de Σ_* . Si $\mathbf{h}_c^1(0) = \mathbf{h}_c^2(0)$ alors il existe $\alpha \in \text{Diff}^+(\mathbf{R}_+^*)$ tel que $\mathbf{h}_c^2 = \mathbf{h}_c^1 \circ \alpha$.

• \mathbf{h}_c^i étant une fonction réelle strictement croissante définie sur \mathbf{R}_+^* à valeurs dans \mathbf{R}_+^* qui vérifie $\mathbf{h}_c^i(0) = k$, donc \mathbf{h}_c^i appartient à $\text{Diff}^+(\mathbf{R}_+^*,]k, +\infty[)$. Considérons alors $T_k \in \text{Diff}^+(\mathbf{R}_+^*,]k, +\infty[)$ défini par $T_k(E) = 2E + k$, alors $[\mathbf{h}_c^i]^{-1} \circ T_k$ est aussi un élément de $\text{Diff}^+(\mathbf{R}_+^*,]k, +\infty[)$. En posant $\alpha_i = [\mathbf{h}_c^i]^{-1} \circ T_k$ on se ramène à la fonction affine T_k et donc \mathbf{h}_c^1 et \mathbf{h}_c^2 sont liés par un difféomorphisme croissant de \mathbf{R}_+^* . •

On conclut alors par la proposition :

5.14 Proposition L'ensemble quotient Σ_*/Aut_* est égal à la demie droite \mathbf{R}_+ , la projection étant donnée par : $\sigma \rightarrow k = \lim_{E \rightarrow 0} \mathbf{h}_c(E)$. Où \mathbf{h}_c est le petit hamiltonien canonique de σ . Chaque élément σ de Σ_* se prolonge en un élément σ_s de $\Sigma^*[F_1]$ défini par son moment équivariant :

¹On appelle isogénie tout automorphisme de la $SO(3)$ -structure se projetant sur l'identité de l'espace des orbites [8].

$$\mathbf{L}_s : (x,v) \rightarrow sx + x \times v \quad s = \sqrt{k}$$

• Grâce aux lemmes 5.12 et 5.13 il suffit de vérifier que la valeur $k = \mathbf{h}_c(0)$ est bien conservée par Aut_\bullet , ce qui est immédiat. Donc k est le seul invariant de l'action de Aut_\bullet , ce qui démontre la première partie de la proposition. Soit alors $k \in \mathbf{R}_+$, On peut choisir le moment équivariant particulier défini par $\mathbf{I}_k = k^{1/2} \mathbf{I}_1 + (2E)^{1/2} \mathbf{I}_3$ se projetant sur k , en utilisant le plongement équivariant canonique de $\text{SO}(3) \times \mathbf{R}_+^*$ dans TS^2 défini dans l'appendice par $(g,E) \rightarrow (x = g\mathbf{I}_1, v = (2E)^{1/2} \mathbf{I}_2)$ on transporte la structure symplectique invariante. L'image directe du moment s'écrit $\mathbf{L}_s(x,v) = sx + x \times v \quad s = k^{1/2}$, \mathbf{L}_s est à priori défini sur $\text{TS}^2 - \chi_o$ où χ_o est la section nulle, orbite singulière de $\text{SO}(3)$, Il est clair que ce moment se prolonge, naturellement de façon unique, en un élément de $\text{Eq}(F_1, \mathbf{R}^3)$, son petit hamiltonien canonique \mathbf{h}_c^k est égal à la fonction affine : $E \rightarrow (2E + s^2)/2$, il vérifie $\mathbf{h}_c^k \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})^*$, \mathbf{L}_s définit donc une structure symplectique invariante sur F_1 •

Considérons maintenant le cas où le petit hamiltonien canonique a deux asymptôtes Posons Σ_\bullet , l'ensemble des éléments de $\Sigma^*[L_1]$ caractérisés par \diamond et Aut_\bullet , le groupe des automorphismes des structures de ce type. Nous allons calculer le quotient $\Sigma_\bullet / \text{Aut}_\bullet$. Les $\text{SO}(3)$ -structures étant isomorphes : $\text{Aut}_\bullet \approx \text{Aut}_\bullet$, c'est à dire $\text{Aut}_\bullet = C^\infty(\mathbf{J}^*, \text{SO}(3)) \times \text{Diff}^+(\mathbf{J}^*)$, $\mathbf{J}^* =]-1, +1[$.

Nous pouvons sans difficultés transcrire les lemmes 5.12 et 5.13 en remplaçant Σ_\bullet par Σ_\bullet , \mathbf{R}_+^* par \mathbf{J}^* et en remplaçant : $k = \mathbf{h}_c^i(0)$ par $(k_1, k_2) = (\mathbf{h}_c^i(-1), \mathbf{h}_c^i(+1))$. Ceci permet d'affirmer, de la même façon que précédemment que les seuls invariants de l'action de Aut_\bullet est le couple (k_1, k_2) qui vérifie $k_1 \in \mathbf{R}_+$ et $k_2 > k_1$. On a alors la proposition :

5.15 Proposition L'ensemble quotient $\Sigma_\bullet / \text{Aut}_\bullet$ est égal à l'ensemble des couples (k_1, k_2) tels que $k_1 \in \mathbf{R}_+$ et $k_2 > k_1$. La projection est donnée par : $\sigma \rightarrow (\mathbf{h}_c^i(-1), \mathbf{h}_c^i(+1))$ $\sigma \in \Sigma_\bullet$, où \mathbf{h}_c est le petit hamiltonien canonique de σ . Chaque élément σ de Σ_\bullet se prolonge en un élément σ_s de $\Sigma^*[S_1]$ défini par son moment équivariant :

$$\mathbf{L}_s(x,y) = s_1x + s_2y \quad s = (s_1, s_2) \text{ avec } s_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}) \text{ et } s_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1})$$

• Pour chaque couple $k = (k_1, k_2)$ on peut choisir un moment équivariant particulier défini par : $\mathbf{I}_k(\rho) = [k_2 \cdot (1+\rho)/2]^{1/2} \mathbf{I}_1 + [k_1 \cdot (1-\rho)/2]^{1/2} \mathbf{I}_2$. En utilisant le plongement équivariant de $\text{SO}(3) \times \mathbf{J}^*$ dans $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2, r_{\mathcal{S}_1})$ défini dans l'appendice par :

$$(g, \rho) \rightarrow (x = ((1+\rho)/2)^{1/2} g\mathbf{I}_1 + ((1-\rho)/2)^{1/2} g\mathbf{I}_2, y = ((1+\rho)/2)^{1/2} g\mathbf{I}_1 - ((1-\rho)/2)^{1/2} g\mathbf{I}_2)$$

On transporte la structure symplectique invariante. L'image directe du moment s'écrit $\mathbf{L}_s(x,y) = s_1x + s_2y$ où s_1 et s_2 sont définis par la proposition. \mathbf{L}_s est à priori défini sur $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2 - \text{O}_1^+ \cup \text{O}_1^-$, où O_1^\pm sont les orbites singulières de $\text{SO}(3)$, mais il se prolonge naturellement et de façon unique en un élément de $\text{Eq}(\mathcal{S}_1, \mathbf{R}^3)$, son petit hamiltonien canonique est la fonction affine : $\mathbf{h}_c = [\rho \rightarrow s_1^2 + s_2^2 + 2s_1s_2\rho]$, il vérifie $\mathbf{h}_c \in C^\infty(\mathbf{J}, \mathbf{R})^*$, \mathbf{L}_s définit donc une structure symplectique invariante sur $\mathcal{S}_1 : \mathbf{L}_s \in \text{M}(\mathcal{S}_1)$ •

Le quotient $\Sigma^*[\mathcal{S}_1] / \text{Aut}(\mathcal{S}_1)$ étant égal à la réunion $\Sigma_\bullet / \text{Aut}_\bullet \cup \Sigma_B / \text{Aut}_\bullet$, on peut résumer les résultats obtenus par la proposition suivante :

5.16 Théorème Toute structure symplectique invariante définie sur L_1 est entièrement caractérisée, modulo l'action du groupe, par un réel $s \geq 0$ ou par deux réels (s_1, s_2) tels que $0 < s_1 < s_2$. Chaque structure se prolonge sur $F_1 = \text{TS}^2$ ou $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2, r_{\mathcal{S}_1})$ par une structure symplectique invariante de moment suivant les cas : $L(x,v) = sx + x \times v$ ou $L(x,y) = s_1x + s_2y$.

Classification des structures sur $F_1 = TS^2$

Nous allons calculer dans ce paragraphe, l'espace quotient $\Sigma^*[F_1]/\text{Aut}(F_1)$, ceci nous permettra de trouver les structures symplectiques prolongeables à S_1 et celles qui sont complètes. Nous ferons auparavant une brève analyse du groupe $\text{Aut}(F_1)$.

Considérons le cylindre de la projection canonique $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$ (voir Appendice). C'est à dire l'image de l'application $\varphi_1 : SO(3) \times \mathbf{R}_+ \rightarrow S^2 \times \mathbf{R}^3$ définie par $\varphi_1(g, E) = (g\mathbf{I}_1, (2E)^{1/2} g\mathbf{I}_2)$. La restriction de φ_1 à $SO(3) \times \mathbf{R}_+^*$ est un difféomorphisme sur $TS^2 - \chi_0$. Soit alors un élément Ψ de $\text{Aut}(F_1)$, son transmuté par $\varphi_1 : \varphi_1^{-1} \circ \Psi \circ \varphi_1$ est un élément de $\text{Aut}(SO(3) \times \mathbf{R}_+^*)$ c'est à dire du produit semi-direct de $C^\infty(\mathbf{R}_+^*, SO(3))$ par $\text{Diff}(\mathbf{R}_+^*)$. $\text{Aut}(F_1)$ peut-être donc considéré comme un sous-groupe de celui-ci, puisque par continuité, connaissant Ψ sur $TS^2 - \chi_0$, on connaît Ψ sur TS^2 tout entier :

$$\text{Aut}(F_1) \subset C^\infty(\mathbf{R}_+^*, SO(3)) \times \text{Diff}(\mathbf{R}_+^*) \quad (5.17)$$

Ecrivons encore $\Psi \in \text{Aut}(F_1)$ en terme des variables $(x, v) \in TS^2 \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$:

$$\Psi : (x, v) \rightarrow (x^* = \Psi_1(x, v), y^* = \Psi_2(x, v)) \quad (5.18)$$

La propriété d'équivariance de Ψ par rapport à l'action de $SO(3)$ sur TS^2 implique, en vertu de la proposition 3.8 :

$$\begin{cases} \Psi_i \in \text{Eq}(F_1, \mathbf{R}^3) \quad i = 1, 2 \quad \Psi_i(x, v) = r_i(E)x + s_i(E)v + t_i(E)x \times v \text{ avec } E = \frac{1}{2} \|v\|^2 \\ \langle \Psi_1(x, v), \Psi_2(x, v) \rangle = 0 \text{ et } \|\Psi_1(x, v)\|^2 = 1 \quad r_i, s_i, t_i \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \end{cases} \quad (5.19)$$

Le groupe $\text{Diff}(\mathbf{R}_+)$ est défini comme le groupe :

$$\text{Diff}(\mathbf{R}_+) = \{ \alpha \in \text{Diff}(\mathbf{R}_+^*) \mid \alpha(0) = 0, 0 < \alpha'(0) < \infty, \alpha^{(k)}(E) < \infty \text{ si } k \geq 2 \} \quad (5.20)$$

5.21 Proposition Le groupe $\text{Isog}(F_1)$ des isogénies de la $SO(3)$ -variété F_1 est isomorphe au groupe de courant K_1 défini par :

$$k \in K_1 \Leftrightarrow \begin{cases} K \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*, SO(3)) \text{ et } K(0) \in O(2, \mathbf{I}_1) \\ K(E)\mathbf{I}_1 = (r_1(E), (2E)^{1/2} s_1(E); (2E)^{1/2} t_1(E)) \\ K(E)\mathbf{I}_2 = (r_1(E)/(2E)^{1/2}; s_1(E); t_1(E)) \end{cases}$$

Où $r_i, s_i, t_i \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. L'isomorphisme entre K_1 et $\text{Aut}(F_1)$ est donné par la formule 5.19. Le groupe $\text{Aut}(F_1)/\text{Isog}(F_1)$ est égal à $\text{Diff}(\mathbf{R}_+)$.

• Ceci est le résultat d'un calcul élémentaire. Soit $\Psi \in \text{Isog}(F_1)$, Ψ est alors donné par la formule 5.19 et sa factorisation sur \mathbf{R}_+ est l'identité, ce qui s'écrit : $[r_2(E)]^2 + 2E[s_2(E)]^2 + 2E[t_2(E)]^2 = 2E$. En définissant K comme le transmuté de Ψ par φ_1 (voir Appendice) on a $(g, E) \rightarrow (g\kappa(E), E)$, où en posant : $\Psi(x, v) = (x^*, v^*)$, $\kappa(E) = g^{-1}g^*$, et g et g^* sont donnés par : $g = [x v / (2E)^{1/2} \times v / (2E)^{1/2}]$ et $g^* = [x^* v^* / (2E)^{1/2} \times v^* / (2E)^{1/2}]$. Ceci permet de calculer $\kappa(E)\mathbf{I}_1$ et $\kappa(E)\mathbf{I}_2$ en remplaçant x^* et v^* par leur valeur donnée en 5.19. Compte tenu des conditions $\|\kappa(E)\mathbf{I}_1\| = \|\kappa(E)\mathbf{I}_2\| = 1$ et $\langle \kappa(E)\mathbf{I}_1, \kappa(E)\mathbf{I}_2 \rangle = 0$ il est facile de vérifier que $\lim_{E \rightarrow 0} (r_2(E)/(2E)^{1/2}) = 0$ et donc que $\lim_{E \rightarrow 0} \kappa(E)$ existe, c'est à dire $\kappa \in C^0(\mathbf{R}_+, SO(3))$. Grâce au cylindre de la projection $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$ (c'est à dire $(g, E) \rightarrow (g\mathbf{I}_1, (2E)^{1/2} g\mathbf{I}_2)$), on peut remonter l'isogénie Ψ en un homéomorphisme de $SO(3) \times \mathbf{R}_+$, défini par : $[(g, E) \rightarrow (g\kappa(E), E)]$. Ecrire qu'un tel homéomorphisme se factorise sur TS^2 c'est écrire pour $E = 0$: $\text{cyl}(\pi)(\tilde{g}\kappa(0), 0) = \text{cyl}(\pi)(g\kappa(0), 0) \quad \forall \tilde{g}$ tel que $g\mathbf{I}_1 = \tilde{g}\mathbf{I}_1$. C'est à dire : $\kappa(0)$ est un élément du normalisateur de $SO(2, \mathbf{I}_1)$ qui est égal à $O(2, \mathbf{I}_1)$. Considérons maintenant un élément Ψ de $\text{Aut}(F_1)$ et soit α sa projection sur \mathbf{R}_+ , α est alors donné par : $\alpha(E) = (r_1(E)^2 + E[s_1(E) + t_1(E)]^2)/2$. Comme $\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = 0$, on a pour $v = 0$: $r_2(0) = 0$, et donc $\alpha(0) = 0$, il est encore immédiat de constater, grâce à la formule qui précède, que α est une combinaison de sommes et

de produits de fonctions C^∞ sur \mathbf{R}_+ et donc que $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$. La restriction de α à \mathbf{R}_+^* est un difféomorphisme comme $\alpha(0) = 0$ alors α est strictement croissante et donc $\alpha'(E) > 0 \forall E > 0$. Enfin étant donné $\sigma \in \Sigma^*[F_1]$, \mathbf{L} son moment équivariant et \mathbf{h}_c son petit hamiltonien canonique on sait que $\Psi^*(\sigma)$ est encore une forme symplectique invariante qui a $\mathbf{L} \circ \Psi$ comme moment équivariant et $\mathbf{h}_c \circ \alpha$ comme petit hamiltonien canonique, la condition de régularité de $\Psi^*(\sigma)$ s'écrit (voir §3) $\mathbf{h}_c \circ \alpha \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})^*$ donc $\mathbf{h}_c'(\alpha(E))\alpha'(E) \neq 0 \forall E \geq 0$ en particulier pour $E = 0$: $\mathbf{h}_c'(\alpha(0))\alpha'(0) \neq 0$ $\alpha'(0) \neq 0$ c'est à dire $0 < \alpha'(0) < \infty$. Réciproquement soit $\alpha \in \text{Diff}(\mathbf{R}_+)$, posons : $\Psi : (x, v) \rightarrow (x, (\alpha(E)/2E)^{1/2} v)$. Ψ se projette bien sur α , c'est un élément de $\text{Aut}(F_1)$ si et seulement si l'application $s_2 : E \rightarrow (\alpha(E)/2E)^{1/2}$ est différentiable. Pour $E \neq 0$ ceci est immédiat puisque $\alpha(E) \neq 0 \forall E \neq 0$. D'autre part, puisque $\alpha \in \text{Diff}(\mathbf{R}_+)$, α admet un développement de Taylor au voisinage de zéro, en l'utilisant on montre que $s_2 \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, et donc $\Psi \in \text{Aut}(F_1)$, c'est à dire : le quotient de $\text{Aut}(F_1)$ par $\text{Isog}(F_1)$ est est le groupe $\text{Diff}(\mathbf{R}_+)$ •

Ainsi le groupe $\text{Aut}(F_1)$ est considéré comme un sous-groupe du produit semi direct de $C^0(\mathbf{R}_+, \text{SO}(3))$ par $\text{Diff}(\mathbf{R}_+)$ se factorisant sur l'espace $\text{TS}^2 (= \text{im}(\text{cyl}(\pi)))$. La loi de multiplication est donnée par :

$$(\kappa_i, \alpha_i) \in C^0(\mathbf{R}_+, \text{SO}(3)) \times \text{Diff}(\mathbf{R}_+) \quad i = 1, 2 : (\kappa_1, \alpha_1)(\kappa_2, \alpha_2) = (\kappa_1 \cdot \kappa_2 \circ \alpha_1, \alpha_2 \circ \alpha_1) \quad (5.22)$$

Où $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = [E \rightarrow \kappa_1(E) \cdot \kappa_2(E)]$. Tout élément (κ, α) s'écrit évidemment :

$$(\kappa, \alpha) = (\kappa, \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+})(\mathbf{1}, \alpha) \quad \text{avec } \mathbf{1} : E \rightarrow \mathbf{1}_{\text{SO}(3)} \quad (5.23)$$

Nous avons maintenant suffisamment de renseignements pour calculer l'espace quotient $\Sigma^*[F_1]/\text{Aut}(F_1)$. Soit $\sigma \in \Sigma^*[F_1]$, \mathbf{L} son moment équivariant et \mathbf{h}_c son petit hamiltonien canonique. De même qu'au paragraphe précédent nous avons deux situations différentes suivant le comportement de \mathbf{h}_c caractérisé par les graphes 3. Dans le cas \spadesuit , \mathbf{h}_c a une asymptote horizontale, on posera $k_1 = \mathbf{h}_c(0)$ et $k_2 = \mathbf{h}_c(\infty)$, dans le cas \clubsuit \mathbf{h}_c n'a pas d'asymptote horizontale et de ce fait est strictement croissant. On notera encore Σ_\spadesuit et Σ_\clubsuit les structures symplectiques décrites par les cas \spadesuit et \clubsuit , on a : $\Sigma^*[F_1] = \Sigma_\spadesuit \cup \Sigma_\clubsuit$.

5.24 Lemme Soit $\sigma_i \in \Sigma^*[F_1]$ $i = 1, 2$, de petit hamiltonien canonique \mathbf{h}_c^i . Si $\mathbf{h}_c^1 = \mathbf{h}_c^2$ alors il existe une isogénie K de F_1 telle que $\sigma_1 = K^*(\sigma_2)$. Si de plus les valeurs asymptotiques des petits hamiltoniens canoniques (en zéro et à l'infini) coïncident il existe un difféomorphisme α de \mathbf{R}_+ tel que $\mathbf{h}_c^1 = \mathbf{h}_c^2 \circ \alpha$.

• La démonstration utilise des techniques analogues à la preuve précédente, nous renvoyons le lecteur à [4] pour une démonstration complète •

Nous sommes en mesure de donner maintenant les conditions de prolongement des $\text{SO}(3)$ -variétés symplectiques définies sur F_1 .

5.25 Proposition L'ensemble quotient $\Sigma_\spadesuit/\text{Aut}_\spadesuit$ est égal à l'ensemble des valeurs asymptotiques du petit hamiltonien canonique c'est à dire des couple (k_1, k_2) tels que $k_i \in \mathbf{R}_+$ $i = 1, 2$ et $k_1 \neq k_2$. La projection est donnée par : $\sigma \rightarrow (k_1, k_2) = (\mathbf{h}_c(0), \mathbf{h}_c(\infty))$ (\mathbf{h}_c est le petit hamiltonien canonique de σ). De plus σ se prolonge en un élément σ_s de $\Sigma^*[S_1]$ défini par son moment équivariant $L(x, y) = s_1 x + s_2 y$ où $s = (s_1, s_2)$ est donné par : $s_1 = ((k_1)^{1/2} + (k_2)^{1/2})/\sqrt{2}$ et $s_2 = ((k_1)^{1/2} - (k_2)^{1/2})/\sqrt{2}$. L'ensemble quotient $\Sigma_\clubsuit/\text{Aut}_\clubsuit$ est égal à la demie-droite \mathbf{R}_+ . la projection est donnée par : $\sigma \rightarrow k = \mathbf{h}_c(0)$. De plus chaque $\text{SO}(3)$ -variété symplectique de Σ_\clubsuit est complète.

• Grâce au lemme 5.24 on déduit que les seuls invariants de l'action du groupe $\text{Aut}(F_1)$ sur $\Sigma^*[F_1]$ sont les valeurs asymptotiques du petit hamiltonien canonique et donc : $\Sigma^*[F_1]/\text{Aut}(F_1) = [\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ - \Delta] \cup \mathbf{R}_+$, où Δ est la diagonale. Considérons alors $\sigma \in \Sigma_\spadesuit$ de valeurs asymptotiques du petit hamiltonien canonique

(k_1, k_2) . Soit $\varepsilon \in \Sigma^*[S_1]$ défini par son moment équivariant $\mathbf{L}(x, y) = s_1x + s_2y$ où s_1 et s_2 sont donnés par la proposition. Son image réciproque par le plongement équivariant (Appendice) :

$$\varepsilon_+^1 : (x, v) \rightarrow (x, v = 2v + (\|v\|^2 - 1)x) / (1 + \|v\|^2)$$

a comme moment : $L_+^1(x, v) = \{[2E(s_1 + s_2) + s_1 - s_2]x + 2s_2v\} / (1 + 2E)$ et comme petit hamiltonien canonique :

$$\mathbf{h}_{c_+^1}(E) = [4(s_1 + s_2)^2 E^2 + 4E(s_1^2 + s_2^2) + (s_1 - s_2)^2] / (1 + 2E)^2$$

\mathbf{h}_c admet $\mathbf{h}_c(0) = (s_1 - s_2)^2$ et $\mathbf{h}_c(\infty) = (s_1 + s_2)^2$ comme valeurs asymptotiques. Le système à deux inconnues $k_1 = (s_1 - s_2)^2$ et $k_2 = (s_1 + s_2)^2$ admet au moins la solution indiquée dans la proposition. Donc σ se prolonge sur $S^2 \times S^2$ en ε . Considérons maintenant $\sigma \in \Sigma_{\mathbf{B}}$ et posons $s = \sqrt{k}$ $k = \mathbf{h}_c(0)$. σ est équivalente à la structure symplectique définie par le moment $\mathbf{L}(x, v) = sx + x \times v$. Supposons alors qu'elle se prolonge, nécessairement sur S_1 , grâce à un difféomorphisme équivariant φ dont la factorisation $\text{fact}(\varphi)$ sur \mathbf{R}_+ définit un difféomorphisme de \mathbf{R}_+ à un ouvert de $J = [-1, 1]$, c'est à dire un ouvert du type $]\alpha, 1]$ ou bien $]-1, \alpha[$. Le petit hamiltonien canonique \mathbf{h}_c' transporté par $\text{fact}(\varphi)$ vérifie $\mathbf{h}_c'(\alpha) = \mathbf{h}_c(\infty) = \infty$ et donc n'est pas prolongeable sur J . σ ne se prolonge pas strictement elle définit une $SO(3)$ -variété symplectique complète : (TS^2, σ) •

5.26 Théorème Toute structure symplectique invariante définie sur F_1 est entièrement caractérisée, modulo l'action du groupe $\text{Aut}(F_1)$, soit par un réel $s \geq 0$, elle définit alors une structure symplectique complète; soit par deux réels (s_1, s_2) $0 < s_1 < s_2$, elle se prolonge dans ce cas sur S_1 par une structure symplectique invariante de moment équivariant $L(x, y) = s_1x + s_2y$.

A titre de remarque ajoutons que dans le cas des structures symplectiques complètes s caractérise la classe de cohomologie de σ et donc que le quotient des structures symplectiques complètes par les automorphismes est égal à $H_2(TS^2, \mathbf{R})$.

Classification des structures sur S_2

Puisque $S^2 \times S^2$ est une variété compacte il n'est pas question ici de prolongement, il s'agit seulement de classifier les structures symplectiques invariantes, c'est à dire de calculer l'espace $\Sigma^*[S_1] / \text{Aut}(S_1)$. Comme les techniques de démonstration sont du même type que celles utilisées au paragraphe précédent nous ne donnerons pas entièrement les démonstrations, nous insisterons seulement sur certaines différences.

Rappelons que S_1 peut être considéré comme la réunion de deux exemplaires du cylindre de l'application $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$. C'est à dire comme l'image de l'application φ :

$$\varphi : SO(3) \times [-1, 1] \rightarrow S^2 \times S^2 \quad (5.27)$$

$$(g, \rho) \rightarrow (x = g\mathbf{I}_1, y = (1 - \rho^2)^{1/2} g\mathbf{I}_2 + \rho g\mathbf{I}_1)$$

La restriction de φ à $SO(3) \times]-1, 1[$ est un difféomorphisme équivariant. Comme au paragraphe précédent le groupe $\text{Aut}(S_1)$ peut être identifié à un sous-groupe, pour la loi usuelle, du produit semi-direct $C^\infty(J^*, SO(3)) \times \text{Diff}(J)$, où $J^* =]-1, 1[$ et $\text{Diff}(J)$ est défini par :

$$\text{Diff}(J) = \{ \alpha \in \text{Homéo}(J) \mid \alpha|_{J^*} \in \text{Diff}(J^*) \text{ et } 0 < \alpha'(\pm 1) < \infty \text{ et } \alpha^{(k)}(0) < \infty \ k \geq 2 \} \quad (5.27)$$

5.28 Proposition Le groupe $\text{Isog}(S_1)$ des isogénies de S_1 est isomorphe au groupe H_1 défini par :

$$K \in H_1 \Leftrightarrow \begin{cases} K|_{J^*} \in C^\infty(J^*; SO(3)) & K(\pm 1) \in O(2; \mathbf{I}_1) \\ K(\rho)\mathbf{I}_1 = (a_1(\rho), (1-\rho^2)^{1/2}b_1(\rho), (1-\rho^2)^{1/2}c_1(\rho)) \\ K(\rho)\mathbf{I}_2 = (a_2(\rho)/(1-\rho^2)^{1/2}; b_2(\rho); c_2(\rho)) \end{cases}$$

Où $a_i, b_i, c_i \in C^\infty(J, \mathbf{R})$. Avec ces notations, l'isomorphisme $K \rightarrow \Psi$ entre ce groupe et $\text{Aut}(S_1)$ est donné par :

$$\Psi(x, y) = (X^* = \Psi_1(x, v), y^* = \Psi_2(x, v)) \text{ et } \Psi_1(x, v) = a_i(E)x + b_i(E)v + c_i(E)x \times v$$

Le groupe quotient $\text{Aut}(S_1)/\text{Isog}(S_1)$ est égal à $\text{Diff}(J)$.

- La démonstration est du même type que celle de la proposition 5.21. Il faut simplement remarquer que les éléments de $\text{Diff}(J)$ peuvent échanger les points de bord ± 1 qui correspondent aux orbites singulières •

5.29 Proposition Toute structure symplectique invariante σ définie sur S_1 est entièrement caractérisé par un couple de réels $s = (s_1, s_2)$ tel que $0 < s_1 < s_2$:

$$s_1 = ((k_1)^{1/2} + (k_2)^{1/2})/\sqrt{2} \quad s_2 = ((k_1)^{1/2} - (k_2)^{1/2})/\sqrt{2} \quad k_{\pm} = \mathbf{h}_c(\pm 1)$$

où \mathbf{h}_c est le petit hamiltonien canonique de σ . La forme σ est alors équivalente à la structure symplectique invariante canonique σ_s de moment équivariant : $L(x, y) = s_1x + s_2y$ avec $(x, y) \in S^2 \times S^2$.

- Ceci résulte d'une simple adaptation de la proposition 4.25 •

Notons seulement que s caractérise la classe de cohomologie de σ et que l'on peut écrire :

$$\Sigma^*[S_1]/\text{Aut}(S_1) = H^2(S^2 \times S^2, \mathbf{R}) \quad (5.30)$$

Classification des structures sur L_m

Comme l'indique le diagramme 5.8 ce cas concerne la classification et le prolongement des structures symplectiques invariantes définies sur L_m $m > 2$ à F_m ou S_m . Rappelons que $\Sigma^*[L_m]$ peut être considéré comme un sous-ensemble de $\Sigma^*[L_1]$. Tout moment d'un élément de $\Sigma^*[L_m]$ se relève sur $SO(3) \times \mathbf{R}$ en un moment qui s'écrit $L(g, E) = f(E)g\mathbf{I}_1$ où $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et \mathbf{Z}_m est identifié à $\mathbf{Z}_m(\mathbf{I}_1)$. De même tout automorphisme Ψ de L_m se relève en un automorphisme ψ de L_1 qui s'écrit :

$$\psi = (K, \alpha) \quad \psi(g, E) = (g\kappa(E), \alpha(E)) \quad \kappa \in C^\infty(\mathbf{R}, O(2, \mathbf{I}_1)) \quad \alpha \in \text{Diff}(\mathbf{R}) \quad (5.31)$$

La condition $\kappa \in C^\infty(\mathbf{R}, O(2, \mathbf{I}_1))$ et la condition pour $\psi \in \text{Aut}(L_1)$ de se factoriser sur L_m en $\Psi \in \text{Aut}(L_m)$. D'autre part l'action de $\text{Aut}(L_1)$ sur $M[L_m]$ se traduit sur la fonction f par :

$$f \rightarrow \pm f \circ \alpha \quad (5.32)$$

Le groupe des isogénies de L_m n'agit sur $\Sigma^*[L_m]$ que par l'intermédiaire de \mathbf{Z}_2 . Considérons l'ensemble $\Sigma^*[L_m]$ identifié à l'ensemble $M[L_m]$, lui même identifié à l'ensemble $\{f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) | f^2 \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})^*\}$. On se restreindra au cas pour lesquels $\mathbf{h}_c = f^2/2$ est strictement croissante. Le groupe des automorphismes sera donc lui même restreint aux α croissants : $\alpha \in \text{Diff}^+(\mathbf{R})$. Nous partageons l'ensemble des structures en 4 sous-ensembles caractérisés par le nombre d'asymptotes horizontale du petit hamiltonien canonique et de la valeur nulle ou non de l'une de ces asymptotes, voir graphes 4. En tenant compte de l'équivalence entre \mathbf{R} , \mathbf{R}_+^* , et J^* comme précédemment, nous nous ramenons aux cas décrits dans les graphes 5 (G5). On a alors la proposition suivante :

5.33 Proposition L'ensemble quotient $\Sigma^*[L_m]/\text{Aut}(L_m)$, $m>2$, est égal à l'ensemble des couples des valeurs asyptotiques du petit hamiltonien canonique. On en déduit :

a) Les structures symplectiques invariantes satisfaisant à $G5\blacklozenge$. et $G5\clubsuit$ se prolongent à F_m par des éléments de $\Sigma^*[F_m]$ dont le moment peut être choisi égal à :

$$\mathbf{L}_+(x,v) = \sqrt{k} e^E x \quad \mathbf{L}_-(x,v) = \sqrt{k} e^{-E} x$$

b) Les structures symplectiques invariantes satisfaisant à $G5\spadesuit$ se prolongent à S_m par des éléments de $\Sigma^*[S_m]$ dont le moment peut être choisi égal à :

$$\mathbf{L}_s(x,y) = (s_1\rho_m + s_2)^{1/2}x \quad s_1 = k_1 - k_2 \quad s_2 = k_1 + k_2$$

c) Les structures symplectiques invariantes satisfaisant à $G5\heartsuit$ n'admettent pas de prolongement strict, elles définissent des $SO(3)$ -variétés symplectiques complètes qui peuvent être identifiées à la réunion des orbites principales de F_m , c'est à dire à $F_m - \chi_o$, muni de la structure symplectique définie par le moment : $\mathbf{L}_o(x,v) = Ex$.

• Un calcul analogue, mais plus simple, qu'au paragraphe précédent permet de montrer a) en utilisant les plongements équivariants définis dans l'appendice. On utilise en particulier le fait que k soit non nul. b) se démontre en utilisant les difféomorphismes canoniques entre $[SO(3)/\mathbf{Z}_m] \times \mathbf{J}^*$ et $S^2 \times S^2 - [O_m^+ \cup O_m^-]$. C'est la restriction de l'union φ de deux exemplaires du cylindre de la projection π : $SO(3)/\mathbf{Z}_m \rightarrow S^2$, c'est à dire :

$$\varphi(x,v,\rho_m) = (x,y) \quad y = (1-\rho_m^2)^{1/2}v + \rho_m \mathbf{f}_m(x)$$

Il suffit de prendre l'image réciproque par $\varphi|_{\mathbf{J}^*}$ d'une structure définie sur S_m ayant k_1 et k_2 comme valeurs du petit hamiltonien canonique en $+1$ et -1 et de vérifier ensuite que $[\rho_m \rightarrow (s_1\rho_m + s_2)^{1/2}] \in C^\infty(\mathbf{J},\mathbf{R})$. Enfin si le petit hamiltonien canonique \mathbf{h}_c est caractérisé par $G5\spadesuit$ tout prolongement de la structure symplectique donnerait pour le nouvel \mathbf{h}_c une valeur qui l'annulerait. Ce qui est impossible du fait que $\mathbf{h}_c' = f.f \neq 0$ •

Comme dans les cas précédents les structures symplectiques invariantes sont classées par les valeurs asyptotiques du petit hamiltonien canonique. Mais contrairement au cas L_1 , chaque structure de L_m $m>2$ ne se prolonge pas nécessairement à F_m ou S_m . Une classe de structure, modulo $\text{Aut}(L_m)$, ne se prolonge pas.

Classification des structures sur F_m $m>2$

De même qu'au paragraphe précédent l'ensemble $\Sigma^*[F_m]$ est identifié à $M(F_m)$, lui même identifié à l'ensemble $\{f \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \mid f^2 \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^*)\}$ grâce à la formule $\mathbf{L}(x,v) = f(E)x$ $\mathbf{L} \in M(F_m)$. Le groupe $\text{Aut}(F_m)$, n'agit sur $M(F_m)$ que par l'intermédiaire de $\mathbf{Z}_2 \times \text{Diff}(\mathbf{R}_+)$:

$$(\varepsilon, \alpha; f) \rightarrow \varepsilon f \circ \alpha \quad (\varepsilon, \alpha) \in \mathbf{Z}_2 \times \text{Diff}(\mathbf{R}_+) \quad (5.34)$$

La situation est ici analogue à celle du cas L_m à l'exception du fait que le petit hamiltonien canonique ne peut s'annuler nulle part sur \mathbf{R}_+ . Nous donnons donc le résultat sans démonstration :

5.35 Proposition L'ensemble quotient $\Sigma^*[F_m]/\text{Aut}(F_m)$, $m>2$, est égal à l'ensemble des couples des valeurs asyptotiques : $k_o = \mathbf{h}_c(0)$ et $k_\infty = \mathbf{h}_c(\infty)$ du petit hamiltonien canonique. On en déduit :

a) Si $k_\infty \in \mathbf{R}_+^*$ la structure se prolonge à \mathcal{S}_m par des éléments de $\Sigma^*[\mathcal{S}_m]$ dont le moment peut être choisi égal à :

$$\mathbf{L}_s(x,y) = (s_1 \rho_m + s_2)^{1/2} x \quad s_1 = k_1 - k_2 \quad s_2 = k_1 + k_2$$

b) Si $k_\infty = 0$ la structure n'admet pas de prolongement strict, elle définit une $SO(3)$ -variété symplectique complète, équivalente à celle définie par le moment :

$$\mathbf{L}_-(x,v) = se^{-Ex} \quad s = (2k)^{1/2}$$

c) Si $k_\infty = +\infty$ la structure n'admet pas de prolongement strict, elle définit une $SO(3)$ -variété symplectique complète, équivalente à celle définie par le moment :

$$\mathbf{L}_+(x,v) = se^{Ex} \quad s = (2k)^{1/2}$$

Remarquons que contrairement au cas F_1 où il n'y a qu'une famille de structures non (strictement) prolongeables, il y a ici deux familles, ceci vient du fait que sur \mathcal{S}_m $m > 2$, le petit hamiltonien canonique ne peut pas s'annuler sur les orbites singulières.

Classification des structures sur \mathcal{S}_m $m > 2$

Le cas \mathcal{S}_m n'offre pas plus de difficultés, après ce qui vient d'être dit dans les paragraphes précédents. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats.

5.36 Proposition Toute structure symplectique invariante définie sur \mathcal{S}_m est entièrement caractérisée, modulo l'action du groupe $\text{Aut}(\mathcal{S}_m)$, par l'ensemble des valeurs au bord du petit hamiltonien canonique : $\{k_1, k_2\} = \{\mathbf{h}_c(-1), \mathbf{h}_c(+1)\}$. Elle est équivalente à la structure symplectique définie par le moment équivariant :

$$\mathbf{L}_s(x,y) = (2s_1 s_2 \rho_m + s_1^2 + s_2^2)^{1/2} x \text{ avec } s_1 = ((k_1)^{1/2} + (k_2)^{1/2})/\sqrt{2} \text{ et } s_2 = ((k_1)^{1/2} - (k_2)^{1/2})/\sqrt{2}$$

Classification des structures sur L_2

Ce cas concerne la classification et le prolongement éventuel des structures symplectiques invariantes définies sur L_2 à $\text{TP}(2, \mathbf{R})$, F_2 , $\text{P}(2, \mathbf{C})$ ou \mathcal{S}_2 , comme l'indique le diagramme 5.8. Comme les techniques de démonstration et arguments sont contenus dans les paragraphes précédents, nous nous contenterons de donner les résultats.

Soit $\sigma \in \Sigma^*[L_2]$ \mathbf{h}_c et son petit hamiltonien canonique, modulo son sens de croissance ce dernier peut être d'un des types décrit par les graphes 4. De même que précédemment les seuls invariants de $\text{Aut}(L_2)$ sont les valeurs asymptotiques :

$$(k_1, k_2) = ((\mathbf{h}_c(-\infty), \mathbf{h}_c(+\infty))) \quad (5.37)$$

Mais ici, comme dans le cas du stabilisateur principal \mathbf{Z}_1 , chaque situation se prolonge à une des quatre variétés suivantes : $\text{TP}(2, \mathbf{R})$, F_2 , $\text{P}(2, \mathbf{C})$ ou \mathcal{S}_2 . Dans le cas \spadesuit (graphes 4) \mathbf{h}_c n'a qu'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, σ se prolonge sur $\text{TP}(2, \mathbf{R})$ où le moment s'annule sur l'orbite singulière. Dans le cas \diamond n'a qu'une asymptote horizontale d'équation $y = k \neq 0$, σ se prolonge sur F_2 où le moment ne peut pas s'annuler sur l'orbite singulière. Dans le cas \clubsuit \mathbf{h}_c a deux asymptotes horizontales d'équation $y = 0$ et $y = k_2$, σ se prolonge sur $\text{P}(2, \mathbf{C})$ où le moment s'annule sur l'orbite singulière O_\times (Appendice). Dans le cas \heartsuit , \mathbf{h}_c a deux asymptotes horizontales d'équation $y = k_1 \neq 0$ et $y = k_2$, σ se prolonge sur \mathcal{S}_2 où le moment ne peut s'annuler sur aucune orbite singulière. On a alors la proposition suivante :

5.38 Proposition Toute structure symplectique invariante définie sur L_2 est entièrement caractérisée, modulo l'action du groupe $\text{Aut}(L_2)$, par un réel $s \geq 0$ ou deux réels s_1 et s_2 tels que $0 < s_1 < s_2$. Dans le premier cas, si $s = 0$ la structure est prolongeable à la structure symplectique invariante définie sur F_2 définie par son moment équivariant $L(x,v) = se^x$, ou bien à une structure canonique d'orbite co-adjointe de $SU(3)$ définie sur $P(2,\mathbf{C})$ par son moment $L([x,y]) = sx \times y$ (notations §4). Dans le deuxième cas, la structure est prolongeable à la structure symplectique définie sur S_2 par son moment équivariant $L(x,y) = (2s_1s_2\rho_2 + s_1^2 + s_2^2)^{1/2}x$.

Classification des structures sur $TP(2,\mathbf{R})$

Soit $\sigma \in \Sigma^*[TP(2,\mathbf{R})]$, puisque son moment équivariant s'annule sur l'orbite singulière on a seulement les deux comportements possibles du petit hamiltonien canonique caractérisé par les graphes 6. Dans le cas \blacklozenge , \mathbf{h}_c a une asymptote horizontale d'équation $y = k$, σ est alors prolongeable à $P(2,\mathbf{C})$. Dans le cas \blackspade , σ n'est pas strictement prolongeable.

5.39 Proposition Toute structure symplectique invariante définie sur $TP(2,\mathbf{R})$ est entièrement caractérisée, modulo l'action du groupe $\text{Aut}(TP(2,\mathbf{R}))$ par la valeur asymptotique de son petit hamiltonien canonique. Si cette valeur n'est pas l'infini alors la structure est prolongeable sur $P(2,\mathbf{C})$ en une structure canonique d'orbite co-adjointe de $SU(3)$. Si cette valeur est l'infini alors la structure est équivalente à la structure canonique d'espace cotangent et définit une $SO(3)$ -variété symplectique complète.

Classification des structures sur F_2

Soit $\sigma \in \Sigma^*[F_2]$, puisque son moment équivariant ne s'annule pas sur l'orbite singulière on a trois comportements possibles du petit hamiltonien canonique caractérisés par les graphes 7. Dans le cas \blacklozenge , \mathbf{h}_c est croissant ou décroissant mais possède une asymptote horizontale non-nulle, σ se prolonge alors à S_2 . Dans le cas \clubsuit , \mathbf{h}_c est décroissant et possède la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote, σ se prolonge alors à $P(2,\mathbf{C})$ où le moment s'annule sur l'orbite singulière O_\times (voir Appendice). Remarquons que ce type de situation est impossible dans le cas F_m $m > 2$, car il n'existe pas de $SO(3)$ -variété symplectique compacte de stabilisateur principal \mathbf{Z}_m $m > 2$ pour laquelle le moment s'annulerait sur une orbite singulière. Dans le cas \blackspade , \mathbf{h}_c n'a pas d'asymptote, σ n'est pas strictement prolongeable.

5.40 Proposition Toute structure symplectique invariante définie sur F_2 est entièrement caractérisée, modulo l'action du groupe $\text{Aut}(F_2)$, par les valeurs asymptotiques de son petit hamiltonien canonique : $(k_o, k_\infty) = (\mathbf{h}_c(0), \mathbf{h}_c(\infty))$. Si k_∞ est un réel non nul la structure est prolongeable sur S_2 . Si k_∞ est nul la structure est prolongeable sur $P(2,\mathbf{C})$ en une structure canonique d'orbite co-adjointe de $SU(3)$. Si k_∞ est l'infini alors la structure n'est pas strictement prolongeable, elle est équivalente à celle définie par le moment équivariant $L(x,v) = se^x$, $s = (2k_o)^{1/2}$ elle définit une $SO(3)$ -variété symplectique complète.

Classification des structures sur $P(2,\mathbf{C})$

Soit $\sigma \in \Sigma^*[P(2,\mathbf{C})]$, son moment équivariant s'écrit $L([x,y]) = f(e)x \times y$ (voir §4). Son petit hamiltonien canonique $\mathbf{h}_c(e) = (1-e)f(e)^2/8$ s'annule sur l'orbite singulière O_\times et a la valeur $k = f(0)^2/8$ sur l'orbite singulière O_\perp . De même que précédemment c'est cette valeur qui caractérise σ , modulo l'action du groupe $\text{Aut}(P(2,\mathbf{C}))$.

5.41 Proposition Toute structure symplectique invariante définie sur $P(2,\mathbf{C})$ est équivalente, modulo l'action du groupe $\text{Aut}(P(2,\mathbf{C}))$, à une structure symplectique canonique d'orbite co-adjointe de

SU(3) de moment $L([x,y]) = (1/2)sx \times y$. Dans ce cas, comme pour S_m , le scalaire s caractérise la classe de cohomologie de σ .

Résumé

Le tableau 3 résume les résultats concernant ce chapitre de classification des structures symplectiques invariantes sur les SO(3)-variétés de dimension 4. Nous y donnons pour chaque type de SO(3)-variété symplectisable $\zeta = (X, \mathbf{R})$ la projection $\Sigma^*[\zeta] \rightarrow \Sigma^*[\zeta]/\text{Aut}(\zeta)$ qui est dans chaque cas l'ensemble (ou le couple) des valeurs limites du petit hamiltonien canonique. Nous y donnons aussi un représentant canonique de chaque type de SO(3)-variété symplectique complète.

Ces résultats appellent quelques remarques :

a) Toute SO(3)-variété symplectique de dimension 4 à stabilisateur principal discret est toujours prolongeable à une SO(3)-variété symplectique complète.

b) L'ensemble quotient $\sigma_C^*[\zeta]/\text{Aut}(\zeta)$, où $\sigma_C^*[\zeta]$ désigne l'ensemble des structures symplectiques invariantes complètes sur $\zeta = (X, \mathbf{R})$ est, dans le cas du stabilisateur principal discret, égal au deuxième groupe de cohomologie de X . En d'autres termes le seul invariant par $\text{Aut}(\zeta)$ est la classe de cohomologie.

c) Les SO(3)-variétés non compactes L_m, F_m et $\text{TP}(2, \mathbf{R})$ peuvent être considérés comme les quotients $L_1/\mathbf{Z}_m, F_1/\mathbf{Z}_m$ et F_1/\mathbf{Z}_2 , de même les SO(3)-variétés compactes S_m et $\text{P}(2, \mathbf{C})$ peuvent être considérés comme les quotients S_1/\mathbf{Z}_m et S_1/\mathbf{Z}_2 . D'autre part les SO(3)-variétés non-compactes peuvent être identifiées à des ouverts invariants des SO(3)-variétés compactes. On peut donc considérer que $S_1 = S^2 \times S^2$ muni de l'action diagonale est la SO(3)-variété génératrice toutes les autres étant obtenues à partir de celle-ci par des opérations de restriction et de quotient par diverses actions des groupes \mathbf{Z}_m (voir notes A).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **G.E. Bredon** - Introduction to compact transformation groups. Academic Press. New-York 1972
- [2] **Gostiaux-Berger** - Cours de géométrie. Collection U. PUF Paris
- [3] **P. Horvathy** - The non-abelian Bohm-Aharonov effect- Phys. Rev. D33 , 407 (1986)
- [4] **P. Iglesias** - Classification des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4 - Preprint CPT - 84/PE.1673 - CPT CNRS Luminy Marseille (1984)
- [5] **A. Kirillov** - Elements de la théorie des représentations. Editions MIR. Moscou 1974
- [6] **Kostant** - Orbits and quantization theory- Congrès international des mathématiciens 1970-1971
- [7] **J.L. Lagrange** - Mécanique analytique- fac-similé 3^{ème} édition- Librairie Albert Blanchard (1965)
- [8] **Marsden-Weinstein** - On reduction of symplectic manifold. Rep. on Math. Phys. **5** , 421 (1974)
- [9] **Palais** - The classification of G-spaces- Mem. Amer. Math. Soc. N° 36 (1960)
- [10] **V. Rohlin - D. Fuchs** - Premier cours de topologie- Chapitres géométriques. Editions MIR. Moscou 1981
- [11] **J.M. Souriau** - Structure des systèmes dynamiques. Dunod Paris 1970
- [12] **J.M. Souriau** - Groupes différentiels et physique mathématique. Preprint CPT-83/P.1547 CNRS Luminy Marseille
- [13] **J.M. Souriau** -Physique et géométrie. Preprint CPT-82/P.1389 CNRS Luminy Marseille
- [14] **S. Stenberg-V. Guillemin** - The metaplectic representation ... J. Func. An. 1981 V42
- [15] **J. Wolf** - Spaces of constant curvature. Berkeley Californie - 1972

SO(3)-Variétés ζ	Espace des orbites	Stabilisateur principal	Stabilisateur singulier	Espace des moments $M[\zeta] \approx \Sigma^*[\zeta]$	Classe de cohomologie
$S^2 \times M$ (action triviale sur M)	M	SO(2)	--	$L(x,m) = sx \quad s \in \mathbf{R} - \{0\}$ $\sigma = s \cdot \text{Surf} \oplus \varepsilon$	$(s, cl(\varepsilon))$
$L_1 = \text{SO}(3) \times \mathbf{R}$	\mathbf{R}	$Z_1 = \{1\}$	--	$L(x,y,E) = f_1(E)x + f_2(E)y + f_3(E)x \times y$ $f_i \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ $\mathbf{h}_c = \sum_{i=0}^3 f_i^2$	0
$L_m = L_1 / Z_m$ ($m > 1$)	\mathbf{R}	Z_m	--	$L(x,y,E) = f(E) \cdot x$ $f_i \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ $\mathbf{h}_c = f^2$	0
$F_1 = \text{TS}_2$	\mathbf{R}_+	Z_2	SO(2)	$L(x,v) = f_1(E)x + f_2(E)v + f_3(E)x \times v$ $E = \frac{1}{2} \ v\ ^2 \quad f_i \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ $\mathbf{h}_c = \frac{1}{2} [f_1^2 + 2E(f_2^2 + f_3^2)]$	$\frac{1}{2} [f_1(0)]^2$
TP(2, \mathbf{R})	\mathbf{R}_+	Z_2	O(2)	$L[x,v] = f(E)x \times v$ $E = \frac{1}{2} \ v\ ^2 \quad f \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ $\mathbf{h}_c = E \cdot f^2$	0
F_m ($m > 1$)	\mathbf{R}_+	Z_m	SO(2)	$L(x,v) = f(E)x$ $E = \frac{1}{2} \ v\ ^2 \quad f \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ $\mathbf{h}_c = \frac{1}{2} f^2$	$\frac{1}{2} [f(0)]^2$

Tableau 1 - SO(3)-Variétés symplectiques non compactes de dimension 4

SO(3)-Variétés ζ	Espace des orbites	Stabilisateur principal	Stabilisateur singulier	Espace des moments $M[\Sigma] \approx \Sigma^*[\zeta]$
$S^2 \times M$ action triviale sur M	M	SO(2)	--	$L(x,m) = sx \quad s \in \mathbf{R} - \{0\}$ $\sigma = s.Surf \oplus \varepsilon$
$S^2 \times S^2$ (action diagonale)	J	$Z_1 = \{1\}$	$K_1 = K_2 = SO(2)$	$L(x,y) = f_1(\rho)x + f_2(\rho)y + f_3(\rho)x \times y$ $\rho = \langle x,y \rangle \quad f_i \in C^\infty(J, \mathbf{R})$ $h_c = \frac{1}{2} [f_1^2 + f_2^2 + 2\rho f_1 f_2 + (1-\rho^2)f_3^2]$ $h_c \in C^\infty(J, \mathbf{R})^*$
$S_m = (S^2 \times S^2, r_{S_m})$ ($m > 1$)	J	Z_m	$K_1 = K_2 = SO(2)$	$L(x,y) = f(\rho_m)x \quad \rho_m = \langle f_m(x), y \rangle$ $f_i \in C^\infty(J, \mathbf{R})$ $h_c = \frac{1}{2} f^2 \quad h_c \in C^\infty(J, \mathbf{R})^*$
P(2,C)	J_0	Z_2	$K_1 = SO(2)$ $K_2 = O(2)$	$L[x,v] = f(e)x \times v$ $e = 1 - 4\ x \times v\ ^2 \quad f \in C^\infty(J_0, \mathbf{R})$ $h_c = \frac{1}{8} (1-e)f^2 \quad h_c \in C^\infty(J_0, \mathbf{R})^*$

Tableau 2 - SO(3)-Variétés symplectiques compactes de dimension 4

SO(3)-Variétés ζ	Stabilisateur principal	Stabilisateur singulier	Représentant canonique du moment SO(3) des structures complètes
$S^2 \times M$ action triviale sur M	SO(2)	--	$L(x,m)=sx \quad s \in \mathbf{R} - \{0\}$ $\sigma = s \cdot \text{Surf} \oplus \varepsilon$
$L_1 = \text{SO}(3) \times \mathbf{R}$	$\mathbf{Z}_1 = \{1\}$	--	Toujours prolongeable
$F_1 = \text{TS}^2$	$\mathbf{Z}_1 = \{1\}$	--	$L(x,v) = sx + x \times v \quad s \in \mathbf{R}_+$
$S_1 = S^2 \times S^2$ (action diagonale)	$\mathbf{Z}_1 = \{1\}$	--	$L(x,y) = s_1 x + s_2 y$ $0 < s_1 < s_2$
L_2	\mathbf{Z}_2	--	Toujours prolongeable
F_2	\mathbf{Z}_2	SO(2)	$L(x,v) = s e^E x, \quad s \in \mathbf{R}_+^*$
TP(2, \mathbf{R})	\mathbf{Z}_2	O(2)	$L([x,v]) = x \times v$
P(2, \mathbf{C})	\mathbf{Z}_2	{SO(2), O(2)}	$L([x,v]) = \frac{1}{2} s \cdot x \times v, \quad s \in \mathbf{R}_+^*$
$L_m \quad (m > 2)$	\mathbf{Z}_m	--	$L(x,v) = E x, \quad E = \frac{1}{2} \ v\ ^2$
$F_m \quad (m > 2)$	\mathbf{Z}_m	SO(2)	$L_+(x,v) = s e^E x \quad s \in \mathbf{R}_+^*$ $L_-(x,v) = s e^{-E} x \quad s \in \mathbf{R}_+^*$
$S_m \quad (m > 1)$	\mathbf{Z}_m	{SO(2), SO(2)}	$L(x,y) = (2s_1 s_2 \rho + s_1^2 + s_2^2)^{1/2} x$

Tableau 3 - Classification des SO(3)-Variétés symplectiques