Sur les géodésiques qui coupent un convexe en courbure négative ou nulle

par
patrick iglesias

On montre comment l'existence d'une structure symplectique naturelle, sur l'espace des géodésiques d'une variété riemannienne, permet de mesurer l'ensemble des géodésiques qui coupent un convexe. Généralisant ainsi, au cas non plat, un formule classique de géométrie intégrale due à Crofton.

Ce petit article a pour but de souligner le rôle crucial de la structure symplectique dans ce type de problème.

Publié aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, série 6, vol. I, no 1, 1992 — patrick.iglesias@ens-lyon.fr— umpa ens lyon, 46 allée d'italie, 69364 lyon cedex 7.

1 Introduction

On sait que la mesure des droites d'un espace euclidien qui coupent un convexe est proportionnelle au volume du bord de ce convexe. C'est un résultat classique de géométrie intégrale : formule de Crofton [San76]. La mesure dont est muni l'espace des droites est la projection de la mesure de Haar du groupe des déplacements euclidiens. En effet, l'espace des droites est homogène pour ce groupe.

La condition d'homogénéité n'est pourtant pas nécessaire, on peut établir une formule analogue pour les géodésiques qui coupent un convexe dans le cas des variétés riemanniennes complètes, simplement connexes, à courbure négative ou nulle. Dans ce cas, l'espace des géodésiques est une variété munie naturellement de la mesure de Liouville associée à la forme symplectique canonique.

On connaît de nombreux cas pour lesquels l'espace des géodésiques est une variété, par exemple lorsque toutes les géodésiques sont fermées et de même longueur [Bes78]. Il est alors un peu plus compliqué (mais pas impossible) de compter les géodésiques qui coupent un convexe, chaque géodésique pouvant le traverser plusieurs fois.

2 Espace des géodésiques d'une variété riemannienne

On considère une variété différentiable X de dimension n, munie d'une métrique riemannienne g. On note SX le fibré unitaire tangent et λ la forme de contact définie sur SX par :

$$\lambda = \bar{u}\ dx, \tag{1}$$

où $u \in S_xX$ et $\bar{u} \in T_x^*X$ désigne le tranposé de u par la métrique g. Le feuilletage caractéristique de $d\lambda$ est appelé *feuilletage géodésique* de la variété riemannienne (X, g) : les projections sur X de ses courbes caractéristiques sont les géodésiques orientées de la métrique g. Il est engendré par le champ de Reeb θ défini par :

$$d\lambda(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda(\theta) = 1. \tag{2}$$

L'espace quotient $\mathcal{G} = SX/\ker d\lambda$ est l'espace des géodésiques orientées de la métrique g. Si $\mathcal{G}$ est une variété, elle hérite naturellement d'une structure symplectique définie par :

$$\pi^*\omega = d\lambda, \tag{3}$$

où π désigne la projection de SX sur $\mathcal{G}$. La dimension de $\mathcal{G}$ est $2(n-1)$. La variété des géodésiques $\mathcal{G}$ est alors orientée par le volume :

$$\mathrm{vol}_{\mathcal{G}} = \omega^{n-1}. \tag{4}$$

C'est ce volume que nous utiliserons par la suite pour mesurer les géodésiques qui coupent un convexe.

Exemple 1. Citons l'espace des droites de $\mathbf{R}^n$ (géodésiques de la métrique plate) symplectomorphe au cotangent de la sphère S^{n-1}. Citons encore l'espace des géodésiques de la sphère S^n, difféomorphe à la grassmannienne des 2-plans dans $\mathbf{R}^{n+1}$, qui se trouve ainsi munie d'une structure symplectique naturelle. Dans ces deux cas la variété des géodésiques est une orbite co-adjointe du groupe des isométries, c'est à dire du groupe des déplacements euclidiens dans le premier cas et du groupe des rotations dans le deuxième.

3 Cas de la courbure négative ou nulle

Le cas non homogène qui ressemble le plus au cas des droites d'un espace euclidien est sans doute celui-ci :

Proposition 1. *Soit X une variété simplement connexe munie d'une métrique riemannienne g complète, à courbure négative ou nulle. L'espace de ses géodésiques orientées est une variété symplectique exacte.*

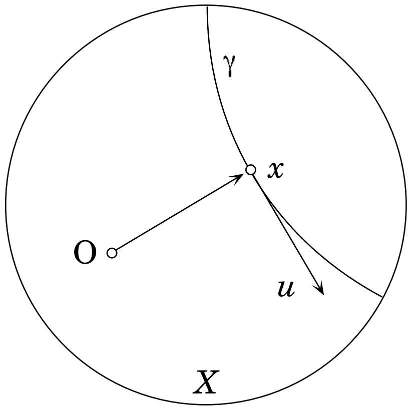

Figure 1: Repérage d'une géodésique γ.

Démonstration. Fixons un point $o \in X$. La courbure de g étant négative ou nulle, nous pouvons associer à toute géodésique γ de X son unique condition initiale $u \in SX$ au point le plus proche x de o :

La différentiabilité de cette application résulte de la différentiabilité des solutions des équations différentielles par rapport aux conditions initiales. La métrique g étant complète, cette application est une section globale de SX au dessus de $\mathcal{G}$. D'autre part, la distance d'une géodésique à un point fixe extérieur étant une fonction strictement convexe en courbure négative ou nulle, cette section est transverse au feuilletage géodésique. L'espace des géodésiques est donc une variété différentiable. L'existence d'une section globale de $\mathcal{G}$ assure l'exactitude de la forme symplectique ω. ∎

Question 1. Les différentes métriques complètes à courbure négative ou nulle, d'une variété simplement connexe, peuvent-elles définir des structures symplectiques non équivalentes sur leurs espaces des géodésiques ?

On se place dans les conditions de la proposition précédente. On dit qu'une sous-variété compacte Ω à bord lisse Σ est un *domaine convexe* de (X, g) si son intérieur est un ouvert non vide de X et si tout segment géodésique joignant deux points distincts du bord est entièrement contenu dans Ω. On note $\mathcal{G}_\Omega$ la sous-variété des géodésiques qui coupent Ω. La mesure de $\mathcal{G}_\Omega$ pour le volume $\mathrm{vol}_{\mathcal{G}}$ introduit plus haut est donné par la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Soit X une variété différentiable simplement connexe de dimension n, munie d'une métrique riemannienne complète g à courbure négative ou nulle. La mesure de l'ensemble des géodésiques traversant un domaine convexe Ω est proportionnel au volume riemannien du bord Σ de Ω, autrement dit :*

$$\int_{\mathcal{G}_\Omega} \mathrm{vol}_{\mathcal{G}} = c_n \int_\Sigma \mathrm{vol}_\Sigma, \tag{5}$$

où vol_Σ *désigne le volume riemannien induit par g sur Σ, et c_n est une constante qui ne dépend que de n.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{G}_\Sigma \subset \mathcal{G}$ la sous-variété des géodésiques tangentes à Σ, comme Ω est convexe : $\mathcal{G}_\Sigma = \partial\mathcal{G}_\Omega$. La forme symplectique ω étant exacte, on a alors :

$$\int_{\mathcal{G}_\Omega} \mathrm{vol}_{\mathcal{G}} = \int_{\mathcal{G}_\Sigma} \beta_\Sigma, \tag{6}$$

où β_Σ est une primitive de $\mathrm{vol}_{\mathcal{G}} \mid \mathcal{G}_\Sigma$. Mais $\mathcal{G}_\Sigma$ est isomorphe au fibré unitaire tangent $S\Sigma \subset SX$ (convexité de Ω), et on peut prendre pour β_Σ le volume défini par la forme de contact associée à g_Σ (qui est la forme induite par la forme de contact sur SX). On a donc :

$$\int_{\mathcal{G}_\Omega} \mathrm{vol}_{\mathcal{G}} = \int_{S\Sigma} \mathrm{vol}_{S\Sigma}\,. \tag{7}$$

la formule (5) est alors obtenue par application du théorème de Fubini. ∎

Bibliographie

[Bes78] Arthur L. Besse. *Manifolds all of whose Geodesics are Closed.* Springer-Verlag, 1978.

[San76] Luis A. Santalo. Integral geometry and geometric probability. In Gian-Carlo Rota, editor, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, volume I. Addison-Wesley, 1976.

Publié aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, série 6, vol. I, no 1, 1992.