Principes variationnels et géométrie symplectique

Patrick Iglesias
CMI
39, rue F. Joliot-Curie
13453 Marseille Cedex 13
patrick.iglesias@cmi.univ-mrs.fr

(édité le 2 mars 2003)

1 Le principe des travaux virtuels

Il s'agit de décrire le mouvement d'une particule de masse m repérée, dans l'espace, par sa position r. Cette particule subit une force extérieure F, dans le sens introduit par Newton. Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle ordinaire :

$$F(t, r(t), v(t)) = m\frac{dv(t)}{dt}, \quad v(t) = \frac{dr(t)}{dt}. \tag{1}$$

Changeons de siècle, on peut aussi interpréter les équations de Newton à partir du « principe des travaux virtuels » de D'Alembert : les équilibres d'un point matériel, soumis à l'influence de forces F_i sont les solution de l'équation :

$$\sum_i F_i \cdot \delta r = 0, \tag{2}$$

où δr est une variation[1] de r, compatible avec les contraintes existantes[2]. Nous verrons plus loin, par des exemples, comment se traite la question des contraintes dans ce genre de problème.

On peut rapprocher les équations de Newton avec celles de D'Alembert en considérant le vecteur $-mdv/dt$ comme la *force de l'inertie* à laquelle est soumise la particule lors de son mouvement. Désignons cette force d'inertie par la lettre I :

$$I = -m\frac{dv}{dt}. \tag{3}$$

Les équations de Newton deviennent :

$$(F + I) \cdot \delta r = 0, \tag{4}$$

en tout point r du mouvement et pour tout δr, compatible avec les contraintes. Les équations de Newton s'interprètent ainsi comme des équations

[1]Etant donné un point x d'une variété X, ce que nous appelons variation (au sens moderne) est un vecteur tangent δx à X, au point x, formellement : $\delta x \in T_x X$. Cette notation ancienne a été rénovée avec bonheur par J.-M. Souriau [Sou70].

[2]La transformation de l'équation $\sum_i F_i = 0$ en : $\sum_i F_i \cdot \delta r = 0$ trouve son intérêt dans le traitement des contraintes. Par exemple, si l'on veut traiter l'équilibre d'un point mlatériel sur une surface déquation $f = \text{cste}$, l'équation $\sum_i F_i \cdot \delta r = 0$ couplée à l'équation de contrainte $\operatorname{grad} f . \delta r = 0$ donnera immédiatement $\sum_i F_i \propto \operatorname{grad} f$.

d'équilibre entre la force extérieure F et la force de l'inertie I. C'est le point de vue dit des *travaux virtuels*.

Supposons maintenant que le mobile se déplace sans contrainte et que la force F dérive d'un potentiel U[3] :

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}. \tag{5}$$

On transforme ensuite l'équation des travaux virtuels par quelques manipulations algébriques :

$$\begin{aligned}
(F+I).\delta r &= -\frac{\partial U}{\partial r}(\delta r) - m\frac{dv}{dt}\cdot\delta r \\
&= -\frac{\partial U}{\partial r}(\delta r) - \frac{d}{dt}(mv\delta r) + mv\frac{d}{dt}(\delta r) \\
&= -\frac{\partial U}{\partial r}(\delta r) - \frac{d}{dt}(mv\delta r) + mv\delta v \\
&= \delta\left(\frac{mv^2}{2} - U\right) - \frac{d}{dt}(mv\delta r).
\end{aligned}$$

Posons ensuite :

$$L = \frac{mv^2}{2} - U, \tag{6}$$

c'est une fonction de (t, r, v), elle est définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, ou tout au moins sur un ouvert de cet espace. Cette fonction s'appelle le *lagrangien* du problème, elle a été introduite par Lagrange à la fin du dix-huitième siècle, dans sa *Mécanique Analytique* [Lag65]. L'équation de Newton devient après ce passage à travers le principe de D'Alembert :

$$\delta L = \frac{d}{dt}(mv\delta r). \tag{7}$$

On a l'habitude de présenter cette équation sous sa version intégrale, connue sous le nom de « principe de moindre action » de Maupertuis. On intègre les deux membres de cette équation le long d'un intervalle de temps quelconque $[t_a, t_b]$, et l'on suppose que la variation δr est nulle aux extrémités, on obtient une équation équivalente :

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} L dt = 0, \quad \text{pour tout} \quad t \mapsto \delta r, \quad \text{tel que} \quad \delta r(t_a) = \delta r(t_b) = 0. \tag{8}$$

[3] La force F est alors considérée comme un covecteur plutôt que comme un vecteur.

Le lecteur peut vérifier lui-même que les solutions de cette *équation aux variations* sont exactement les solutions de l'équation de Newton originale. Nous avons simplement interprété les solutions de l'équation de Newton comme les *courbes extrémales* de l'*action lagrangienne* :

$$A([t \mapsto r]) = \int_{t_a}^{t_b} L(t, r(t), v(t))dt \quad \text{avec} \quad v(t) = \frac{dr}{dt}. \tag{9}$$

Ainsi, le principe du calcul des variations consiste à sélectionner, selon un principe d'extremum, les *mouvement réels* de la particule, parmi tous ses *mouvements virtuels*, c'est-à-dire tous les chemins possibles $t \mapsto r$.

Remarque. Telle quelle cette construction n'a que peu d'intérêt, sinon que d'offrir un principe—que l'on peut apprécier diversement—aux lois de la mécanique Newtonienne. Mathématiquement parlant, le passage des équations de Newton aux équations aux variations de D'Alembert–Lagrange n'offre aucun intérêt, le problème est inchangé et la difficulté identique. Peut-être le choix de tel lagrangien plutôt qu'un autre a-t-il pu sember, dans certaines conditions, plus justifié que le choix explicite de l'expression d'une force ? ou bien l'utilisation de la terminologie quasi-religieuse : « moindre action » peut-elle forcer la foi ? Mais le fait est que cette construction aura le mérite de nous conduire à la *structure symplectique* de l'espace des solutions de ces équations ; de mettre en évidence cette structure très particulière de cet espace qui aurait pu resté cachée si nous en étions resté à l'expression initiale des équations de Newton. ▶

Nous pouvons élargir dès à présent le cadre des équations de la mécanique en changeant l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ pour une variété quelconque X. Nous définirons précisément les objets que nous venons d'introduire :

Définition 1. *On appelle* lagrangien *(d'ordre 1), sur une variété différentielle X, toute fonction différentiable L définie sur un ouvert V de $\mathbf{R} \times TX$ à valeurs réelles. On appelle* action *d'un chemin $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ l'intégrale :*

$$A(\gamma) = \int_a^b L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt. \tag{10}$$

On appelle solution du problème variationnel *associé au lagrangien L, tout chemin γ, extrémal pour l'action A, c'est-à-dire tel que :*

$$\delta A = 0 \quad \forall \delta\gamma \quad \textit{avec} \quad \delta\gamma(a) = \delta\gamma(b) = 0. \tag{11}$$

Puisque nous introduisons ici pour la première fois cette notation, il est peut-être nécessaire d'en préciser le sens. Une variation $\delta\gamma$ d'un chemin γ est le chemin obtenu en dérivant une famille à un paramètre γ_s par rapport à s, pour la valeur $s = 0$, autrement dit :

$$\delta\gamma = \left.\frac{\partial\gamma_s}{\partial s}\right|_{s=0}. \tag{12}$$

Cette variation est donc, elle aussi, un chemin mais tracé dans le fibré tangent TX, au dessus de γ, c'est-à-dire tel que : $\delta\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}X$. Puisque A est fonction de γ, la famille γ_s définit une famille d'actions $A_s = A(\gamma_s)$, la variation δA est évidemment le résultat de la dérivation :

$$\delta A = \left.\frac{\partial A(\gamma_s)}{\partial s}\right|_{s=0}. \tag{13}$$

On présente souvent les équations de ce problème variationnel sous la forme des équations dites d'Euler-Lagrange, obtenues en calculant naïvement la variation de l'action :

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial r}(\delta r) + \frac{\partial L}{\partial v}(\delta v)\right] dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\right](\delta r) dt + \int_a^b \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(\delta r)\right)\right] dt \end{aligned} \tag{14}$$

Le dernier terme de cette identité est nul puisque la variation est supposée à support compact, il reste donc le système :

$$\delta A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = 0. \tag{15}$$

Ce sont ces équations qui sont appelées équations d'Euler-Lagrange. Malheureusement si, comme on le verra plus loin, on peut donner facilement un sens intrinsèque au terme $\partial L/\partial v$, il n'en est pas de même du terme $\partial L/\partial r$. En effet, s'il avait un sens ce terme désignerait la dérivée partielle du lagrangien L à v fixé :

$$\frac{\partial L}{\partial r}(u) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{L(r + \varepsilon u, v) - L(r, v)}{\varepsilon}. \tag{16}$$

Or si $v \in T_r X$ alors $v \notin T_{r+\varepsilon u} X$, autrement dit : cette formule (16) n'a pas de sens ! ou alors localement, dans les coordonnées d'une carte. On pourrait, pour éviter ce problème, identifier les espaces tangents voisins (définir ce qu'on appelle une *connexion*) mais il n'est jamais bon d'introduire une structure notoirement étrangère au problème que l'on traite[4]. Nous allons voir d'ailleurs immédiatement comment nous pouvons avantageusement nous en passer.

2 Homogénéisation du lagrangien

Même si cela est équivalent il est parfois commode de chercher les solutions d'un problème variationnel sous forme de courbes non paramétrées dans l'espace des conditions initiales (t, x, v) plutôt que sous la forme de courbe paramétrées : $t \mapsto x(t)$, dans l'espace X. L'espace des (t, r, v) est l'espace naturel de définition du lagrangien L et qu'il est donc tout aussi naturel d'y rechercher les solutions du problème variationnel associé. Nous le noterons Y et l'appellerons l'*espace d'évolution du système*, ou encore *espace des conditions initiales.*

Choisissons un paramétrage auxiliaire $s \mapsto (t(s), x(s), v(s))$ de la courbe $\{(t, x(t), v(t))\}_t$, définie dans Y par le chemin $\gamma : t \mapsto x(t)$. Introduisons les dérivées de (t, x, v) par rapport à s et notons :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{ds}, \tag{17}$$

de telle sorte que :

$$A = \int_{s_a}^{s_b} L(t, x, \dot{x}/\dot{t})\dot{t} ds = \int_{s_a}^{s_b} l(q, \dot{q}) ds, \tag{18}$$

avec :

$$q = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad l(q, \dot{q}) = L(t, x, \dot{x}/\dot{t})\dot{t}, \tag{19}$$

[4]On ne peut pas évacuer toutefois l'idée que l'introduction d'une connexion soit justifiée dans certains cas...

Le lagrangien l est maintenant définit sur un ouvert de $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$, il ne dépend pas du paramètre s et il est évidemment homogène de degré 1. Nous pouvons lui appliquer la formule d'Euler :

$$l(q, \dot{q}) = p(\dot{q}), \quad \text{où} \quad p = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}}. \tag{20}$$

La notation $\partial l / \partial \dot{q}$ désigne l'application linéaire tangente de la restriction $l \mid T_q Q$. C'est donc une application linéaire bien définie, de $T_q Q$ à valeur réelle, c'est-à-dire : un élément de l'espace vectoriel dual $T_q^* Q$. Nous noterons P l'application $(q, \dot{q}) \mapsto (q, p)$, et l'appellerons l'*application de Legendre*[5].

$$P : TQ \longrightarrow T^*Q, \quad P(q, \dot{q}) = (q, p) \quad p = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}} = D(l \mid T_q Q)_{\dot{q}} \in T_q^* Q. \tag{21}$$

Arrêtons nous un instant sur cette formule. A ce stade nous pouvons oublier comment nous en sommes arrivés là, oublier notre particule de départ, l'homogénéisation du lagrangien, et considérer que :

1. q est un point courant d'une variété quelconque Q,
2. $\dot{q}$ est un vecteur tangent à Q au point q,
3. l est une fonction réelle, homogène[6] de degré 1, définie sur un ouvert de l'espace tangent TQ privé de la section nulle.

Ce sera le cadre général du calcul lagrangien des variations comme nous l'entendons. Cet espace Q est appelé en mécanique *espace des configurations*, car chaque point $q \in Q$ représente un état possible du système étudié : *une configuration*. Dans le cas d'une particule c'est comme nous l'avons vu $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, ce sera $\mathbf{R} \times (\mathbf{R}^3)^N$ dans le cas d'un système à N particules en interaction, ce sera $\mathbf{R} \times SO(3)$ dans le cas d'un solide etc. etc. Dans chacun de ces cas, un mouvement virtuel est une courbe (non paramétrée) de Q, et parmi tous ceux-là les mouvements réels.

[5] Attention, cette dénomination n'est pas usuelle

[6] Nous dirons homogène pour positivement homogène, c'est-à-dire homogène par multiplication d'un nombre strictement positif

Revenons maintenant à l'écriture de l'action lagrangienne A le long de la courbe $s \mapsto (q, \dot{q})$:

$$A = \int_{s_a}^{s_b} p(\dot{q}) ds = \int_{s_a}^{s_b} p\left(\frac{dq}{ds}\right) ds \tag{22}$$

Considérons la forme de Liouville λ définie sur l'espace cotangent T^*Q à Q, elle est définie par :

$$\forall y = (q, p) \in T^*Q, \quad \forall \delta y \in T_y T^*Q \quad : \quad \lambda(\delta y) = p(\delta q), \tag{23}$$

où δq est la projection du vecteur δy sur Q ; c'est donc un vecteur tangent à Q au point q, nous l'évaluons sur la un-forme p.

Soit ϖ l'image réciproque de λ sur TQ, par l'application de Legendre définie plus haut :

$$\varpi = P^* \lambda. \tag{24}$$

Cette forme ϖ est appelée *forme de Cartan* associée au lagrangien l.

Introduisons le *relevé holonome* du chemin γ, qui décrit le mouvement virtuel du système, sur lequel se fait l'intégration du lagrangien :

Définition 2. *Soit $\gamma : s \mapsto q$ un chemin dans Q, nous appellerons* relevé holonome *de γ le chemin $s \mapsto (q, \dot{q})$ dans TQ tel que $\dot{q} = dq/ds$.*

L'action A s'écrit alors sous forme condensée :

$$A = \int_{\bar{\gamma}} \varpi. \tag{25}$$

Toute variation de γ entraîne une variation de l'action, donnée par la formule suivante, que nous ne démontrerons pas :

$$\delta A = \int_{\bar{\gamma}} d\varpi(\delta\bar{\gamma}) + \int_{\partial\bar{\gamma}} \varpi(\delta\bar{\gamma}), \tag{26}$$

où $\delta\bar{\gamma}$ est la variation du relevé holonome $\bar{\gamma}$ associée à la variation $\delta\gamma$. Il est peut-être utile de préciser le sens des notations utilisées :

1. γ est en réalité *une courbe* de Q, c'est un arc $s \mapsto q$, modulo reparamétrage.

2. $\delta\gamma$ est une *variation* de γ, c'est une courbe $s \mapsto \delta q$ du tangent TQ, telle que $\delta q \in T_q Q$; on dit que c'est un relevé de γ dans TQ.

3. La courbe $\delta\bar{\gamma}$ n'est pas un relevé quelconque dans TTQ de $\bar{\gamma}$, c'est le relevé holonome de la variation $\delta\gamma$, autrement dit :

$$\delta\bar{\gamma} : s \mapsto \frac{d}{ds}[\delta\gamma(s)]. \tag{27}$$

   Nous dirons que c'est une *variation holonome* de $\bar{\gamma}$.

4. $d\varpi(\delta\bar{\gamma})$ est le contracté de $d\varpi$ avec la variation $\delta\bar{\gamma}$, c'est une un-forme concentrée sur la courbe $\bar{\gamma}$.

Compte tenu de ces précisions, la variation δa s'écrit encore :

$$\delta A = \int_{s_a}^{s_b} d\varpi \left(\delta\bar{\gamma}(s), \frac{d}{ds}\bar{\gamma}(s) \right) ds + [\varpi(\delta\bar{\gamma}(s))]_{s_a}^{s_b}. \tag{28}$$

Remarque. Cette écriture est relativement compliquée du fait du nombre d'espaces mis en jeux par cette construction, qui va de Q : l'espace de configuration à son tangent TQ pour la définition du lagrangien et de la forme de Cartan, jusqu'à l'espace tangent TTQ de TQ qui héberge les variations nécessaires. Mais cette relative complexité ne doit pas nous effrayer, en réalité les choses sont simples. Utilisons une carte locale de Q, $q = (q_i)$, soit $p = (p_i)$ les coordonnées de p dans la base duale de la base associée à cette carte. Si le chemin γ est contenu complètement dans le domaine de cette carte, la variation de l'action est donnée par :

$$\delta A = \int_{s_a}^{s_b} \sum_{i=1}^{n} [\delta p_i \frac{dq_i}{ds} - \frac{dp_i}{ds}\delta q_i] ds + \sum_{i=1}^{n} [p_i \delta q_i]_{s_a}^{s_b}. \tag{29}$$

La lettre n désigne la dimension de l'espace Q. ▶

Revenons à la formule précédente 28 de la variation de l'action, et notons que :

Proposition 1. *Une condition suffisante pour que γ soit une solution du problème est que $\bar{\gamma}$ soit tangent en tout point au noyau de $d\varpi$, c'est-à-dire : soit contenue dans son* feuilletage caractéristique.

Démonstration. En effet, si $\bar{\gamma}$ est dans le feuilletage caractéristique de $d\varpi$, c'est-à-dire si :

$$\frac{d}{ds}\bar{\gamma}(s) \in \ker d\varpi, \tag{30}$$

alors la variation δA de l'action est nulle pour toute variation arbitraire de $\bar{\gamma}$ (formule 28), et *a fortiori* pour des variations holonomes. ▮

Il faut noter que le feuilletage caractéristique de $d\varpi$ est au moins de dimension deux sur TQ, en effet l étant homogène de degré un sur TQ, l'application de Legendre est homogène de degré zéro, c'est-à-dire invariante sous l'action des dilatations positives $(q, \dot{q}) \mapsto (q, \alpha\dot{q})$, avec $\alpha > 0$:

$$P(q, \alpha\dot{q}) = P(q, \dot{q}) \quad \forall (q, \dot{q}) \in TQ - Q \quad \forall \alpha > 0. \tag{31}$$

L'invariance de l'application de Legendre P nous conduit naturellement à introduire un nouvel espace, sur lequel P est définie : le sphérisé du tangent $SQ = (TQ - Q)/]0, \infty[$.

3 Le sphérisé du tangent

La forme de Cartan ϖ est donc invariante par les dilatations positives, d'autre part, les demi-droites engendrées par ces dilations sont dans le noyau de ϖ. On en conclut (par la formule de Cartan par exemple) que ces demi-droites sont dans le noyau de $d\varpi$. Puisque $d\varpi$ est antisymétrique, son rang est pair. La dimension de TQ étant paire son noyau est de dimension paire et donc au moins égal à deux.

Mais nous venons de montrer que nous pouvons nous débarrasser de cette direction inessentielle dans le noyau de $d\varpi$, qui ne correspond qu'à la liberté, qui nous est donnée par l'homogénéité du lagrangien l, de reparamétrer les solutions du problème.

Nous considérerons donc l'espace des demi-droites tangentes, c'est-à-dire le quotient de TQ, privé de la section nulle, par les dilatations positives $(q, \dot{q}) \mapsto (q, \alpha\dot{q})$, $\alpha > 0$. Cet espace est une variété fibrée encore sur Q, chaque fibre au dessus d'un point q est l'espace des demi-droites tangentes en q, nous noterons $[\dot q]$ la demi-droite engendrée par $\dot q$, $\dot q \neq 0$. Nous noterons S_qQ l'espace des demi-droites tangentes au point q. La lettre S pour sphère puisque S_qQ est topologiquement une sphère. Nous noterons SQ le quotient total $[TQ-Q]/]0,\infty[$, et nous l'appellerons le *sphérisé du tangent*, il est de dimension $2n-1$, et nous noterons π la projection de $TQ-Q$ sur SQ :

$$SQ = [TQ-Q]/]0,\infty[\quad \pi : TQ-Q \longrightarrow SQ \quad \pi(q,\dot q) = (q,[\dot q]). \tag{32}$$

Puisque l'application de Legendre est invariante par dilatation, elle se factorise à travers SQ :

$$\begin{tikzcd} TQ-Q \arrow[d] \arrow[dr, "P"] & \\ SQ \arrow[r, "P_S"'] & T^*Q \end{tikzcd}$$

$$P_S : SQ \longrightarrow T^*Q \quad P = P_S \circ \pi : P_S(q,[\dot q]) = P(q,\dot q) = (q,p). \tag{33}$$

Nous noterons ϖ_S l'image directe sur SQ de la forme de Liouville λ définie sur T^*Q, mais nous l'appellerons encore forme de Cartan :

$$\varpi = \pi^* \varpi_S. \tag{34}$$

A tout chemin γ nous pouvons associer son relevé holonome sur SQ, obtenu par projection de relevé holonome sur TQ, c'est la courbe des direction tangentes de γ. Nous le noterons $[\bar\gamma]$. L'expression 28 de la variation de l'action le long du chemin γ peut-être considérée comme s'appliquant au relevé holonome de γ dans SQ :

$$\delta A = \int_{s_a}^{s_b} d\varpi_S \left(\delta[\bar\gamma(s)], \frac{d}{ds}[\bar\gamma(s)] \right) ds + [\varpi([\delta\bar\gamma(s)])]_{s_a}^{s_b}. \tag{35}$$

Mais la variété SQ est de dimension impaire, le noyau de $d\varpi_S$ est au moins de dimension un, supposons qu'il soit de dimension constante exactement égale à un, alors

Proposition 2. *Soit l un lagrangien homogène de degré un défini sur le tangent d'un espace de configuration Q. Si la dimension du feuilletage* *caractéristique de $d\varpi_S$, définie sur le sphérisé SQ, est constante et égale à 1, les solutions du problème variationnel associé à l sont les courbes intégrales du feuilletage caractéristique de $d\varpi_S$.*

DÉMONSTRATION. Les courbes cherchées sont les solutions d'un système différentiel du premier ordre sur TQ comme le montre les équations d'Euler-Lagrange, écrites dans une carte locale de TQ :

$$\delta A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dq}{ds} = \dot{q} \quad \frac{d\dot{q}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{q}}\right).$$

Ainsi, par chaque point $(q, [\dot{q}]) \in SQ$ passe une solution unique, mais comme nous l'avons vu plus haut : la courbe intégrale du feuilletage caractéristique passant par ce point est solution. C'est donc la solution cherchée. La condition suffisante énoncée plus haut est ainsi devenue nécessaire. ∎

Parce que cette situation particulière est importante, on introduit un nouveau terme de vocabulaire :

DÉFINITION 3. *On appelle* forme présymplectique *toute deux-forme fermée dont le noyau est de dimension constante.*

DIGRESSION. Je voudrais attirer l'attention du lecteur sur le seul point délicat de cette proposition. Le problème que nous avons à résoudre est un cas particulier du problème général suivant : soit X une variété différentielle et β une un-forme sur X, appelons *action d'un chemin* γ de X l'intégrale de β sur γ

$$A = \int_\gamma \beta, \tag{36}$$

La variation de l'action, associée à une variation $\delta\gamma$, est donnée par la formule générale, que nous ne démontrerons pas ici :

$$\delta A = \int_\gamma d\beta(\delta\gamma) + [\beta(\delta\gamma)]_{\partial\gamma}. \tag{37}$$

Il est évident que l'action est extrémale si et seulement si γ est tangent en tout point au feuilletage caractéristique de $d\beta$. Mais dans ce cas la variation du chemin $\delta\gamma$ est arbitraire : c'est un relevé quelconque de γ dans TX. Or, dans le cas qui nous occupe, celui d'un lagrangien l défini sur TQ, la variation est holonome. Nous n'obtenons un résultat identique seulement parce que nous avons fait l'hypothèse que le feuilletage caractéristique de $d\varpi_S$ est constant, de dimension 1, et parce que les courbes que nous cherchons sont des solutions d'un système différentiel ordinaire. Il faut noter que cela implique en particulier que, dans ce cas, les solutions du problème général, pour $X = TQ$ et $\beta = \varpi_S$, sont nécessairement les relevés holonomes de chemins dans Q. ▶

Ainsi que nous venons de le voir, dans tous les cas l'espace intéressant est le sphérisé du tangent, ou plutôt l'ouvert de définition Y de la forme de Cartan, que nous noterons alors ϖ_Y. Comme cet espace est important nous lui donnerons un nom :

DÉFINITION 4. *Nous appellerons* espace d'évolution *du système, le plus grand ouvert Y du sphérisé du tangent SQ, sur lequel est défini l'application de legendre P_S, et donc la forme de Cartan ϖ_S.*

4 La structure symplectique

Nous pouvons faire apparaître maintenant la structure symplectique promise, définie sur l'espace des mouvements du système. Nous considérerons le cas évoqué au paragraphe précédent d'une deux forme $d\varpi_Y$ présymplectique. Rappelons qu'alors une solution, un mouvement du système, est une courbe intégrale de son feuilletage caractéristique. L'espace des mouvements est donc l'ensemble de ces courbes intégrales, nous le noterons $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = Y/\ker d\varpi_Y. \tag{38}$$

Les espaces de feuilles, comme $\mathcal{M}$, n'ont pas toujours de bonnes propriétés topologiques, mais si c'est le cas : si $\mathcal{M}$ est une variété telle que la projection associée :

$$\pi : Y \mapsto \mathcal{M} \tag{39}$$

soit une submersion alors elle possède une deux-forme fermée ω telle que :

$$\pi^*\omega = d\varpi_Y, \quad \ker\omega = \{0\}. \tag{40}$$

Rappelons que :

Définition 5. *On appelle forme symplectique toute deux-forme fermée non dégénérée, et variété symplectique toute variété munie d'une forme symplectique.*

Proposition 3. *Soit Q une variété et l un lagrangien homogène de degré 1. Soit ϖ_Y la forme de Cartan associée, définie sur l'espace d'évolution $Y \subset SQ$. Si $d\varpi_Y$ est présymplectique et si l'espace des solution $\mathcal{M} = Y/\ker d\varpi_Y$ est une variété, alors il existe sur $\mathcal{M}$ une forme symplectique ω définie par $\pi^*\omega = d\varpi_Y$.*

Démonstration. Pour définir ω en un point m de $\mathcal{M}$ il suffit de donner la valeur qu'elle prend sur deux vecteurs tangents δm et $\delta' m$, soit :

$$\omega(\delta m, \delta' m) = d\varpi_Y(\delta y, \delta' y), \tag{41}$$

où

$$\pi(y) = m, \pi_*(\delta y) = \delta m, \pi_*(\delta' y) = \delta' m. \tag{42}$$

Il faut simplement vérifier cette valeur ne dépend pas du représentant y de m ni des vecteurs tangents δy et $\delta' y$, pourvu que $\pi_*(\delta y) = \delta m$ et $\pi_*(\delta' y) = \delta' m$. Nous avons supposé que la projection π est une submersion, cela implique en particulier que l'on peut trouver une section φ de la projection π, définie sur un voisinage U de m, qui envoie m sur y. L'image $\varphi(U)$ de cette section est une sous-variété transverse au feuilletage, qui coupe chaque feuille qu'elle rencontre en un point et un seul. Le théorème de redressement du flot affirme qu'il existe alors un voisinage $V \subset Y$ de y, difféomorphe au produit d'un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ par $\varphi(U)$, qui identifie les segments du type $]-\varepsilon, \varepsilon[\times\{y\}$ à l'intersection de la feuille passant par y avec V. Grâce à cette identification, le vecteur δy qui relève δm s'écrit $\delta y = (\delta s, \delta m)$, de même $\delta' y = (\delta' s, \delta' m)$. Il est clair ainsi que $d\varpi_Y(\delta y, \delta' y)$ ne dépend pas des composantes δs et $\delta' s$ qui sont dans le noyau de $d\varpi_Y$. Il reste à vérifier l'indépendance par rapport au point y choisi, c'est encore une conséquence du théorème du redressement du flot. Soit z un autre point de la feuille m, W et ψ l'analogue, pour le point z, de V et φ. Pour que δz relève δm il faut évidement que $\delta z = (*, \delta m)$, où $*$ est quelconque. ∎

REMARQUE. Il faut à la fois apprécier cette structure qui nous est offerte avec les solutions du problème et relativiser son importance, c'est-à-dire comprendre ce qu'elle représente du problème dont elle est issue. Il faut noter en particulier que ce n'est pas parce que ω est la projection (image directe) d'une forme exacte qu'elle est elle-même exacte. Nous verrons des exemples du contraire. Mais c'est vrai localement, pour tout mouvement m il existe un voisinage U de m sur lequel ω est exacte, nous pouvons d'ailleurs prendre le même voisinage que précédemment sur lequel $\omega = \varphi^*(d\varpi_Y)$. Si nous pensons que le rôle d'une deux-forme c'est d'être intégrée sur une deux-chaîne, et si cette deux-chaîne est suffisamment petite pour être contenue dans un voisinage de trivialisation comme U alors $\int_\sigma \omega = \int_{\varphi(\sigma)} d\varpi_Y = \int_{\varphi(\partial\sigma)} \varpi_Y$, notons γ le contour d'intégration : $\gamma = \partial\varphi(\sigma) = \varphi(\partial\sigma)$, alors :

$$\int_\sigma \omega = \int_\gamma \varpi_Y = \int_\gamma l = A(\gamma). \tag{43}$$

Autrement dit : la *forme symplectique c'est l'action*; ou plutôt, c'est tout ce qu'il est possible de se rappeler de l'action originale du système lorsque on ne considère que l'espace de ses mouvements. Nous verrons plus loin comment cette remarque nous permet de démontrer facilement, par exemple, la formule de Crofton sur la mesure des droites qui coupent un domaine, et donc de l'étendre au cas général d'un problème variationnel. ▶

Examinons maintenant sur quelques exemples ce que nous donne cette construction.

EXEMPLE 1 (LE POINT MATÉRIEL). Revenons au point matériel de masse m, $Q = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Dans les variables (t, r, v) lagrangien L vaut :

$$L = \frac{mv^2}{2} - U. \tag{44}$$

Il induit sur TQ le lagrangien :

$$l = m(\dot{r}^2/2\dot{t}) - U\dot{t}, \quad q = (t, r) \in Q, \quad \dot{q} = (\dot{t}, \dot{r}) \in T_qQ, \quad \dot{t} \neq 0. \tag{45}$$

L'application $(q, \dot{q}) \mapsto p$ est donnée par :

$$(q, \dot{q}) \mapsto p = \begin{bmatrix} -m(\dot{r}^2/2\dot{t}^2) - U & (m\dot{r}/\dot{t}) \end{bmatrix}. \tag{46}$$

L'espace d'évolution est défini par :

$$Y = \{(q, \dot{q}) \mid \dot{t} \neq 0\} \sim \mathbf{R} \times T\mathbf{R}^3, \tag{47}$$

il s'identifie avec $\mathbf{R} \times T\mathbf{R}^3$ en faisant $\dot{t} = 1$, la forme de Cartan devient :

$$\varpi_Y = mv \cdot dr - hdt \quad \text{avec} \quad h = \frac{mv^2}{2} + U. \tag{48}$$

La fonction h est appelé le *hamiltonien du système*. En se rappelant que $F = -\partial U/\partial r$, la dérivée extérieure $d\varpi_Y$ vaut :

$$d\varpi_Y(\delta y, \delta' y) = \langle m\delta v - F\delta t, \delta' r - v\delta' t\rangle - \langle m\delta' v - F\delta' t, \delta r - v\delta t\rangle\,, \tag{49}$$

où δy et $\delta' y$ sont deux vecteurs tangents à Y au point $y = (t, r, v)$. Comme on peut le constater, on retrouve bien les équations de Newton comme les équations du noyau de $d\varpi_Y$:

$$\delta y = \frac{dy}{ds} \in \ker d\varpi_Y \quad \Leftrightarrow \quad \delta r = v\delta t \quad \text{et} \quad m\delta v = F\delta t. \tag{50}$$

Les courbes intégrales du feuilletage caractéristique de $d\varpi_Y$, ou ce qui est équivalent : leur projection $y \mapsto (t, r)$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^4$, sont les mouvements de la particule.

Exemple 2 (La variété des droites). L'exemple de la variété des droites est un cas particulier d'espace de géodésiques que nous verrons en toute généralité plus loin. Soit $Q = \mathbf{R}^n$ et l le lagrangien homogène défini sur $TQ \sim \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ par :

$$l(q, \dot{q}) = \|\dot{q}\| \tag{51}$$

La double barre $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle. L'application de Legendre est donnée par :

$$P(q, \dot{q}) = (q, \bar{u}) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|}, \tag{52}$$

où $\bar{u}$ désigne le transposé du vecteur u pour la métrique euclidienne. Nous voyons que nous pouvons naturellement identifier l'espace SQ avec le produit direct $\mathbf{R}^n \times S^{n-1}$, $Y = SQ$. La forme de Cartan s'écrit :

$$\varpi_Y = \bar{u}dq, \quad y = (q, u) \in Y. \tag{53}$$

Sa dérivée extérieure est donnée par :

$$d\varpi_Y(\delta y, \delta' y) = \langle \delta u, \delta' q \rangle - \langle \delta' u, \delta q \rangle \,. \tag{54}$$

Un vecteur δy tangent à Y au point y est dans le noyau de $d\varpi_Y$ si :

$$\langle \delta u, \delta' q \rangle - \langle \delta' u, \delta q \rangle = 0 \quad \forall \delta' u \in T_u S^{n-1}, \forall \delta' q. \tag{55}$$

Pour résoudre ce type d'équation avec contrainte, on fixe le vecteur tangent δy et on considère $d\varpi(\delta y, \cdot)$ comme une un-forme linéaire, que l'on peut noter $d\varpi(\delta y)$, ensuite on remarque que $\delta' u \in T_u S^{n-1}$ est équivalent à $\bar{u}\delta' u = 0$, l'équation précédente devient alors :

$$\delta' u \in \ker \bar{u} \Rightarrow (\delta' q, \delta' u) \in \ker d\varpi(\delta y). \tag{56}$$

On utilise maintenant le *théorème des multiplicateurs de Lagrange* :

Théorème (Lagrange). *Soit $A : E \longrightarrow F$ et $B : E \longrightarrow G$ deux opérateurs linéaires :*

$$\ker A \subset \ker B \quad \Rightarrow \quad \exists C : F \longrightarrow G : B = CA. \tag{57}$$

qui nous donne :

$$\delta y = (\delta q, \delta u) \in \ker d\varpi \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbf{R} : \delta q = \alpha u, \delta u = 0. \tag{58}$$

Autrement dit, le feuilletage caractéristique de $d\varpi$ est engendré par le champ de vecteurs ξ suivant :

$$\ker d\varpi = \mathbf{R}\xi \quad \text{avec} \quad \xi(q, u) = (u, 0). \tag{59}$$

La courbe intégrale $\Delta(q, u)$ passant par le point $y = (q, u)$ est la droite affine de $\mathbf{R}^n$, de vecteur directeur u et passant par q :

$$\Delta(q, u) = \{(q + su, u) \in Y \mid s \in \mathbf{R}\}. \tag{60}$$

L'espace $\mathcal{M}$ des solutions du problème variationnel en question est donc l'espace des droites affines de $\mathbf{R}^n$. Pour écrire la forme symplectique, caractérisons la droite $\Delta(q, u)$ par u, évidemment, puisqu'il est conservé, et par la projection orthogonale x de q sur u, autrement dit :

$$\Delta(u, q) \sim (u, x) \quad \text{avec} \quad x = [\mathbf{1} - u\bar{u}]q. \tag{61}$$

Cela nous permet d'identifier $\mathcal{M}$ avec le fibré tangent à la sphère S^{n-1} :

$$\mathcal{M} \simeq TS^{n-1}, \tag{62}$$

qui peut être aussi considéré comme une sous-variété de Y, section de la projection canonique $\pi : Y \longrightarrow \mathcal{M}$. Pour déterminer la forme symplectique il suffit de restreindre la forme $d\varpi$ à TS^{n-1} :

$$\omega(\delta m, \delta' m) = \langle \delta u, \delta' x \rangle - \langle \delta' u, \delta x \rangle \quad \text{avec} \quad m = (u, x) \in TS^{n-1}. \tag{63}$$

Exemple 3 (Le théorème de Crofton). Le théorème de Crofton (dans une version simplifiée) démontre l'existence d'une mesure μ, unique à un facteur munltiplicatif près, définie sur l'espace des droites du plan $\mathbf{R}^2$, invariante par le groupe des déplacements euclidiens $x \mapsto Ax+b$, où $A \in \mathrm{O}(2)$ et $b \in \mathbf{R}^2$. Cette situation est facile à généraliser à $\mathbf{R}^n$. On peut montrer ensuite (c'est le théorème proprement dit) que la mesure des droites qui coupent un domaine convexe compact Ω est proportionnelle au périmètre du bord de Ω. Nous allons voir comment ce théorème, à l'apparence mystérieuse, est une conséquence, presque triviale, de la nature symplectique de la variété des doites.

Les constructions précédentes nous indiquent qu'il existe, sur l'espace $\mathcal{D}_n$ des droites orientées de $\mathbf{R}^n$, une forme symplectique naturelle ω. Puisque la variété $\mathcal{D}_n$ est de dimension $2(n-1)$, et que la forme ω est non-dégénérée, la puissance extérieure $\mathrm{vol}_\omega = \omega^{\wedge(n-1)}$ est une forme volume de $\mathcal{D}_n$. Ce volume oriente donc naturellement variété des droites de $\mathbf{R}^n$. Dans notre cas : $n = 2$, le volume est la forme symplectique elle-même. Il faut noter à ce propos que la variété des droites (orientées !) du plan qui est, nous l'avons vu, l'espace tangent au cercle S^1, est difféomorphe au cylindre[7] $S^1 \times \mathbf{R}$. Considérons maintenant un domaine Ω strictement convexe et compact du plan $\mathbf{R}^2$, bordé par une courbe fermée $\Sigma = \partial\Omega$. Soit $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des droites qui coupent Ω, c'est un domaine compact de la variété des droites $\mathcal{D}_2$. On peut en effet obtenir $\tilde{\Omega}$ comme l'image, dans $\mathcal{D}_2$, du produit $\Sigma \times \Sigma$ par l'application j_Ω qui à deux points $(x, y) \in \Sigma \times \Sigma$ associe la droite unique qui passe par ces deux points. Cette application est un plongement et n'est définie que sur le produit

[7] A ce propos, le lecteur peut vérifier que la variété des droites non-orientées est le ruban de Möbius, lui même non-orientable.

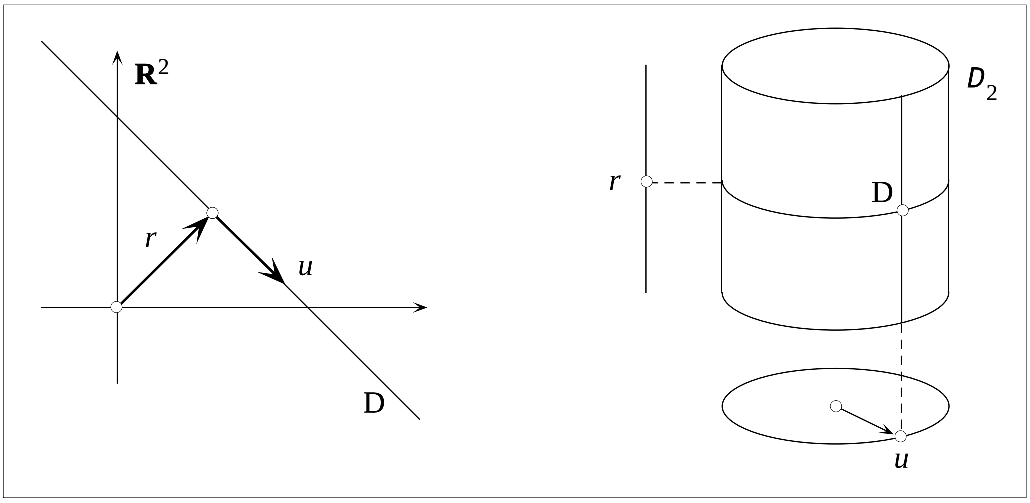

Figure 1: La variété des droites du plan

$\Sigma \times \Sigma$ privé de la diagonale Σ. Son image est un cylindre dont le bord est constitué de deux composantes : les sous-variétés des droites tangentes à Σ, orientées dans un sens et dans l'autre. Ces deux bords sont obtenus comme les différentes limites $\lim_{y \longrightarrow x} j_\Omega(y,x)$ et $\lim_{y \longrightarrow x} j_\Omega(x,y)$, quand x parcourt Σ. La mesure des droites qui coupent le domaine Ω est donc l'intégrale

$$\mu(\tilde{\Omega}) = \frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} \omega = \frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} d\lambda = \frac{1}{2}\int_{\partial\tilde{\Omega}} \lambda \tag{64}$$

où λ est la primitive $\bar{u}dx$ de ω, $u \in S^1$ et $x \in \mathbf{R}^2$ avec $u.x = 0$. Le coefficient $1/2$ vient de ce que nous ne considérons que les droites modulo orientation. Rappelons que le couple (u,x) représente la droite $D = \{x + tu \mid t \in \mathbf{R}\}$, orientée par u. Orientons la courbe Σ, c'est-à-dire choisissons un vecteur unitaire $r \mapsto u$, où $r \in \Sigma$. Le bord $\partial\tilde{\Omega}$ du domaine des droites qui coupent Ω est donc la réunion des images des deux applications :

$$r \mapsto (u, x = [\mathbf{1} - u\bar{u}]r) \text{ et } r \mapsto (-u, x = [\mathbf{1} - u\bar{u}]r). \tag{65}$$

Ayant convenablement orienté le cylindre $\mathcal{D}_2$ il vient alors :

$$\mu(\tilde{\Omega}) = \int_\Sigma \bar{u}d([\mathbf{1} - u\bar{u}]r) = \int_\Sigma \bar{u}dr - \int_\Sigma \bar{u}d(u\bar{u}r), \tag{66}$$

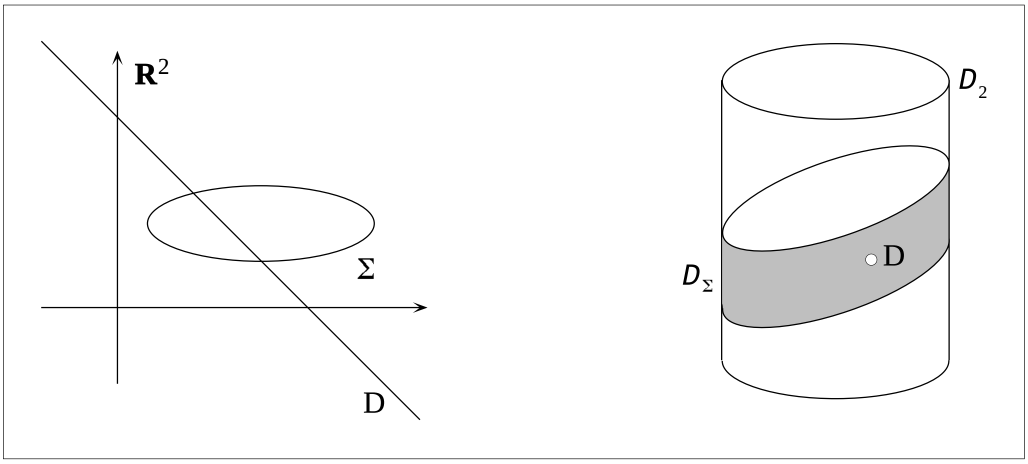

Figure 2: Le domaine des droites qui coupent un convexe

or :

$$\int_\Sigma \bar{u} d(u\bar{u}r) = \int_\Sigma (\bar{u}r)\bar{u}du + \int_\Sigma d(\bar{u}r), \tag{67}$$

mais $\bar{u}du = 0$ car u est unitaire et comme la courbe Σ est suposée fermée :

$$\int_\Sigma d(\bar{u}r) = \bar{u}r \mid_{\partial\Sigma} = 0. \tag{68}$$

Il reste donc enfin :

$$\mu(\tilde{\Omega}) = \frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} \omega = \int_\Sigma \bar{u}dr = \mathrm{Long}(\Sigma). \tag{69}$$

C'est ce que nous voulions vérifier : la mesure des droites qui coupent un domaine strictement convexe compact à bord lisse est proportionnel au périmètre de son bord. Ce qui précède est une spécialisation, dans ce cas de la variété des droites du plan, de l'argument général de la remarque 4. Dans le cas général des droites de $\mathbf{R}^n$, on montre de la même manière que la mesure des droites qui coupent un domaine strictement convexe, compact à bord lisse est proportionnel au volume de son bord. Les domaines convexes mais non strictement convexes sont obtenus, comme d'habitude, par des procédés de limite.

5 Le point de vue hamiltonien

Dans ce qui suit nous supposerons que le lagrangien l est défini sur tout $TQ - Q$, c'est-à-dire $Y = SQ$. Il est facile d'adapter ce qui va suivre au cas où Y est un ouvert de SQ.

L'intérêt de la construction précédente d'homogénéisation réside en partie dans ce qu'elle introduit naturellement le sphérisé du tangent, qui est essentiel dans la description du problème, sa résolution et l'introduction de la structure symplectique sur l'espace des solutions. Mais c'est une variété abstraite, obtenue par quotient, et difficile à manipuler concrètement. Il est plus agréable de travailler sur le fibré tangent, une solution consisterait à choisir une section de la projection $\pi : TQ - Q \longrightarrow SQ$. Cela est possible en effet puisque la fibration principale π est à groupe contractile. On pourrait aussi munir la variété Q d'une métrique riemannienne auxiliaire et de choisir le sous-fibré unitaire pour cette métrique. Mais cette méthode introduirait un objet extérieur au problème, cela peut se faire mais ce n'est pas nécessairement une bonne idée. Une autre méthode, plus naturelle, consiste à choisir un niveau du lagrangien l, par exemple, si la valeur 1 est atteinte :

$$\Sigma = l^{-1}(1). \tag{70}$$

Mais pour que Σ soit une bonne section de π il faut s'assurer de deux choses :

1. Chaque demi droite $\alpha\dot{q}$, $\alpha > 0$ et $\dot{q} \neq 0$ coupe Σ en un point et un seul.
2. L'hypersurface Σ est une sous-variété de $TQ - Q$, c'est-à-dire : son application linéaire tangente dl ne s'annule nulle part.

La première condition s'interprète simplement :

PROPOSITION 4. *Pour que $\Sigma = l^{-1}(1)$ soit une section de la projection $\pi : TQ - Q \longrightarrow SQ$, il faut et il suffit que le lagrangien l soit toujours strictement positif.*

DÉMONSTRATION. Supposons $l > 0$, soit $v \in T_qQ - Q$ et $\alpha = l(v)$, puisque $\alpha > 0$ notons $u = v/\alpha$, par homogénéité $l(u) = 1$ et donc $u \in \Sigma$. Soit v'

un autre point de la demi droite $\mathbf{R}*_+ v$ alors $v' = \beta b$, $\beta > 0$, si $l(v) = l(v')$ alors $\beta = 1$, $v = v'$. Ainsi, si $l > 0$ σ coupe chaque demi droite en un point et un seul. Réciproquement, soit $v \in T_qQ - Q$, soit u le point d'intersection de demi droite dirigée par v et de Σ, alors $v = \alpha u$ avec $\alpha > 0$ et donc $l(v) = l(\alpha u) = \alpha l(u) = \alpha$ est strictement positif. ∎

Remarquons que si l est une fonction strictement positive, alors $p = \partial l/\partial \dot{q}$ ne s'annule jamais, puisque $l = p(\dot{q})$. On en déduit donc : $dl \neq 0$ et la proposition suivante :

Proposition 5. *Si $\Sigma = l^{-1}(1)$ est une section de la projection $\pi : TQ - Q \longrightarrow SQ$, alors c'est une sous-variété lisse de $TQ - Q$.*

Nous regrouperons les deux propositions précédentes en une seule :

Proposition 6. *Pour que $\Sigma = l^{-1}(1)$ soit une section lisse de la projection $\pi : TQ - Q \longrightarrow SQ$, il faut et il suffit que le lagrangien l soit toujours strictement positif.*

Si cette condition de positivité sur le lagrangien l est réalisée nous pouvons identifier SQ, c'est-à-dire Y à W ; c'est ce que nous ferons ici. En particulier la forme différentielle ϖ_Y devient la restriction $\varpi \mid Y$, sa dérivée extérieure la restriction de sa dérivée extérieure etc...

Mais que devient, dans ce cas, la condition d'immersion sur l'application de Legendre ? qui nous permet de munir l'espace des solutions du problème de sa structure symplectique.

Notons d'abord que l'application de Legendre est une immersion si et seulement si sa restriction à chaque fibre $Y_q = T_qQ \cap Y = l_q^{-1}(1)$ est une immersion. La fibre Y_q est une sous-variété d'un espace vectoriel, il est donc légitime d'évoquer sa convexité :

Proposition 7. *Soit l un lagrangien homogène strictement positif défini sur $TQ - Q$, et $Y = l^{-1}(1)$. La restriction de l'application de Legendre P à Y est une immersion si et seulement si chaque fibre $Y_q = Y \cap T_qQ$, au dessus de $q \in Q$, est strictement convexe, c'est alors un plongement.*

Démonstration. Notons $E = T_qQ$, $S = Y_q$, x un point courant de E et $p = dl_q(x)$ la valeur de l'application de Legendre au point x. Considérons l'application H qui à $x \in S$ associe l'hyperplan tangent $h = \ker p = T_xS$, orienté par le vecteur sortant x. Puisque l'application de Legendre est une immersion : H est un difféomorphisme local de S dans la variété des hyperplans orientés de E, c'est-à-dire dans la sphère S^{n-1}, où $n = \dim Q$. D'autre part, l'application H est surjective : par compacité de S on peut trouver, pour tout hyperplan h, un hyperplan affine parallèle à h qui ne coupe pas S, on le rapproche ensuite radialement de S, il existe un moment où il sera tangent à S. L'application H est donc un revêtement de S^{n-1}. Si $n > 2$, S^{n-1} est simplement connexe, H est donc un difféomorphisme global et S est convexe. Pour $n = 2$, on remarque d'abord que ce que nous avons dit implique que S est localement convexe, d'autre part le degré de H ne peut être qu'égal à 1, puisque S est radiale et donc H est encore un difféomorphisme global. ▮

Dans les conditions de la proposition précédente (7), tout ce qui a été dit sur Y peut être transposé sur l'image $Y^* = P(Y)$; la forme de Cartan ϖ est alors remplacée par la forme de Liouville λ :

Proposition 8. *Soit l un lagrangien homogène strictement positif, défini sur une variété Q. Si l'application de Legendre P, restreinte à Y, est une immersion alors les solutions du problème variationnel associé sont en bijection avec les caractéristiques, sur l'hypersurface $Y^* = P(Y)$, de la dérivée extérieure $d\lambda$ de la forme de liouville λ du cotangent T^*Q.*

Remarque. Dans certaines conditions, sur l'hypersurface de niveau $S = l^{-1}(1)$, la variété Y^* peut être réalisée comme le niveau 1 d'une fonction l^* définie sur $T^*Q - Q$, homogène de degré 1. Donnons en une construction géométrique. De façon générale, soit E un espace vectoriel, l une fonction réelle, strictement positive, homogène de degré un définie sur E. Cette hypersurface est evidemment co-orientée, en chaque point $x \in S$ par le point x lui-même. Pour tout $x \in S$ l'espace tangent T_xS est donc naturellement orienté. Supposons alors que l'application qui à $x \in S$ associe l'hyperplan orienté T_xS soit injective, c'est une propriété de convexité de S. Puisque S est compacte, pour toute forme linéaire $p \in E^*$ il existe alors deux points de

$S \subset E$ tel que $T_x S = \ker p$, correspondant aux deux orientations possibles de l'espace tangent. L'ensemble

$$\{(p,x) \in [E^* - \{0\}] \times S \mid T_x S = \ker p\}$$

est donc un revêtement à deux feuillets de $E^* - \{0\}$. Dans le cas où $\dim E > 2$, $E^* - \{0\}$ est simplement connexe et ce revêtement est alors trivial, on choisit la nappe du revêtement pour laquelle $p(x)$ est positive, on définit ainsi, sur $E^* - \{0\}$, une fonction positive l^* :

$$l^*(p) = p(x), \text{ avec } x \in S \text{ et } T_x(S) = \ker p. \tag{71}$$

Cette fonction est évidemment homogène de degré 1, et vaut 1 sur $P(S)$, $P(x) = dl_x$. Il suffit maintenant, pour traiter le cas qui nous intéresse, de poser $E = T_q Q$, $x = \dot{q}$ et de faire varier $q \in Q$. La fonction l^* est bien homogène de degré 1 et vaut 1 sur Y^*. Nous pouvons faire de cette construction une définition :

Définition 6. *Dans l'hypothèse où elle est définie, nous appellerons* transformée homogène de Legendre *de la fonction l la fonction l^* définie par la formule précédente 71.*

Mais attention, cette transformée de Legendre n'est pas la transformée de legendre ordinaire de l, qui est infinie dans le cas des fonctions homogènes de degré un, mais comme nous l'avons vu elle est peut être construite de manière analogue. ▶

Cette construction est le point de vue dual du point de vue lagrangien dont nous avons parlé jusqu'à présent, on l'appelle point de vue *hamiltonien.* C'est un cas particulier de la construction générale suivante. Soit T^*Q l'espace cotangent de Q, λ sa forme de Liouville, sa dérivée extérieure $d\lambda$ est symplectique. Elle est évidemment fermée puisque exacte mais elle est aussi non dégénérée. Cela se vérifie directement, si (q,p) désigne un point de T^*Q, $\lambda = pdq$ et $d\lambda$ s'exprime, dans une carte locale, de la manière suivante :

$$d\lambda = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i, \tag{72}$$

où $n = \dim Q$, $d\lambda$ est clairement non dégénérée. Considérons maintenant une variété symplectique quelconque (X, ω) et une fonction réelle f définie sur X. Soit Σ une hypersurface de niveau $\Sigma = f^{-1}(c)$ et supposons que Σ soit une sous-variété de X, c'est-à-dire $df \neq 0$ en tout point de Σ. La restriction de ω à Σ est dégénérée, ne serait-ce que parce que $\dim \Sigma = 2n - 1$ est impair. On peut exprimer plus précisément son noyau, il faut résoudre l'équation :

$$\delta y \in \ker \omega \mid \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \omega(\delta y, \delta' y) = 0, \forall \delta' y \text{ tel que } df(\delta' y) = 0. \tag{73}$$

En appliquant la méthode des multiplicateurs de Lagrange on obtient :

$$\ker \omega \mid \Sigma = \mathbf{R} \operatorname{grad}_\omega(f) \quad \text{avec} \quad grad_\omega(f) = \omega^{-1}(df). \tag{74}$$

La notation $\operatorname{grad}_\omega$ mérite peut-être quelque précision : ω est une forme non dégénérée, on peut l'interpréter comme un isomorphisme linéaire, en tout point $x \in X$ entre $T_x X$ et $T_x^* X$: au vecteur $v \in T_x X$ on associe la forme linéaire $\omega_x(v, \cdot)$; ω_x^{-1} est l'isomorphisme linéaire inverse. Le vecteur $\operatorname{grad}_\omega(f)$ est appelé *gradient symplectique* de f.

Ainsi, le feuilletage caractéristique de f sur Σ est de dimension 1, et ses feuilles sont les courbes intégrales du champ de vecteur $\operatorname{grad}_\omega(f)$. C'est ce cadre général que nous avons retrouvé en construisant la sous-variété $Y^* = P(Y)$, associé au lagrangien l, et appliqué à $X = T^*Q$ et $f = l^*$.

La construction que nous venons d'exposer n'est évidemment pas la plus générale qui nous permette d'identifier le sphérisé SQ du tangent TQ avec une sous-variété $W \subset TQ$. Les conditions exigées sur le lagrangien l sont très particulière et pas toujours vérifiées. Si l'on prend par exemple l'homogénéisé d'un lagrangien $L(t, x, v)$, comme dans le paragraphe 2, $l(q, \dot{q}) = L(t, x, \dot{x}/\dot{t})\dot{t}$ où $q = (t, x)$ et $\dot{q} = (\dot{t}, \dot{x})$, la condition de positivité de l, c'est-à-dire de L (car on prend $\dot{t} > 0$), n'est généralement pas vérifiée : pour une particule dans un champ de forces $L(t, x, v) = mv^2/2 + U(t, x)$ la positivité de L est équivalente à celle du potentiel U. Mais dans ce cas la sous-variété privilégiée qui réalise le sphérisé, ou plutôt un ouvert du sphérisé, est la sous-variété d'équation $\dot{t} = 1$. Comme cette situation est la plus générale des situations particulières, précisons la davantage.

Revenons avant l'homogénéisation du lagrangien, soit X une variété et un lagrangien L défini sur $\mathbf{R} \times TX$, $q = (t, x)$ et $\dot{q} = (\dot{t}, \dot{x})$ les variables de l'homogénéisation, et $l = L(t, x, \dot{x}/\dot{t})\dot{t}$ le lagrangien homogénéisé. Choisissons naturellement comme section du sphérisé SQ la nappe d'équation $\dot{t} = 1$, l'application de Legendre s'exprime sans difficultés :

$$P(t, x, v) = \left[l - \frac{\partial l}{\partial v}(v) \quad \frac{\partial l}{\partial v} \right], \tag{75}$$

de telle sorte que la forme de Cartan s'écrive :

$$\varpi(\delta y) = p(\delta x) - h\delta t, \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial l}{\partial v} \quad \text{et} \quad h = \frac{\partial l}{\partial v}(v) - l. \tag{76}$$

On reconnaît en h la transformée de Legendre ordinaire du lagrangien L et la forme classique de la forme de Cartan du problème variationnel associé. Dans ce cas, si la deux-forme $d\varpi$ est présymplectique les sections à temps constant sont des cartes de l'espace des solution, si le problème est suffisamment régulier ces cartes sont globales, autrement dit l'espace des solutions est alors isomorphe à l'espace tangent TX, muni de l'image réciproque de la dérivée extérieure de la forme de Liouville $d\lambda$ par l'application $(x, v) \mapsto p$, on peut écrire :

$$\omega = dp \wedge dx. \tag{77}$$

C'était justement la situation de l'exemple de la particule.

Bibliographie

[Lag65] J.-L. Lagrange. *Mécanique analytique.* Librairie Albert Blanchard, Paris, 1965. Fac-similé de la troisième édition.

[Sou70] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris, 1970.