Une méthode de symplectisation des variétés de contact

Patrick Iglesias

Résumé

A partir d'une variété de contact et d'une variété symplectique munie d'une fonction réelle positive on construit une nouvelle variété symplectique. On montre en quoi cette méthode est une généralisation de la procédure d'Arnold de symplectisation des variétés de contact. On donne ensuite quelques exemples d'applications à la construction de variétés symplectique avec symétries.

1 Construction générale

Nous rappelons qu'une forme de contact sur une variété Y est une 1-forme différentielle ω vérifiant la propriété suivante :

$$\ker(\omega) \cap \ker(d\omega) = \{0\} \tag{1}$$

Le champ de Reeb de la variété de contact (Y, ω) est le champ de vecteurs ξ défini par les équations :

$$\omega(\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \ker(dw) = \mathbf{R}.\xi.$$

Nous noterons X le quotient de Y par le feuilletage de Reeb et $\pi : Y \to X$ la projection canonique, si ce feuilletage est *sécable* : si en chaque point de

Y passe une transversale qui coupe chaque feuille en un point et un seul, X possède une structure de variété différentiable unique pour laquelle π est une submersion, la 2-forme σ définie par :

$$\pi^*\sigma = d\omega \tag{2}$$

munit X d'une structure naturelle de variété symplectique.

Etant donné une variété V on notera pr_Y et pr_V les projections canoniques du produit $Y \times V$ respectivement sur Y et V.

Proposition 1. *Soient (Y, ω) une variété de contact et ξ son champ de Reeb, soient (V, ϵ) une variété symplectique et h une fonction différentiable réelle strictement positive définie sur V. La 2-forme α définie sur le produit $Y \times V$ par :*

$$\alpha = d[\mathrm{pr}_V^*(h)\,\mathrm{pr}_Y^*(\omega)] - \mathrm{pr}_V^*(\epsilon)$$

est pré-symplectique et son feuilletage caractéristique, de dimension 1, est engendré par le champs de vecteurs η :

$$\forall (y, v) \in Y \times V \quad \eta(y, v) = (\xi(y), \operatorname{grad} h(v)) \tag{3}$$

Démonstration. On note (y, v) un point du produit $Y \times V$ et $(\delta y, \delta v)$ un vecteur tangent au point (y, v). Le noyau de la forme α au point (y, v) est défini par le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} \delta y \\ \delta v \end{pmatrix} \in \ker(\alpha) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dh(\delta v)w + h(v)dw(\delta y, \cdot) = 0 \\ \omega(\delta y)dh + \epsilon(\delta v, \cdot) = 0 \end{array} \right.$$

On déduit de la deuxième équation :

$$\sigma(\delta v, \cdot) = -\omega(\delta y)dh \Rightarrow \delta v = \omega(\delta y) \operatorname{grad} h,$$

qui reporté dans la première donne :

$$h(v)dw(\delta v, \cdot) = 0.$$

Puisque h est partout non nul on déduit que $\delta y \in \ker(d\omega)$ c'est à dire $\delta y = t\xi(y)$ où $t \in \mathbf{R}$, ce qui donne alors $\delta v = t \operatorname{grad} h$, d'où le résultat. ∎

On notera M le quotient $Y \times_\eta V$ de $Y \times V$ par le feuilletage caractéristique de α, et p la projection canonique de $Y \times V$ sur M. La projection pr_Y de $Y \times V$ sur son premier facteur Y s'envoie naturellement sur une application $\tilde{\pi}$ comme l'indique le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Y \times V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"'] & M = Y \times_\eta V \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ Y \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd} \tag{4}$$

Ce diagramme n'est pas toujours un diagramme en variétés (nous discuterons plus loin de cette question), toutefois si le feuilletage η est sécable le quotient M est naturellement une variété différentiable telle que p soit une submersion ; dans ce cas le quotient M hérite naturellement d'une forme symplectique γ définie par :

$$p^*(\gamma) = \alpha. \tag{5}$$

le couple (M, γ) sera alors appelé *symplectisé de la variété de contact* (Y, ω) par (V, ϵ, h).

Remarque 1. Chaque fois qu'un des feuilletages $\mathbf{R}.\xi$ sur Y ou $\mathbf{R}.\operatorname{grad} h$ sur V est sécable (la distribution vectorielle $\mathbf{R}.\operatorname{grad} h$ n'est pas toujours à proprement parler un feuilletage), le feuilletage caractéristique de α l'est aussi. C'est ce qui arrive quand on choisit pour V le revêtement universel $\mathbf{R}\times]0,\infty[$ du plan complexe privé de l'origine : $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$. La 2-forme ϵ est le relevé du volume de $\mathbf{C}$ défini par :

$$\mathrm{Surf}_{\mathbf{C}} = i dz \wedge d\bar{z}. \tag{6}$$

En posant $z = \rho e^{i\theta}$ on obtient : $\epsilon = 2\rho d\rho \wedge d\theta$. On choisit $h(v) = \rho^2$, où $v = (\theta, \rho) \in \mathbf{R}\times]0,\infty[$, son gradient est donné par $\operatorname{grad} h(v) = (-1, 0)$. L'équation différentielle $dv/dt = \operatorname{grad} h$ s'intègre explicitement par $(t, \theta, \rho) \mapsto (\theta - t, \rho)$. Le feuilletage défini par $\operatorname{grad} h$ est sécable, on peut choisir la section globale du feuilletage caractéristique η définie par $\theta = 0$ pour identifier M au produit $Y\times]0,\infty[$; la forme symplectique s'écrit alors :

$$\gamma = d(\rho^2 \omega) \tag{7}$$

On reconnait la construction d'Arnold de symplectisation de variétés de contacts [Arn76] : la construction que nous proposons ici est donc une généralisation de la méthode de symplectisation d'Arnold.

Remarque 2. La méthode de symplectisation que nous venons de décrire s'étend trivialement au cas dégénéré : $Y = \mathbf{R}$ (ou encore $Y = S^1$) et $\omega = dt$ l'élément de volume canonique. Le vecteur ξ est alors défini uniquement par l'équation $\omega(\xi) = 1$ et la 2-forme α est encore présymplectique elle s'écrit simplement, avec quelques abus de notations : $dh \wedge dt - \epsilon$, il n'est d'ailleurs plus nécessaire que h soit strictement positif. On peut choisir comme variété symplectique un espace cotangent muni de sa structure symplectique canonique : $(V, \epsilon) = (T^*Q, \mathrm{Liouv})$ auquel cas cette construction décrit un système dynamique d'espace de configuration Q, d'espace d'évolution $\mathbf{R} \times T^*Q$ et de hamiltonien h (voir [Sou69]).

Remarque 3. Etant donnée la variété symplectique (V, ϵ) on peut toujours choisir pour h une fonction constante, par exemple $h(v) = 1$. On a $\operatorname{grad} h = 0$ et donc $M = X \times V$. Lorsque X est une variété, $M = X \times V$ est une variété symplectique et on a, avec quelques abus de notations : $\gamma = \sigma - \epsilon$, où σ est la forme symplectique canonique de X (définie par 2). Cette méthode de symplectisation peut donc aussi apparaître comme une généralisation du produit symplectique.

Remarque 4. Un autre cas particulier intéressant est celui pour lequel la variété Y est un produit direct $X \times F$, où $F = \mathbf{R}$ ou S^1. La forme de contact ω s'écrit $\omega = \varpi + \theta$ où θ est la forme de Maurer-Cartan du groupe F, la forme symplectique sur X est alors $\sigma = d\varpi$. Là encore $M = X \times V$ mais la structure symplectique γ est donnée par : $\gamma = d(h\varpi) - \epsilon$.

2 Plongements et réductions

On se place dans le cadre des hypothèses du paragraphe 1 et on utilise les mêmes notations.

Soit $v_0 \in V$ un point singulier de h : $\operatorname{grad} h(v_0) = 0$. L'application de Y dans M définie par : $y \mapsto p(y, v_0)$, est constante le long des feuilles du champ de Reeb de la forme de contact ω ; elle se factorise en une application s de X dans M. Il est clair que s est une section de la projection π (voir diagramme 4). Si le diagramme 4 est un diagramme en variété, σ désignant la forme symplectique canonique de X et γ celle de M, on a immédiatement :

$$s^*\gamma = E.\sigma \quad \text{avec} \quad E = h(v_0) \tag{8}$$

L'image de la section s est une nappe de points critiques pour la fonction :

$$\tilde{h} : p(y, v) \mapsto h(v) \tag{9}$$

Cette nappe est symplectique pour la structure induite : chaque point critique du hamiltonien h définit une nappe symplectique de points critique de $\tilde{h}$ *similaire* à (X, σ) dans la variété sympletisée M, le coefficient de similitude étant la valeur du hamiltonien au point en question.

Considérons maintenant une valeur régulière $E \in]0, \infty[$ du hamiltonien h et posons V_E la sous-variété de V d'équation $h = E$. On considère les feuilletages définis sur $Y \times V_E \subset Y \times V$ engendrés par les champs de vecteurs $\eta : (y, v) \mapsto (\xi(y), \operatorname{grad} h(v))$ et $\bar{\eta} : (y, v) \mapsto (0, \operatorname{grad} h(v))$. Si chaque feuile du premier ne rencontre chaque feuille du second qu'en un point et un seul, les quotients $Y \times_\eta V_E$ et $Y \times W_E$, où $W_E = V_E / \operatorname{grad} h$, sont semblables. Le sous-espace $M_E \subset M$ défini par l'équation $\tilde{h} = E$ s'identifie alors à $Y \times W_E$. Réduire symplectiquement M_E revient alors à réduire Y, on a $M_E / \ker(\gamma \mid M_E) \simeq X \times W_E$, la forme symplectique dont on hérite sur cet espace s'écrit $E\sigma - \epsilon_E$ où ϵ_E est la forme symplectique naturelle sur W_E obtenue par réduction.

3 Actions de groupes.

On se place dans le cadre des hypothèses du paragraphe 1 et on utilise les mêmes notations.

Considérons une transformation de contact sur (Y, ω), c'est à dire un difféomorphisme

f de Y préservant ω, et un difféomorphisme symplectique (symplectomorphisme) g de (V, ϵ) invariant le hamiltonien h :

$$f^*\omega = \omega \quad g^*\epsilon = \epsilon \quad h \circ g = h \tag{10}$$

Le couple (f, g) agit sur le produit $Y \times V$ par $(y, v) \mapsto (f(y), g(v))$, c'est un difféomorphisme qui préserve la 2-forme pré-symplectique α et par conséquent son feuilletage caractéristique (engendré par le champ de vecteur η). Le couple (f, g) induit donc sur M une bijection qui est un symplectomorphisme lorsque M est une variété. On a les cas particuliers suivants :

1. Soit G un groupe de Lie agissant différentiablement sur Y par transformations de contact. Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G et $Z \in \mathcal{G}$, on note Z_Y le champ de vecteurs fondamental défini par Z sur Y. On note ψ le moment de G sur Y, c'est l'application de Y dans le dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ définie par :
$$\psi : y \mapsto [Z \mapsto \omega(Z_Y(y))] \tag{11}$$
L'action de G sur M définie plus haut hérite d'un moment $\tilde{\psi}$ donné par :
$$\forall (y, v) \in Y \times V \quad \tilde{\psi} \circ p(y, v) = h(v)\psi(y) \tag{12}$$
C'est grâce à cette remarque qu'on a construit une grande classe de $SO(3)$-variétés symplectiques de dimension 4 (voir [Igl84]).

2. On considère de la même façon une action hamiltonienne d'un groupe de Lie K sur (V, ϵ) de moment ϕ, qui préserve la fonction h. L'action de K sur M décrite plus haut est hamiltonienne et son moment $\tilde{\phi}$ hérité de ϕ est donné par :
$$\forall (y, v) \in Y \times V \quad \tilde{\phi} \circ p(y, v) = -\phi(v) \tag{13}$$
Supposons que le gradient de h soit intégrable, il définit une action différentiable de $\mathbf{R}$ sur V qui vérifie les hypothèses ci-dessus, on a donc une action hamiltonienne de $\mathbf{R}$ sur M, le hamiltonien étant donné par $\tilde{h} \circ p(y, v)) = -h(v)$. C'est cette remarque qui nous permettra plus loin de construire une grande classe de $U(1)$-variétés symplectiques de dimension 4.

4 Cas des variétés quantiques.

Dans les chapîtres précédents nous avons parlé sans trop de précautions des quotients $X = Y/\ker d\omega$, $M = Y \times_\eta V$ et autres. Nous aurions pû donner un cadre rigoureux à ces constructions générales (par exemples celui des espaces différentiables [Igl87]) mais ceci n'aurait pas apporté beaucoup plus qu'une justification formelle. Il existe pourtant des situations où les constructions précédentes définissent à chaque étape des variétés différentiables, par exemple lorsque la variété de contact (Y, ω) est une variété quantique : le feuilletage de Reeb est donné par l'action principale du groupe $U(1)$ [Sou69], et lorsque h est le moment d'une action hamiltonienne de $U(1)$ sur (V, ϵ). C'est dans ce cadre que nous allons nous placer maintenant.

On peut attacher canoniquement à la variété quantique (Y, ω), la symplectisation par $(\mathbf{C}, \mathrm{Surf}_{\mathbf{C}})$ (voir formule 6). Cette structure symplectique est invariante par l'action naturelle de $U(1)$ dont le moment h, que l'on veut partout non nul, est défini à une constante additive a près par :

$$h : z \mapsto \bar{z}z + a \quad a > 0. \tag{14}$$

La variété symplectisée M est le quotient de $Y \times \mathbf{C}$ par l'action diagonale de $U(1)$, c'est le fibré en droite $Y \times_{U(1)} \mathbf{C}$ au dessus de X associé à la fibration principale $\pi : Y \to X$, il se trouve ainsi canoniquement muni d'une structure symplectique. Les feuilles de la fibration $p : M \to X$ sont des variétés symplectiques (on rappelle que $X = Y/U(1)$). Le fibré $Y \times_{U(1)} \mathbf{C}^*$, où $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ est égal à $Y \times_{U(1)} \mathbf{C}$ privé de la section nulle. On peut l'identifierà $Y \times]0, \infty[$ grâce à la projection $p : (y, z) \mapsto (y', \rho)$ définie par :

$$y' = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}z}} \cdot y \quad \text{et} \quad \rho = \sqrt{\bar{z}z}. \tag{15}$$

La forme symplectique γ restreinte à $Y \times_{U(1)} \mathbf{C}^*$ est donnée (modulo cette identification) par la formule :

$$\gamma \mid Y \times_{U(1)} \mathbf{C}^* = d[(\rho^2 + a)\omega]. \tag{16}$$

Cette formule peut être vérifiée immédiatement en utilisant la section différentiable $s : Y \times]0, \infty[\to Y \times \mathbf{C}$ de la projection p définie par $s(y, \rho) = (y, \rho)$. On reconnait la encore pour la valeur $a = 0$ (valeur admise pour $\mathbf{C}^*$) la formule d'Arnold d'extension symplectique des variétés de contact [Arn76]. La construction présentée ici est donc, en quelque sorte, une désingularisation dans le cas des variétés quantiques de la construction d'Arnold. Mais on a dû pour cela :

1. ajouter une constante strictement positive au moment de $U(1)$
2. prolonger le produit $Y\times]0,\infty[$ par le fibré $Y \times_{U(1)} \mathbf{C}$.

Remarque 5. On peut commenter topologiquement ces constructions : le fibré associé $Y \times_{U(1)} \mathbf{C}$ peut être interprété comme le *cylindre ouvert de la projection* $\pi : Y \to X$, construction qui revient à remplacer, dans le cône ouvert sur Y, le sommet par l'espace X [RF81]. L'espace $Y \times_{U(1)} \mathbf{C}^*$ s'interprète alors comme l'espace $Y \times_{U(1)} \mathbf{C} - X$, où X s'immerge par la section nulle.

Exemple 1. En particulier, pour la fibration de Hopf $p : S^3 \mapsto S^2$ muni de la forme de contact canonique :

$$\omega = iZd\bar{Z} \quad Z \in S^3. \tag{17}$$

l'extension symplectique $S^3 \times_{U(1)} \mathbf{C}$ de S^3 par $\mathbf{C}$ est l'espace $\mathbf{C}^2$ éclaté en zéro, tandis que $S^3 \times_{U(1)} \mathbf{C}^*$ n'est autre que $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ (le cône sur S^3 est évidemment homéomorphe à $\mathbf{C}^2$).

La forme symplectique γ restreinte à $S^3 \times_{U(1)} \mathbf{C}^* \simeq \mathbf{C}^2 - \{0\}$ (formule 16) s'écrit alors, modulo l'identification $(Z,\rho) \mapsto \zeta = \rho Z$ comme la dérivée extérieure de la 1-forme :

$$i\left(1 + \frac{a}{\bar{\zeta}\zeta}\right)\zeta d\bar{\zeta}. \tag{18}$$

On remarque qu'on retrouve pour le cas $a = 0$ (valeur qui est ici admise) la 1-forme canonique $i\zeta d\bar{\zeta}$.

Remarque 6. On considère maintenant le potentiel suivant de la structure de $\mathbf{C}$: la 1-forme ν définie sur $\mathbf{C}$ par :

$$\nu = \tfrac{i}{2}[zd\bar{z} - \bar{z}dz], \tag{19}$$

qui est évidemment invariante par l'action de $U(1)$. On peut alors écrire la forme présymplectique α, définie sur $Y \times \mathbf{C}$, comme la dérivée extérieure :

$$\alpha = d[\mathrm{pr}_{\mathbf{C}}^*(h)\, \mathrm{pr}_Y^*(\omega) - \nu]. \tag{20}$$

On peut se demander alors à quelle condition la 1-forme $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega} = \mathrm{pr}_{\mathbf{C}}^*(h)\, \mathrm{pr}_Y^*(\omega) - \nu \tag{21}$$

est une connexion principale de la fibration $p : Y \times \mathbf{C} \to M$, c'est à dire à quelle condition le couple $(Y \times \mathbf{C}, \tilde{\omega})$ est une variété quantique de base (M, γ). Le calcul fixe alors la constante a de la formule (14) à la valeur 1, c'est à dire :

$$h(z) = \bar{z}z + 1. \tag{22}$$

On peut rajouter *a priori* une forme invariante fermée à ν, mais cela ne change pas la valeur $a = 1$. Dans ces conditions on remarque que la section nulle de la fibration $\pi : Y \times_{U(1)} \mathbf{C} \to X$ est un symplectomorphisme.

On considère maintenant, dans le cas général $a > 0$, la sous-variété M_E de M définie par : $\tilde{h} \mid M_E = E$ (chapître 2), $E > 0$, c'est à dire :

$$M_E = \{p(y, z) \in Y \times_{U(1)} \mathbf{C} \mid \bar{z}z = E - a\}. \tag{23}$$

Si $E = a$, $z = 0$ et la variété M_a est la section nulle du fibré $Y \times_{U(1)} \mathbf{C} \to X$, on vérifie que l'image directe de la restriction de γ à M_a par la projection $\tilde{\pi} : Y \times_{U(1)} \mathbf{C} \to X$, est égale à $a\sigma$. Si $0 < a < E$, la variété M_E, est une réunion d'orbites de $U(1)$, fibrée principalement sur X, agissant ici par $\tau.p(y, z) = p(\tau.y, z) = p(y, \bar{\tau}z)$ où $\tau \in U(1)$, $(y, z) \in Y \times \mathbf{C}$, $\tilde{h}$ est alors le moment de cette action. On peut appliquer la méthode de réduction symplectique de Marsden-Weinstein [MW74] à M_E : les orbites de $U(1)$ constituent le feuilletage caractéristique de la restriction :

$$\gamma \mid W_E = Ed[\mathrm{pr}_Y^*(\omega)]. \tag{24}$$

La forme symplectique induite sur X est donc égale à $E\sigma$. On voit donc que pour $E = 1$, c'est à dire :

$$\bar{z}z = 1 - a, \tag{25}$$

la variété M_1 est une variété de contact de base (X, σ) isomorphe à (Y, ω).

Appliquée à cette situation, la méthode d'extension symplectique qu'on propose s'interprète comme une construction duale de la réduction symplectique de Marsden-Weinstein. Il faut remarquer que dans le cas $a = 1$ les variétés réduites à moment constant $E \geq 1$, sont seulement *similaires* à (X, σ), la seule qui soit symplectomorphe est la section nulle pour laquelle il n'y a pas de réduction proprement dite.

Remarque 7. On considère comme cas particulier du chapître 2 pour $V \neq \mathbf{C}$, l'action de $U(1)$ sur la variété symplectique $Y \times_{U(1)} V$ de moment $\tilde{h}$. Toute sous-variété $M_E \subset Y \times_{U(1)} V$ à moment constant : $\tilde{h} = E$, est un sous-fibré trivial sur X, associé à la fibration $\pi : Y \to X$, de fibre type la sous-variété $V_E \subset V$ définie par l'équation $h = E$. Le feuilletage caractéristique de $\gamma \mid M_E$ est l'image (par l'association) de celui de $\epsilon \mid V_E$ sur V_E. La variété réduite $M_E/\ker(\gamma \mid M_E)$ est difféomorphe produit $X \times W_E$ muni de la structure symplectique $E\sigma - \epsilon_E$ où (W_E, ϵ_E) est la réduite de (V, ϵ) à moment constant E. Dans le cas particulier $V = \mathbf{C}$, la variété V_E est un cercle dont la réduite W_E est un point.

5 Exemples d'extensions

On considère le fibré $\pi : SO(3) \mapsto S^2$ où le groupe $SO(3)$ est identifié au fibré tangent unitaire de la sphère S^2. Il est muni de l'action de $SO(2)$ qui, en tout point (x, u), consiste à faire tourner le vecteur u autour du point x. Il existe une forme de connexion canonique sur $SO(3)$ dont la courbure est l'élément de surface canonique de S^2, noté Surf_{S^2}. L'extension symplectique par $\mathbf{C}$ est isomorphe au fibré tangent de la sphère S^2, la forme symplectique est alors invariante par $SO(3)$, elle a pour $SO(3)$-moment équivariant l'application :

$$\forall (x, v) \in T_x(S^2) \quad (x, v) \mapsto \left(\tfrac{1}{2}\bar{v}v + a\right) x. \tag{26}$$

On déduit des résultats exposés dans [Igl84] qu'il existe un difféomorphisme de $T(S^2)$, équivariant l'action de $SO(3)$, et transportant la forme symplectique sur la suivante :

$$a.\mathrm{Surf}_{S^2} + dx \wedge dv. \tag{27}$$

On a déjà décrit dans [Igl84] comment obtenir, grâce à cette construction, certaines classes de $SO(3)$-variétés symplectique de dimension 4. Dans [Aud88] Michèle Audin décrit une méthode de construction de toutes les variétés W compactes de dimension 4 munies d'une action hamiltonienne non triviale de $U(1)$, on peut se demander alors quelles sont celles que l'on retrouve par notre méthode d'extension.

On considère donc $W = Y \times_{U(1)} V$, puisque $\dim(W) = 4$ on doit avoir $\dim(Y) = 3$, $\dim(X) = 2$ (X=Y/U(1)), et $\dim(V) = 2$, puisque W est compacte X et V sont compactes. Y est donc un fibré principal $U(1)$ au dessus d'une surface $X = X_g$ de genre arbitraire g. Quant à V c'est une surface *a priori* de genre g', mais sur laquelle opère différentiablement $U(1)$, on peut évidemment supposer l'action de $U(1)$ presque partout libre (les stabilisateurs principaux sont l'identité), il suffit en effet de prendre le quotient de l'action par son noyau qui est un groupe cyclique $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. L'utilisation des théorèmes standards d'action de groupes compacts sur les variétés (voir par exemple [Bre72]) indique que le quotient de V par $U(1)$ est nécessairement le segment $[-1, +1]$ ou encore le cercle S^1. Dans le premier cas, en recollant des voisinages tubulaires, on obtient comme variété V la sphère S^2 munie de l'action de $U(1)$ qui consiste à tourner autour d'un vecteur constant $B \in S^2$. Dans le second cas, V est le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, muni de l'action qui consiste à faire tourner un des facteur tout en laissant l'autre fixe, cette dernière variété ne possède pas de structure symplectique hamiltonienne. Il reste donc la seule possibilité $V = S^2$ et la méthode d'extension symplectique nous donne la classe de tous les fibrés associés aux structures de contact en cercles au dessus de la surface X_g de fibre type S^2, en d'autres termes $W = Y \times_{U(1)} S^2$.

Le moment de l'action de S^1 possède dans ce cas, deux nappes de points critiques qui correspondent aux deux sous fibrés X^+ et X^- de $Y \times_{U(1)} S^2$, difféomorphes à X_g et définis par l'équation $\langle B \mid u \rangle = \pm 1$. On remarque alors que cette construction est celle de la classe des variétés symplectiques compactes de dimension 4 munie d'un hamiltonien périodique H ayant deux valeurs critiques mais pas de points critiques isolés ([Aud88] proposition 1.4.2).

Bibliographie

[AG90] V.I. Arnold and A.B. Givental. Symplectic geometry. In V.I. Arnold and S.P. Novikov, editors, *Dynamical systems IV*. Springer-Verlag, 1990.

[Arn76] V. I. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.* MIR, Moscou, 1976.

[Aud88] M. Audin. Hamiltoniens périodiques sur les variétés symplectiques compactes de dimension 4. In *Géométrie symplectique et mécanique*, number 1416 in Lecture Notes in Mathematics, pages 1–25. Springer-Verlag, 1988.

[Bre72] G. E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, New-York, 1972.

[Igl84] P. Iglesias. Classification des $SO(3)$-variétés symplectiques de dimension 4. Prétirage CPT-84/PE.1673, CPT-CNRS, Luminy, F. Marseille, 1984.

[Igl87] P. Iglesias. Introduction à la géométrie des espaces différentiables. Prétirage CPT-88/P.2451, CPT-CNRS, Luminy, F. Marseille, 1987.

[MW74] J. Marsden and A. Weinstein. On reduction of symplectic manifold. *Rep. Math. Phys.*, 5 :421, 1974.

[RF81] V. Rohlin and D. Fuchs. *Premier cours de topologie - Chapitres géométriques.* Editions MIR, Moscou, 1981.

[Sou69] J. M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris, 1969.

École normale supérieure de Lyon
Unité de mathématiques pures et appliquées
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7