Le mystère de la lettre H

par
patrick iglesias

Dans ces quelques pages, j'essaye de faire le point sur les origines de la notation ***H*** *que l'on utilise ordinairement, dans les cours de mécanique, pour désigner le hamiltonien. Doit on la considérer comme l'initiale de Hamilton ? ou bien celle de Huygens, ainsi qu'on peut le lire parfois. Pour répondre à cette question il faut (re)lire Lagrange et Huygens on y découvre une partie du cheminement des idées qui ont conduit à cette découverte fondamentale du* principe de conservation des forces vive*, connu aujourd'hui sous le nom de* théorème de conservation de l'énergie*. C'est le plaisir que j'ai eu à parcourir ces quelques pages d'histoire que j'aimerai partager ici.*

patrick.iglesias@cmi.univ-mrs.fr, chargé de recherches au cnrs au centre de mathématiques et d'informatique de l'université de provence 39, rue f. joliot-curie 13453 marseille cedex 13.

Introduction

Dans cette petite note, j'essaye de faire le point sur les origines de la notation H que l'on utilise ordinairement, dans les cours de mécanique, pour désigner le hamiltonien. Doit on la considérer comme l'initiale de Hamilton ? ou bien celle de Huygens ainsi que le suggère Souriau dans ses divers textes sur la mécanique [Sou86] ? Pour répondre à cette question j'ai été conduit à (re)lire Lagrange et Huygens et à y découvrir une partie du cheminement des idées qui ont conduit à cette découverte du *principe de conservation des forces vive*, connu aujourd'hui sous le nom de *théorème de conservation de l'énergie*. C'est le plaisir que j'ai eu à parcourir ces quelques pages d'histoire que j'aimerai partager ici.

Le premier H

Dans les manuels de mécanique analytique, la lettre H désigne traditionnellement une fonction appelée *hamiltonien* et qui représente l'énergie totale du système étudié, somme de son énergie cinétique et du potentiel des forces d'interaction. Cette notation est ainsi présentée comme un hommage des modernes à Sir Rowan Hamilton. Mais cette interprétation est erronée et résulte d'un malentendu historique. Ainsi que le fait remarquer Souriau dans ses divers textes sur la mécanique symplectique [Sou86], c'est Lagrange qui désigna pour la première fois, par la lettre H, la constante des forces vives[1] ; non comme un hommage à *Sir Rowan Hamilton* mais à *Christian Huyghens*. Que ces deux grands mathématiciens : Huygens et Hamilton partagent la même initiale a conduit à ce malheureux malentendu. Le *hamiltonien* devrait être ainsi renommé : *Huyghensien* !

Chacun peut vérifier que dans sa *Mécanique Analytique*, Lagrange désigne bien par la lettre H la constante des forces vives. On peut y lire, à l'article 33, page 268 [Lag11, tome I, seconde partie, deuxième édition] :

[1] Si la *force vive* désigne le double de l'énergie cinétique, la *constante des forces vives*, elle, représente l'énergie totale.

« L'équation précédente devient

$$\mathbf{S}\left(\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} + d\Pi\right) m = 0$$

dont l'intégrale est

$$\mathbf{S}\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + \Pi\right) m = \mathbf{H}$$

dans laquelle la lettre **H** désigne une constante arbitraire, égale à la valeur du premier membre de l'équation à un instant donné.

Cette Dernière équation renferme le principe connu sous le nom de *Conservation des forces vives.* En effet, $dx^2+dy^2+dz^2$ étant le carré de l'espace que le corps parcourt dans l'instant dt, $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ sera le carré de sa vitesse et $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}m$ sa force vive. Donc $\mathbf{S}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}m$ sera la somme des forces vives de tous les corps, ou la force vive de tout le système ; et l'on voit par l'équation dont il s'agit, que cette force vive est égale à la quantité $2\mathbf{H} - 2\mathbf{S}\Pi m$, laquelle dépend simplement des forces accélératrices qui agissent sur les corps, et nullement de leur liaison mutuelle, de sorte que la force vive du système est à chaque instant la même que les corps auraient acquises si, étant animés des mêmes puissances, ils s'étaient mus librement chacun sur la ligne qu'il a décrite. C'est ce qui fait donner le nom de *Conservation des forces vives* à cette propriété du mouvement. »

Le principe des forces vives

C'est dans ce texte, même pas les articles fondateurs [Lag10, Lag08, Lag09] de *La Dynamique*[2], que pour la première fois dans l'histoire de la mécanique

[2]seconde partie de La Mécanique Analytique.

la lettre H désigna la *constante des forces vives*, c'est-à-dire l'énergie totale du système. Nous continuons à observer cette convention mais avec une idée éronnée de son origine.

Le *Principe de conservation des forces vives* est connu aujourd'hui sous le nom de *Théorème de conservation de l'énergie* ; mais ce changement de dénomination cache un glissement sémantique, justement suggéré par l'apparition de cette constante. En effet, comme on le voit clairement dans l'équation précédente, et comme il est dit, la force vive n'est évidemment pas conservée. La tentative de justification de cette « conservation » reste confuse, et la question n'est vraiment réglée qu'avec l'introduction de la constante d'intégration $\mathbf{H}$.

Comme on peut le vérifier aussi, à la date de parution de cet ouvrage, en 1811, Hamilton n'avait que cinq ans. Le fait est indéniable : même s'il a été un enfant prodige, H n'est pas pour Hamilton, mais Lagrange n'explique pas, à cet endroit du texte (tome I, seconde partie, article 33), la raison de son choix. Il faut aller chercher ailleurs ses motivations. Précisemment dans l'Introduction à la Seconde Partie de la Mécanique, Première Section : *Sur les principes de la dynamique*. Outre son intérêt immédiat, sa lecture va éclairer ce petit mystère. Voici ce qui est écrit à l'article 14 de la première section de la seconde partie du tome I de la mécanique de Lagrange :

> « Le premier de ces quatre principes, celui de la conservation des forces vives, a été trouvé par Huygens, mais sous une forme un peu différente de celle qu'on lui donne présentement ; et nous en avons déjà fait mention à l'occasion du problème des centres d'oscillations.
>
> ...
>
> Ainsi le principe de Huygens se réduit à ce que, dans le mouvement des corps pesants, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses à chaque instant est la même soit que les corps se meuvent conjointement d'une manière quelconque, ou qu'ils parcourent librement les mêmes hauteurs verticales.

> ...
>
> Il [Huygens] donna ainsi à ce principe le nom de *conservation des forces vives*, et il s'en servit avec succès pour résoudre quelques problèmes qui ne l'avaient pas encore été, et dont ils parvenait difficile de venir à bout par des méthodes directes. »

Le centre d'oscillation du pendule composé

Au nombre des problèmes, résolus par Huygens grâce au principe de conservation des forces vives, le plus important pour notre propos est celui du centre d'oscillations. Ce problème fut posé à Huygens par *le très savant Mersenne* (dixit Huygens). C'était un problème fameux de l'époque qui occupait les géométres. Il s'agissait de déterminer le *pendule simple* isochrone à un *pendule composé*. C'est-à-dire le pendule simple dont le batement est identique à celui d'un pendule composé donné. Laisons encore à Lagrange le soin de nous exposer le problème [article 7 de la première section de la seconde partie du tome I de l'ouvrage sus-cité] :

> « Un fil considéré comme une ligne inflexible, sans pesanteur et sans masse, étant attaché par un bout à un point fixe, et chargé à l'autre bout d'un petit poids qu'on puisse regarder comme réduit à un point, forme ce qu'on appelle un pendule simple ; et la loi des vibrations de ce pendule dépend uniquement de sa longueur, c'est-à-dire de sa distance entre le poids et le point de suspension. Mais si à ce fil on attache encore un ou plusieurs poids à différentes distances du point de suspension, on aura alors un pendule composé, dont le mouvement devra tenir une espèce de milieu entre ceux des différents pendules simples que l'on aurait, si chacun de ces poids était suspendu seul au fil. Car la force de gravité tendant d'un côté à faire descendre tous les poids également dans le même temps, et de l'autre l'inflexibilité du fil les contraignant à décrire des arcs inégaux et proportionnels à leur distance du

> point de suspension, il doit se faire entre ces poids une espèce de compensation, et de répartition de leurs mouvements, en sorte que les poids qui sont les plus proches du point de suspension hâteront les vibrations des plus éloignés, et ceux-ci, au contraire, retarderont les vibrations des premiers. Ainsi il y aura dans le fil un point ou un corps étant placé, son mouvement serait ni accéléré ni retardé par les autres poids, mais serait le même que s'il était seul suspendu au fil. Ce point sera donc le vrai centre d'oscillation du pendule composé, et un tel centre doit se trouver dans tout corps solide de quelque figure que ce soit, qui oscille autour d'un axe horizontal. »

Le problème est bien posé, il est d'importance puisque les horloges étaient réglées grâce à des poids répartis sur leur balancier. Continuons notre lecture :

> « Huygens vit qu'on ne pouvait déterminer ce centre d'une manière rigoureuse, sans connaître la loi suivant laquelle les différents poids du pendule composé altère mutuellementles mouvements que la gravité tend à leur imprimer à chaque instant ; mais au lieu de chercher à déduire cette loi des principes fondamenraux de la Mécanique, il se contenta d'y suppléer par un principe indirect, lequel consiste à supposer que si plusieurs poids attachés, comme on le voudra, à un pendule, descendent par la seule action de la gravitation, et que, dans un instant quelconque, ils soient détachés et séparés les uns des autres, chacun d'eux, en vertu de la vitesse acquise pendant sa chute, pourra remonter à une telle hauteur, que le centre commun de gravité se trouvera remonté de la même hauteur d'où il était descendu. »

Voilà donc le principe, prémisse de la conservation des forces vives. Et Lagrange d'ajouter :

> « On ne saurait deviner ce qui a donné à l'auteur l'idée d'un tel principe
>
> ...
>
> Quoi qu'il en soit, ce principe fournit une équation entre la hauteur verticale, d'où le centre de gravité du système est descendu dans un temps quelconque, et les différentes hauteurs verticales auxquelles les corps qui composent le système pourraient remonter avec leur vitesses acquises, et qui, par le théorème de Galilée, sont comme le carré de ces vitesses. »

Voilà qui montre clairement comment la conservation des forces vives résoud le problème du pendule composé. En vérité le problème n'était pas encore considéré comme définitivement réglé. Les principes posés par Huygens n'étaient pas tout à fait ceux ceux énoncés plus haut, et il fallait les fonder davantage. C'est Jacques Bernouilli qui satisfera définitivement les mécaniciens de l'époque. Mais tout cela est admirablement conté dans l'introduction à La Dynamique de la Mécanique de Lagrange (articles 6 à 14) et nous y renvoyons le lecteur, pour son plaisir.

Horlogium Oscillatorium

Cela dit, avant de clore définitivement ce chapitre il nous faut encore préciser où et comment Huygens a présenté lui-même sa découverte. Pour cela il faut lire la proposition V de la quatrième partie de l'*Horlogium Oscillatorium* [Huy73, page 99 de l'édition originale, citation extraite de la traduction française] :

Proposition V

> « Etant donné un pendule composé des poids que l'on veut, si chacun est multiplié par le carré de sa distance à l'axe d'oscillation, et que la somme des produits soit divisée par le produit fait de

> la somme des poids par la distance au même axe d'oscillation du centre de gravité commun à tous ; il paraît la longueur du pendule simple isochrone au composé, soit la distance entre l'axe et le centre d'oscillation même du pendule composé. »

C'est dans la démonstration de cette proposition, qui donne la solution du problème du pendule composé, qu'aparaît, cachée mais bien là, la constante des forces vives. On peut lire en effet, à la page 100 de l'ouvrage sus-cité :

> « Mais comme le carré de la vitesse du point L qu'il possède en P est au carré de de la vitesse du point A en T, ainsi est la hauteur à laquelle L peut monter par la première vitesse, à la hauteur à laquelle A peut monter par la deuxième vitesse... »

Accordons définitvement à Huygens le mérite de la découverte de la conservation de l'énergie (comme on nomme aujourd'hui son principe).

Conclusion

Ainsi donc le mystère de la lettre H est éclairci, mais il est important de souligner qu'après les Huygens, Bernouilli etc. celui qui a donné son sens moderne à ce principe, qui l'a établi dans toute sa rigueur analytique, c'est Lagrange. Et c'est encore, aujourd'hui, de la même façon qu'il a eu de le démontrer il ya deux cents ans que ce principe est enseigné dans nos universités.

Bibliographie

[Huy73] C. Huygens. *Horlogium Oscillatorium.* Édité par François Muguet, Paris 1673. Traduit du Latin par Jean Peyroux. Édition Bergeret, rue Leyteire, Bordeaux 1980.

[Lag11] J.-L. Lagrange. *Mécanique analytique*. Librairie Albert Blanchard, Paris, 1965. Fac-similé de la troisième édition.

[Lag08] J.-L. Lagrange. Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 713–768. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 22 août 1808 à l'Institut de France.

[Lag09] J.-L. Lagrange. Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 771–805. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 13 mars 1809 à l'Institut de France.

[Lag10] J.-L. Lagrange. Second mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 809–816. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 19 février 1810 à l'Institut de France.

[Lag74] J.-L. Lagrange. Sur les intégrales particulières des équations différentielles. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, page 5. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, année 1774.

[Lag75] J.-L. Lagrange. Recherches sur Les suites récurrentes. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, page 151. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, année 1775.

[Lag79] J.-L. Lagrange. Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, pages 585. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, année 1779.

[Sou86] J.-M. Souriau. La structure symplectique de la mécanique décrite par lagrange en 1811. *Math. Sci. hum.*, (94) :45–54, 1986.

Centre de Mathématiques et d'Informatique
39, rue F. Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13