Lagrange et Poisson, sur la variation des constantes

Patrick IGLESIAS-ZEMMOUR

Nous exposons la chronologie, les relations, et la nature respective des crochets et parenthèses qui apparaissent dans l'étude de la variation des constantes dans les problèmes de la mécanique dans les mémoires de Lagrange et de Poisson de 1808 à 1810.

Les mémoires auxquels nous faisons référence sont les suivants :

Siméon-Denis Poisson, « Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes », lu à l'Institut le 20 juin 1808[1] ;

Joseph-Louis Lagrange, « Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites », lu à l'Institut le 22 août 1808[2] ;

Lagrange, « Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique », lu à l'Institut le 13 mars 1809[3] ;

Poisson, « Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique », lu à l'Institut le 16 octobre 1809[4] ;

Lagrange, « Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ces problèmes », lu à l'Institut le 19 février 1810[5].

---

[1] *Journal de l'École polytechnique*, 15e cahier, 8 (1809), p. 1–56.

[2] *Mémoires de la première classe de l'Institut de France*, année 1808 ; *Œuvres*, vol. 6, Paris, Gauthier-Villars, 1877, p. 713–768.

[3] *Mémoires de la première classe de l'Institut de France*, année 1808 ; *Œuvres*, vol. 6, p. 771–805.

[4] *Journal de l'École polytechnique*, 15e cahier, 8 (1809), p. 266–344.

[5] *Mémoires de la première classe de l'Institut de France*, année 1809 ; *Œuvres*, vol. 6, p. 809–816.

Nous citerons ces mémoires par leur date de lecture, puisque cela ne souffre aucune ambiguïté, et pour Lagrange nous citerons les pages dans ses *Œuvres*.

Parenthèses de Lagrange

L'importance des parenthèses et crochets de Lagrange s'est révélée particulièrement avec le développement de la géométrie symplectique et son application à la mécanique classique dans la deuxième moitié du vingtième siècle. Jean-Marie Souriau, dans son article « La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811 », a vu dans les parenthèses de Lagrange les premiers éléments de mécanique symplectique[6]. Mais, bien que les précédant, les parenthèses et crochets de Lagrange ont été occultés par les crochets de Poisson, les premiers n'ayant pas vraiment été enseignés dans les cours traditionnels de mécanique, et certainement pas de façon aussi systématique que les seconds. Nous essayons ici d'établir la chronologie et les rôles respectifs de ces constructions mathématiques qui se ressemblent étrangement, au point qu'il est difficile au premier abord de distinguer les unes des autres.

Il faut attribuer à Lagrange le mérite d'avoir formalisé, dans deux articles publiés en 1775 et 1779[7], la méthode de la variation des constantes, c'est-à-dire d'avoir transformé un savoir-faire commun aux mathématiciens de l'époque en une théorie mathématique. Ce mérite lui est attribué de façon assez consensuelle par les auteurs qui lui ont succédé[8]. Lagrange a aussi vu tout le potentiel que recelait sa méthode pour l'étude particulière de la stabilité du système des planètes, potentiel qu'il exploite finalement et pleinement plus de trente ans après, dans son mémoire de 1808 sur la variation des éléments des planètes.

Rappelons brièvement comment s'applique la méthode de la variation des constantes à l'étude de la stabilité des planètes[9]. Une planète soumise à la seule attraction du soleil suit un mouvement elliptique[10]. Ce mouvement est complètement caractérisé par six constantes, les *éléments képlériens* (ou *elliptiques*) de la planète,

[6] *Mathématiques et sciences humaines*, 94 (1986), p. 45–54. C'est à la suite de cet article, et des discussions qu'il a engendrées, que j'ai été conduit à lire les mémoires de Lagrange sur ce sujet et à les commenter dans un premier article : Patrick Iglesias, Les origines du calcul symplectique chez Lagrange, *L'Enseignement mathématique*, 44 (1998), p. 257–277.

[7] Recherches sur les suites récurrentes, *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, année 1775 ; *Œuvres*, vol. 4, Paris, Gauthier-Villars, 1877, p. 151–251 ; Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières, *Nouveaux Mémoires*, année 1779 ; *Œuvres*, vol. 4, p. 585–634.

[8] Voir par exemple la thèse d'Alfred Gautier, *Essai historique sur le problème des trois corps, ou Dissertation sur la théorie des mouvements de la Lune et des planètes, abstraction faite de leur figure*, Paris, Veuve Courcier, 1817.

[9] Voir aussi Souriau, *op. cit.*

[10] Nous ne considérons que les planètes piégées par le soleil, pas les corps diffusés le long de trajectoires paraboliques ou hyperboliques.

qui sont les *constantes d'intégration.* Cinq de ces constantes décrivent la trajectoire, c'est-à-dire l'ellipse, la sixième, appelée *époque*, définit la loi horaire du mouvement le long de la trajectoire. Le choix de ces constantes d'intégration est relativement arbitraire[11], l'usage courant est de les noter a, b, c, h, i, k, où a, b, h, i, k sont les éléments de la trajectoire, a étant la valeur du grand axe de l'ellipse, b son paramètre et c est l'époque. Lagrange les note aussi, en particulier dans son mémoire de 1808, a, b, c, f, g, h. Ensuite, la perturbation à laquelle est soumise la planète se traduit sur son mouvement comme une famille de mouvements képlériens associés aux nouvelles conditions initiales, infligées à chaque instant par la perturbation. Finalement, le mouvement de la planète est décrit par une courbe $t \mapsto (a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t))$, tracée dans l'espace des éléments képlériens, qui est solution des équations différentielles suivantes :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial v} X, \ \frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial v} X, \ \text{etc.} \tag{1}$$

où $X = \frac{dv}{dt}$ est – en accord avec les principes de Newton –, à un coefficient près que nous ignorerons, la force perturbatrice[12]. Ces équations différentielles étaient l'objet d'études des mathématiciens de l'époque qui cherchaient à en extraire, par des méthodes d'approximation, les renseignements nécessaires à l'établissement éventuel de théorèmes de stabilité. C'est en exploitant le fait que la force X dérive d'un *potentiel de perturbation* Ω que Lagrange introduit les parenthèses qui portent aujourd'hui son nom, et qu'il fait faire un progrès important dans la résolution de ces équations. Voici ce qu'il écrit dans son mémoire de 1808[13] quant à son retour sur cette vieille question qu'il avait laissée en suspens quelque trente ans auparavant.

> Dans un mémoire lu à l'Académie de Berlin en 1776[14], je considérai d'une manière directe les variations auxquelles peut être sujet le grand axe d'une planète par les forces perturbatrices provenant de l'action des autres planètes, et je réduisis ces variations à une formule générale et très-simple qui, ne dépendant que de la différentielle partielle d'une fonction finie relativement au mouvement moyen de la planète, fait voir tout de suite que le grand axe ne peut jamais contenir aucun terme proportionnel au temps, quelque loin qu'on continue l'approximation par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, mais en s'arrêtant à la première approximation par rapport aux termes proportionnels aux masses des planètes.
> On n'avait pas été plus loin sur ce point ; mais *M. Poisson y a fait un pas de plus dans le Mémoire qu'il a lu il y a deux mois*[15] *à la classe*, « Sur les

[11] En effet, les éléments képlériens forment une carte de la variété des mouvements elliptiques de la planète. Le choix d'une carte particulière est fonction du problème étudié.

[12] Nous renvoyons le lecteur à la justification qu'en donne Lagrange. Voir l'article 58, p. 66, dans sa *Mécanique analytique*, édition réunissant les notes de la troisième et de la quatrième éditions, t. 2, Paris, Librairie Albert Blanchard, 1965.

[13] P. 716–718. Nous mettons en italique les passages significatifs pour notre propos.

[14] *Œuvres de Lagrange*, vol. 4, p. 255.

[15] Le 20 juin 1808 [note de Lagrange].

> inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes », et dont nous[16] avons fait le Rapport dans la dernière séance. Il a poussé l'approximation de la même formule jusqu'aux termes affectés des carrés et des produits des masses, en ayant égard dans cette formule à la variation des éléments que j'avais regardés comme constants dans la première approximation. [...]
> *Cette découverte de M. Poisson a réveillé mon attention* sur un objet qui m'avait autrefois beaucoup occupé, et que j'avais ensuite totalement perdu de vue. *Il me parut que le résultat qu'il venait de trouver par le moyen des formules qui représentent le mouvement elliptique était un résultat analytique dépendant de la forme des équations différentielles* et des conditions de la variabilité des constantes, *et qu'on devait y arriver par la seule force de l'Analyse*, sans connaître les expressions particulières des quantités relatives à l'orbite elliptique.
> [...] J'ai obtenu des formules qui donnent les différentielles de ces variations sous une forme plus simple que celle des formules connues jusqu'à présent. [...] Ces formules ont de plus l'avantage que, étant appliquées aux variations du grand axe, on en voit naître tout de suite des expressions analogues à celles auxquelles M. Poisson n'est parvenu que par des réductions heureuses des formules déduites de la considération du mouvement elliptique.

C'est donc Poisson qui déclenche de façon bien involontaire, par son mémoire de juin 1808, l'intérêt renouvelé de Lagrange sur la stabilité du système des planètes. L'idée que poursuit Lagrange dans son mémoire d'août 1808, et qui va le conduire à l'introduction de ses parenthèses et crochets, consiste à écrire les équations de perturbation (1), dépendantes *a priori* des conditions initiales (r, v, t), en fonction des éléments képlériens (a, b, c, f, g, h) et du temps t. En effet, d'un point de vue moderne, le passage de (r, v, t) à (a, b, c, f, g, h, t) est ce que l'on appelle un difféomorphisme, au moins local, et ce qui vaut dans tel système de coordonnées a une transcription équivalente dans un autre système. Plus géométriquement, Lagrange va traduire l'évolution du système perturbé sur la variété des mouvements de Kepler dont les variables (a, b, c, f, g, h) définissent une carte. Pour écrire les équations de perturbation dans l'espace des éléments képlériens de la planète, il doit d'abord exprimer la force de perturbation dépendant d'un potentiel Ω,

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

en termes des éléments képlériens et de t. C'est dans l'expression de cette force perturbatrice, ramenée aux éléments des planètes, c'est-à-dire,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a}, \ \frac{\partial \Omega}{\partial b}, \ \frac{\partial \Omega}{\partial c}, \ \ldots$$

[16] MM. de Laplace, Biot et moi [note de Lagrange].

qu'apparaissent pour la première fois les parenthèses de Lagrange. Après un calcul long et ardu de plusieurs pages, Lagrange aboutit à « cette formule très-remarquable »[17],

$$\frac{d\Omega}{da}dt = (a,b)db + (a,c)dc + (a,f)df + (a,g)dg + (a,h)dh, \tag{2}$$

où les *parenthèses* (a,b), $(a,c), \ldots$, ne sont fonctions que des éléments a,b,c,f,g,h, et *a priori* de t. Ces parenthèses sont explicitement données, à la même page du mémoire, par

$$(a,b) = \frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dt\,db} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dt\,db} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dt\,db} - \frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dt\,da} - \frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dt\,da} - \frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dt\,da},$$

avec $r = (x,y,z)$, et ainsi de suite pour les autres parenthèses. Aujourd'hui nous formulons ces parenthèses plus simplement de la façon suivante,

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial a}\frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial b} - \frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial a}\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial b} \right),$$

en posant $r^1 = x$, $r^2 = y$ et $r^3 = z$, avec $v = \frac{dr}{dt} = (v^1, v^2, v^3)$. Nous pouvons remarquer que, pour exprimer ses parenthèses, Lagrange considère implicitement le difféomorphisme inverse $(a,b,c,f,g,h,t) \mapsto (r,v,t)$. Mais l'intérêt majeur de cette expression, Lagrange l'exprime page 729 de son mémoire, à propos du coefficient (a,b) :

> La valeur de cette expression qui forme le coefficient de db, dans la valeur de $\frac{d\Omega}{da}dt$ donnée ci-dessus, sera indépendante de t et ne sera que fonction des six éléments a,b,c,f,g,h ; et, pour avoir cette fonction, il n'y aura qu'à rejeter tous les termes dépendants de t dans l'expression dont il s'agit, après la substitution des valeurs de $\frac{dx}{da}$, $\frac{d^2x}{dt\,da}$, $\frac{dx}{db}$, ... , déduites des valeurs elliptiques de x,y,z.

Lagrange démontre immédiatement, à la page 731, que les parenthèses sont antisymétriques,

$$(a,b) = -(b,a), \ (a,c) = -(c,a), \ \ldots$$

On obtient alors 15 fonctions indépendantes des éléments képlériens qui sont les coefficients du système linéaire 6×6, décrit en (2), exprimant les composantes de la force de perturbation, ramenée aux éléments képlériens, en fonction de la variation des éléments képlériens le long du mouvement perturbé. Il suffit alors d'inverser le système linéaire en question pour obtenir les équations différentielles recherchées, c'est-à-dire les équations (1), écrites sur l'espace des éléments képlériens, et pour éventuellement en extraire quelques informations sur les questions de stabilité. Toujours dans son mémoire de 1808, article 7, page 731, Lagrange le dit en ces termes :

[17] P. 730.

> Il est bien remarquable que les différences partielles de la fonction Ω, relatives aux constantes arbitraires, puissent s'exprimer ainsi par des fonctions différentielles de ces mêmes constantes sans que le temps t y entre. Il s'ensuit qu'on pourra également exprimer les différentielles $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$, ... par les différences partielles de la fonction Ω relatives aux éléments a, b, c, ..., multipliées par de simples fonctions de ces quantités sans t ; *car il n'y aura qu'à déduire les valeurs de ces différentielles des six équations précédentes par les méthodes ordinaires de l'élimination*, et il est visible qu'elles seront toutes de la forme
>
> $$\left(A\frac{d\Omega}{da}+B\frac{d\Omega}{db}+C\frac{d\Omega}{dc}+F\frac{d\Omega}{df}+G\frac{d\Omega}{dg}+H\frac{d\Omega}{dh}\right)dt, \tag{3}$$
>
> dans lesquelles les coefficients $A, B, C, F, \ldots$ ne seront donnés que par les coefficients (a, b), (a, c), $(b, c), \ldots$, et ne seront par conséquent que de simples fonctions des éléments sans t ; ce qui fournit un Théorème très-important et très-utile dans la Théorie des perturbations des planètes.

Ce sont justement ces termes : A, B, C, F, G, H, qui sont obtenus par Lagrange en inversant le système linaire (2), qui vont intéresser Poisson et dont il va donner, nous le verrons plus loin, une construction différente.

Comme on le voit clairement, la méthode que Lagrange propose pour écrire l'évolution du système perturbé consiste en deux étapes : expliciter d'abord la valeur des parenthèses, puis inverser le système ainsi obtenu. En termes modernes les parenthèses de Lagrange sont les composantes covariantes d'une forme symplectique sur l'espace des éléments képlériens, qui est nommée aujourd'hui *structure symplectique de Lagrange*.

Dans son mémoire suivant sur la variation des constantes, lu le 13 mars 1809, Lagrange généralise sa méthode à tous les problèmes de la mécanique et montre que les variations des constantes d'intégration d'un système mécanique perturbé quelconque, dont les forces de perturbation dérivent d'un potentiel, suivent les mêmes règles formelles que celles du système des planètes et définissent un système de parenthèses analogues. Voici ce qu'il en dit dans son introduction :

> J'ai entrepris depuis d'étendre à un système de corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque, l'Analyse qui m'avait réussi pour les variations des éléments des planètes, en l'appliquant aux formules générales que j'ai données dans la *Mécanique analytique*, pour le mouvement d'un système quelconque de corps ; après plusieurs tentatives infructueuses je suis parvenu, non sans étonnement, vu la grande généralité des équations différentielles, à un résultat analogue à celui que j'avais trouvé pour les planètes, et dont celui-ci n'est plus qu'un cas particulier.

Le système des parenthèses de Lagrange est aujourd'hui compris, dans le cas général, comme l'expression d'une forme symplectique naturelle sur l'espace des solutions du système non perturbé, dont les constantes d'intégration sont une carte, et qui est telle que les courbes intégrales du gradient symplectique du potentiel de perturbation sont les solutions du mouvement perturbé[18].

Parenthèses de Poisson

Après la publication du second mémoire de Lagrange, Poisson lit à l'Institut, le 16 octobre 1809, un mémoire qui porte à peu près le même titre, « Sur la variation desconstantes arbitraires dans les questions de mécanique ». Il y donne une construction originale, sans inversion du système des parenthèses de Lagrange, des coefficients, A, B, C, F, G, H, qui interviennent dans l'expression (3) de la variation des constantes d'intégration. C'est la première apparition de ce qu'on appelle aujourd'hui les *crochets de Poisson*, mais ils sont notés dans ce texte sous forme de parenthèses, nous y reviendrons. Voici comment Poisson introduit sa contribution[19] :

> Je suppose qu'on ait d'abord intégré les équations différentielles de ce mouvement, en négligeant une partie des forces données, et qu'ensuite on fasse varier les constantes arbitraires qui complètent ces intégrales, afin de les étendre au cas où l'on a égard à toutes les forces. Cela posé, je cherche les différentielles premières des constantes arbitraires devenues variables : j'exprime leurs valeurs au moyen des différences particulières d'une certaine fonction que l'on obtient en prenant l'intégrale de la somme des forces, négligées dans le premier cas, multipliées respectivement par l'élément de leur direction. Ces différences partielles sont prises par rapport aux constantes arbitraires, et multipliées par *des fonctions de ces mêmes quantités, qui ne renfermeront jamais le temps d'une manière explicite*, ainsi que je le prouve par une démonstration directe. *Les formules du dernier Mémoire de M. Lagrange sont inverses des nôtres : elles donnent les différences partielles de la même fonction, au moyen des différentielles des constantes arbitraires.* Je les rapporte dans la suite de ce Mémoire, afin de les comparer à celles que nous avons obtenues, et de montrer la singulière analogie qui existe entre ces deux genres de formules.

À la différence de Lagrange, qui exprime la variation des constantes d'intégration en inversant un système linéaire, obtenu en exprimant la force de perturbation en fonction des variables elliptiques, Poisson établit son analyse en différentiant directement une constante d'intégration arbitraire qu'il considère comme une fonction des

[18] Voir Iglesias, *op. cit.*, pour un exposé plus détaillé.
[19] P. 268-269.

conditions initiales, ce qu'il exprime clairement ainsi[20] :

$$a = \text{fonc. } (\phi, \psi, \theta, \phi', \psi', \theta', t),$$

où ϕ, ψ, θ sont des variables arbitraires du système différentiel[21], et ϕ', ψ', θ' leurs dérivées par rapport au temps[22] ; cet ensemble de variables est ensuite considéré comme un système de conditions initiales du système différentiel. Poisson établit d'abord une proposition, que l'on peut considérer comme un lemme et qui, d'une part, donne l'expression des *parenthèses de Poisson* de deux constantes d'intégration a et b, et, d'autre part, en établit l'invariance le long du mouvement elliptique[23] :

> Il est visible que le premier membre de cette équation est une différentielle complète par rapport à t ; en intégrant, nous aurons donc cette équation fort simple
>
> $$\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\phi} - \frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\phi} + \frac{db}{du}\cdot\frac{da}{d\psi} - \frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi} + \frac{db}{dv}\cdot\frac{da}{d\theta} - \frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta} = \text{ const.}$$
>
> On conçoit que la constante qui fait le second membre de cette équation, sera en général une fonction de a et b, et des constantes arbitraires contenues dans les autres intégrales des équations du mouvement ; quelques fois il pourra arriver que sa valeur ne renferme ni la constante a ni la constante b ; dans d'autres cas elle ne contiendra aucune constante arbitraire, et se réduira à une constante déterminée ; mais, afin de rappeler l'origine de cette quantité, qui représente une certaine combinaison des différences partielles des valeurs de a et b, nous ferons usage de cette notation (b, a), pour la désigner ; de manière que nous aurons généralement
>
> $$\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\phi} - \frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\phi} + \frac{db}{du}\cdot\frac{da}{d\psi} - \frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi} + \frac{db}{dv}\cdot\frac{da}{d\theta} - \frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta} = (b, a).$$

Notons que, pour des raisons pratiques, que nous ne discuterons pas, Poisson est passé du système de conditions initiales $(\phi, \psi, \theta, \phi', \psi', \theta', t)$ à un système $(\phi, \psi, \theta, s, u, v, t)$ sans que cela n'affecte ses résultats[24]. On notera aussi que, par construction, les parenthèses de Poisson sont des fonctions *a priori* de ces conditions initiales et qu'il faut montrer qu'elles ne dépendent que des constantes d'intégration. Ce résultat est contenu de façon implicite dans le théorème suivant[25] :

> L'analyse que nous venons d'exposer nous conduit donc à ce résultat remarquable, que si l'on prend les valeurs des constantes arbitraires a et b,

[20] Paragraphe 4, p. 275.
[21] On peut y penser comme aux coordonnées du mobile, mais pas nécessairement.
[22] Ce que Poisson nomme leurs *coefficients différentiels* par rapport au temps.
[23] Paragraphe 6, p. 280.
[24] Les variables s, u, v sont précisément les quantités conjuguées des forces vives par rapport aux variables ϕ, ψ, θ.
[25] Paragraphe 7, p. 280–281.

> contenues dans les intégrales des équations du mouvement d'un système de corps, et qu'on exprime ces valeurs en fonction des variables indépendantes ϕ, ψ et θ, et des quantités s, u, v, la combinaison des différences partielles de ces fonctions représentée par (a, b) est toujours une quantité constante.

Poisson exprime son résultat de façon plus explicite dans le paragraphe 10, p. 289 :

> D'après le théorème du n^o 7, les coefficients (a, b), (a, c), &c., sont des fonctions de a, b, c, e, f, g.

Ici, a, b, c, e, f, g représentent un choix arbitraire de constantes d'intégration du système différentiel. Il ne nous reste qu'à conclure par le résultat fondamental de ce paragraphe qui est l'expression des variations des éléments a, b, c, ... que Poisson donne explicitement au paragraphe 10, p. 288 :

> En faisant attention à ce que désignent les notations (a, b), (a, c) &c. du n^o 6, on trouve
>
> $$da = (a, b) \cdot \frac{d\Omega}{db} dt + (a, c) \cdot \frac{d\Omega}{dc} dt + (a, e) \cdot \frac{d\Omega}{de} dt + (a, f) \cdot \frac{d\Omega}{df} dt + (a, g) \cdot \frac{d\Omega}{dg} dt.$$

Cette dernière identité est naturellement à rapprocher de l'expression (3) ci-dessus, établie par Lagrange, et elle donne, si on l'applique à la variation da, les valeurs suivantes[26] :

$$A = 0,\ B = (a, b),\ C = (a, c),\ F = (a, f),\ G = (a, g),\ H = (a, h),$$

et ainsi de suite.

Autrement dit, Poisson résout l'inversion du système des parenthèses de Lagrange par un calcul direct, exprimant les coefficients du système inverse par ce que l'on doit bien appeler les *parenthèses de Poisson*, ce qui est la contribution originale de Poisson à la méthode de la variation des constantes de Lagrange, appliquée à tous les problèmes de la mécanique. Notons toutefois qu'en utilisant lui aussi le même système parenthétique, Poisson introduit une confusion : les parenthèses de Poisson ne sont pas les parenthèses de Lagrange. C'est avec cette question de notation que nous allons achever notre discussion sur les parenthèses et crochets de Lagrange et de Poisson.

---

[26] Les notations particulières des constantes du mouvement, a, b, c, e, f, g, ou a, b, c, f, g, h, ou autres n'ayant évidemment aucune importance, ces calculs s'appliquent indifféremment à tout système complet de constantes d'intégration.

Parenthèses ou crochets ?

Dans le paragraphe 11 de son mémoire d'octobre 1809, à la page 290, Poisson établit la comparaison entre son étude et les résultats de Lagrange lus en mars 1809 :

> Nous rapporterons ici les formules du Mémoire de M. Lagrange, afin de les comparer à celles que nous venons de trouver, et de montrer l'analogie singulière qui existe entre les unes et les autres. Voici ces formules :
>
> $$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{da}dt &= [a,b]db + [a,c]dc + [a,e]de + [a,f]df + [a,g]dg \\ \frac{d\Omega}{db}dt &= -[a,b]da + [b,c]dc + [b,e]de + [b,f]df + [b,g]dg \\ &\dots \end{aligned}$$
>
> Les notations $[a,b]$, $[a,c]$, &c. désignent certaines combinaisons des différences partielles, relatives à a,b,c,e,f,g, des valeurs de ϕ,ψ,θ,s,u,v, données par les intégrales de l'équation (a) [du mouvement non perturbé] que l'on suppose connues. On a en général,
>
> $$[a,b] = \frac{d\phi}{da}\cdot\frac{ds}{db} - \frac{d\phi}{db}\cdot\frac{ds}{da} + \frac{d\psi}{da}\cdot\frac{du}{db} - \frac{d\psi}{db}\cdot\frac{du}{da} + \frac{d\theta}{da}\cdot\frac{dv}{db} - \frac{d\theta}{db}\cdot\frac{dv}{da};$$
>
> et l'on voit que relativement à ces coefficients de M. Lagrange, comme par rapport aux nôtres, on a
>
> $$[a,b] = -[b,a],\ [a,a] = 0.$$
>
> Monsieur Lagrange démontre directement que les quantités $[a,b]$, $[a,c]$, &c. sont des fonctions de a,b,c,e,f,g, qui ne renferment pas le terme [*sic*] d'une manière explicite ; d'où l'on conclut ensuite que, par des éliminations entre les équations que nous citons, on obtiendra les valeurs de da, db, dc, de, df, dg, exprimées au moyen des différences partielles de Ω prises par rapport à a,b,c, &c., et multipliées par des fonctions de ces constantes. Nos formules ont l'avantage de donner immédiatement ces valeurs.

Il semble que dans cet énoncé l'imprimeur ait confondu *terme* et *temps.*

Voilà donc, clairement énoncée par l'auteur, sa contribution au calcul de Lagrange. Remarquons toutefois qu'ayant utilisé lui-même, dans les notations de ce mémoire du 16 octobre 1809, des parenthèses qui ne correspondent pas aux parenthèses de Lagrange, Poisson est obligé, pour éviter toute confusion dans la citation qu'il fait de Lagrange, de remplacer par des crochets, $[a,b,]$, $[a,c]$, etc., ce que Lagrange avait noté avec des parenthèses, $(a, b,)$, (a, c), etc., dans ses mémoires d'août 1808 et de mars 1809.

Après le mémoire de Poisson d'octobre 1809, Lagrange réajuste sa propre théorie puisqu'il publie quelques mois plus tard un « Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique », lu à l'Institut le 19 février 1810, dans lequel il donne une version nouvelle de l'inversion du système de ses parenthèses. On y trouve précisément, à la page 815, les formules d'inversion suivantes :

$$\frac{da}{dt} = [a,b]\frac{d\Omega}{db} + [a,c]\frac{d\Omega}{dc} + [a,f]\frac{d\Omega}{df} + [a,g]\frac{d\Omega}{dg} + [a,h]\frac{d\Omega}{dh}, \text{ etc.}$$

avec pour définition des crochets,

$$[a,b] = -\frac{da}{d\alpha}\frac{db}{d\lambda} - \frac{da}{d\beta}\frac{db}{d\mu} - \frac{da}{d\gamma}\frac{db}{d\nu} + \frac{da}{d\lambda}\frac{db}{d\alpha} + \frac{da}{d\mu}\frac{db}{d\beta} + \frac{da}{d\nu}\frac{db}{d\gamma}.$$

Nous pouvons remarquer que Lagrange reste cohérent avec ses notations précédentes et note par des crochets le système inverse de ses parenthèses. Il obtient pour la variation da, en rapprochant ces dernières définitions de son système (3), les identités suivantes

$$A = 0,\ B = [a,b],\ C = [a,c],\ F = [a,f],\ G = [a,g],\ H = [a,h].$$

Ainsi, les crochets de Lagrange sont les parenthèses de Poisson, à une nuance près que nous verrons plus loin. Il est à noter que Poisson lui-même ne donne pas une version personnelle des parenthèses de Lagrange, qu'il a, nous l'avons vu, notées par des crochets. Enfin, dans sa *Mécanique analytique*, Lagrange reprend toutes ces constructions et en donne une démonstration très simplifiée que l'on peut considérer comme moderne. Il y inverse son système de notations : ses crochets deviennent des parenthèses, et ses parenthèses, des crochets[27]. Cette inversion est peut-être sa façon de rendre justice à la contribution de Poisson. Il avait en effet écrit dans l'introduction de son mémoire de 1810, à la page 810 :

> Mais l'application des formules générales aux Problèmes particuliers demandait encore un long calcul, à cause des éliminations qu'il fallait faire pour obtenir séparément l'expression de la variation de chacune des constantes devenues variables. Heureusement une considération très-simple, que je vais exposer et qui m'avait échappé, facilite et simplifie extrêmement cette application et ne laisse plus rien à désirer dans la Théorie analytique de la variation des constantes, relativement aux questions de la Mécanique.

[27] Lagrange, *Mécanique analytique*, t. 2, p. 75–76.

Lagrange ajoute encore, à la page 812, une référence à la contribution de Poisson, qui est aussi une précision capitale quant à la différence de nature des deux constructions, malgré leur ressemblance.

> M. Poisson a lu, le 16 octobre dernier à cette Classe, un « Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique », lequel est imprimé dans le volume qui vient de paraître du Journal de l'École Polytechnique. Ce Mémoire contient une savante analyse qui est comme l'inverse de la mienne, et dont l'objet est d'éviter les éliminations que celle-ci exigeait. L'Auteur parvient en effet, par un calcul assez long et délicat, à des formules qui donnent directement les valeurs des différentielles des constantes arbitraires devenues variables. *Ces formules ne coïncident pas immédiatement avec celles que je donne dans ce Mémoire*, parce qu'*elles renferment les constantes arbitraires en fonction des variables du Problème et de leurs différentielles, au lieu que les nôtres ne renferment ces constantes qu'en fonction d'autres constantes* ; mais il est facile de se convaincre *a priori* qu'elles conduisent aux mêmes résultats.

Notons, pour conclure, que ce que nous appelons aujourd'hui *crochets de Poisson*, et que nous notons par des accolades $\{a, b\}$, correspond aux parenthèses (a, b) que Poisson introduit dans son mémoire de 1809, et aux crochets $[a, b]$ définis par Lagrange dans son mémoire de 1810. Il semble que la popularisation et la généralisation des théorèmes contenus dans les paragraphes 6 et 7 de ce mémoire de Poisson soient dues à Jacobi[28].

[28]Voir à ce sujet les articles d'Alain Albouy, Histoire des équations de la mécanique analytique : repères chronologiques et difficultés, et d'Yvette Kosmann-Schwarzbach, Les crochets de Poisson, de la mécanique céleste à la mécanique quantique, dans ce volume.