GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Exemples de groupes difféologiques : flots irrationnels sur le tore.* Note de **Paul Donato** et **Patrick Iglesias,** présentée par Alain Connes.

Nous illustrons la technique des « espaces et groupes difféologiques » de J.-M. Souriau dans le cas du quotient T_α du tore standard par le flot irrationnel de pente α. Le calcul du revêtement universel et du groupe fondamental de T_α, respectivement **R** et $\mathbf{Z}^2$, permet de classer difféologiquement ces tores : T_α et T_β sont difféomorphes si et seulement si $\alpha \sim \beta$ modulo $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$; de plus le calcul de $\mathrm{Diff}(T_\alpha)$ fait apparaître une différence entre les irrationnels quadratiques et les autres.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — An example of diffeological groups the irrational flow on the torus.

Using the J.-M. Souriau's theory of "diffeological groups", we define a differential structure on the irrational torus T_α *which allows us to compute its universal covering, equal to* **R**, *and its first homotopy group equal to* $\mathbf{Z}^2$. *We prove that two such torus* T_α *and* T_β *are diffeomorphic if and only if* $\alpha \sim \beta$ *modulo* $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$, *finally we compute* $\mathrm{Diff}(T_\alpha)$. *A significant difference appears between the quadratic irrational and the other cases.*

I. INTRODUCTION. — Nous considérons le tore standard $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ muni de sa structure différentielle C^∞. La projection sur T^2 d'une droite $y = \alpha x$ de **R** définit un sous-groupe à un paramètre de T^2 noté $[\alpha]$. Le groupe quotient est noté $T_\alpha = T^2/[\alpha]$, sa topologie quotient est grossière. L'étude d'objets singuliers dont T_α est l'exemple le plus connu, a suscité le développement de différentes techniques, algébriques ou géométriques, citons parmi d'autres : les C*-algèbres ([3], [7]), les Q-variétés [1], les schémas analytiques [2]. Nous voulons illustrer ici la technique des *espaces difféologiques*, initialement développée par J.-M. Souriau pour l'étude des groupes de dimension infinie, mais qui s'applique à tous les quotients (éventuellement singuliers) des groupes de Lie. T_α peut être muni d'une structure de groupe difféologique (nous renvoyons aux références [8] et [4] pour les détails concernant cette notion). Cette structure coïncide avec la structure canonique de groupe de Lie si α est rationnel. Ici cette structure est caractérisée par la définition suivante [8] :

(1) $f \in \mathrm{DL}(\mathbf{R}^n, T_\alpha)$ si et seulement si f est définie sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans T_α et vérifie : pour tout x dans Ω il existe un voisinage ouvert V de x et une application $F \in C^\infty(V, T^2)$ relevant f, i.e. on a dans V la relation : $P_\alpha \circ F = f$.

P_α est l'épimorphisme canonique de T^2 sur T_α, $\mathrm{DL}(\mathbf{R}^n, T_\alpha)$ est par définition la famille des applications différentiables d'ouverts de $\mathbf{R}^n$ à T_α (appelées aussi « n-plaques » de T_α). L'ensemble des n-plaques, quand n parcourt **N**, caractérise la structure difféologique de T_α.

Les applications différentiables de T_α à valeurs dans un « espace difféologique » E, sont les applications $\varphi : T_\alpha \to E$ telles que pour toute plaque f de T_α, $\varphi \circ f$ est une plaque de E. En particulier les difféomorphismes de T_α à E sont les bijections bi-différentiables.

Pour tout groupe difféologique et pour tout espace homogène (quotient d'un groupe difféologique par un sous-groupe quelconque) sont définies les notions de connexité puis de simple connexité. Dans le cas connexe sont aussi définis le revêtement universel et le groupe fondamental qui ne dépendent que de la structure difféologique ([4], [8]).

Nous illustrons ces techniques dans le cas précis des enroulements irrationnels du tore. Le passage au revêtement universel de ces quotients nous permet d'en donner une classification difféologique complète; nous pouvons également expliciter le groupe des difféomorphismes de T_α. En ce qui concerne la classification, il y a coïncidence des

0249-6291/85/03010127 $ 2.00 © Académie des Sciences

résultats avec ceux obtenus par la théorie des C*-algèbres (*cf.* [3] et [7]); on trouve aussi une classification similaire faite à partir des schémas de variétés [2].

II. Revêtement et groupe fondamental. — Nous indiquons brièvement la construction du revêtement universel d'un espace difféologique homogène :

(2) Soient G un groupe difféologique connexe et $p : \tilde{G} \to G$ son revêtement universel. Soit H un sous-groupe quelconque de G; on note $\tilde{H} = p^{-1}(H)$ et $\tilde{H}_0$ sa composante neutre, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \to & \tilde{G}/\tilde{H}_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \to & G/H. \end{array}$$

$\tilde{G}/\tilde{H}_0$ est alors le revêtement universel de G/H et $\tilde{H}/\tilde{H}_0$ son groupe fondamental.

D'autre part tous les revêtements connexes de G/H sont donnés par les quotients $\tilde{G}/K$ où K est un sous-groupe intermédiaire $\tilde{H}_0 \subset K \subset \tilde{H}$.

Dans le cas particulier qui nous occupe, en notant D_α la droite $y = \alpha x$ et ξ le vecteur (0, 1), on a :

$$G = T^2, \qquad \tilde{G} = \mathbf{R}^2, \qquad H = [\alpha], \qquad \tilde{H} = D_\alpha + (\mathbf{Z} + \alpha\,\mathbf{Z})\,\xi.$$

La connexité coïncide avec la connexité par arcs différentiables, un calcul facile montre alors que :

$$\tilde{T}_\alpha = \mathbf{R} \qquad \text{et que} \qquad \pi_1(T_\alpha) = \mathbf{Z}^2. \tag{3}$$

Quelques commentaires : le revêtement universel difféologique de T_α est donc la projection $\pi_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/(\mathbf{Z} + \alpha\,\mathbf{Z})$; la fibre-type $\mathbf{Z} + \alpha\,\mathbf{Z}$ est difféologiquement discrète, c'est-à-dire que les seules applications différentiables à valeurs dans la fibre sont les constantes. Enfin l'action du $\pi_1(T_\alpha)$ sur $\mathbf{R}$ est donnée par : $(n, m)(x) = x + n + \alpha m$. Les autres revêtements connexes de T_α sont du type :

$$\mathbf{R}/(k\,\mathbf{Z} + \alpha p\,\mathbf{Z}) \qquad \text{où} \quad (k, p) \in \mathbf{Z}^2. \tag{4}$$

Le nombre de feuillets, quand $k.p \neq 0$, est égal $k.p$.

III. Classification des T_α. — Soient T_α et T_β deux tores irrationnels, tout difféomorphisme $\varphi \in \mathrm{Diff}(T_\alpha, T_\beta)$, se relève en un isomorphisme f de leurs revêtements universels :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle \pi_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\beta} \\ T_\alpha & \xrightarrow{\varphi} & T_\beta \end{array}$$

l'égalité $\pi_\alpha \circ f = \varphi \circ \pi_\beta$ se traduit par : pour tous x réel et $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$, il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ tel que :

$$f(x + n + \alpha m) = f(x) + p + \beta q,$$

différentiable en x. De plus f induit un isomorphisme de $\mathbf{Z} + \alpha\,\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Z} + \beta\,\mathbf{Z}$; il existe donc une matrice de $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$ telle que :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},$$

avec a, b, c, d entiers tels que $ad - bc = \pm 1$, la différentiabilité de f implique $f'(m + \alpha n) = f'(0)$, et ce pour tous m, n entiers; on a donc, par densité de $\mathbf{Z} + \alpha\,\mathbf{Z}$ dans

R, $f'(x)=f'(0)$, f est donc affine : $f(x)=\lambda x+r$, $\lambda\neq 0$. Appliqué à $x=n+\alpha m$, il vient $\lambda=c+\beta d$ et $\alpha=(a\beta+b)/(c\beta+d)$; α et β sont donc équivalent modulo $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$, dont l'action sur **R** est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}(x)=(ax+b)/(cx+d).$$

Réciproquement, on vérifie que si $\alpha\sim\beta$ modulo $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$, alors l'application $f(x)=(c+\beta d)x+r$, avec c et d premiers entre eux, se projette sur un difféomorphisme de T_α à T_β.

THÉORÈME. — *Deux tores irrationnels* T_α *et* T_β *sont difféomorphes si et seulement si* $\alpha\sim\beta$ *modulo* $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$.

Remarque. — Ce théorème est trivialement vérifié pour des « tores rationnels ».

IV. DIFFÉOMORPHISMES DE T_α. — On a vu au paragraphe précédent que les seuls difféomorphismes d'un tore irrationnel à un autre sont les projections d'applications affines du type $f(x)=(c+\beta d)x+r$, r réel et c, d entiers premiers entre eux. Si l'on impose à f de se projeter sur un difféomorphisme de T_α dans lui-même il faut de plus qu'il existe $(a, b)\in\mathbf{Z}^2$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\in \mathrm{Stab}(\alpha), \tag{6}$$

où $\mathrm{Stab}(\alpha)$ est le groupe d'isotropie de α sous l'action de $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$, cette condition (6) est la traduction de $\alpha=(a\beta+b)/(c\beta+d)$ pour $\alpha=\beta$; ces applications constituent un sous-groupe du groupe affine de **R**. En caractérisant leurs projections on détermine tous les difféomorphismes de T_α dans lui-même. Deux applications affines du type ci-dessus se projettent sur un même difféomorphisme si et seulement si :

$$\begin{cases} (c, d)=(c', d'), \\ \pi_\alpha(r)=\pi_\alpha(r'). \end{cases} \tag{7}$$

Définissons sur $\mathrm{Stab}(\alpha)\times T_\alpha$ la loi affine :

$$\begin{cases} (\mathrm{M}, \rho).(\mathrm{M}', \rho')=(\mathrm{MM}', \mathrm{M}.\rho'+\rho), \\ \mathrm{M}.\rho=\pi_\alpha[(c+\alpha d)x] \quad \text{si} \quad \pi_\alpha(x)=\rho, \end{cases} \tag{8}$$

où M est une matrice de $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$ de coefficients (a, b, c, d). C'est une loi de groupe difféologique pour laquelle :

$$(\mathrm{M}, \pi_\alpha(x))\mapsto(\pi_\alpha(x)\mapsto\pi_\alpha[(c+\alpha d)x]), \tag{9}$$

est un isomorphisme différentiable de $\mathrm{Stab}(\alpha)\times T_\alpha$ sur $\mathrm{Diff}(T_\alpha)$.

L'action de $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$ sur un réel se traduit par la modification de ses premiers coefficients dans sa décomposition en fractions continues; ainsi deux réels sont équivalents modulo $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{Z})$ si et seulement si ils ont même décomposition à partir d'un certain rang (qui n'est pas nécessairement le même pour les deux). Les irrationnels quadratiques sont les réels dont la suite des coefficients devient périodique; ainsi enlever ou ajouter des périodes à la suite laissera le nombre inchangé (*cf.* [9] pour ces questions). A partir de ces remarques on peut établir que :

$$\mathrm{Stab}(\alpha)=\mathbf{Z}_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}, \tag{10}$$

si α est irrationnel non quadratique.

$\mathrm{Stab}(\alpha) = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}$ si α est irrationnel quadratique d'où l'énoncé :

THÉORÈME. — *La composante neutre du groupe* $\mathrm{Diff}(\mathrm{T}_\alpha)$ *est égale au groupe des translations de* T_α. *D'autre part le groupe de ces composantes est égal à :*

(*a*) $\mathbf{Z}_2$ si α est irrationnel non quadratique;

(*b*) $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}$ si α est irrationnel quadratique.

C'est à notre connaissance la première fois qu'une classification des T_α distingue les nombres quadratiques. La différence entre les nombres diophantiens et les nombres de Liouville, qui apparaît dans l'étude cohomologique des variétés feuilletées [5], se retrouve également dans la classification des fibrés **R**-principaux au-dessus de T_α (*cf.* [6]).

Les discussions que nous avons eues avec J. Bellissard et J.-M. Souriau nous ont été précieuses; nous les en remercions.

Remise le 11 février 1985, acceptée le 6 mai 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. BARRE, De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, *Ann. Inst. Fourier*, 23, 1973, p. 227-312.

[2] L. G. BOUMA et W. T. VAN EST, Manifold schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.*, séries A, 81, 1978, p. 313-347.

[3] A. CONNES, An analogue of the cross products of C*-algebras, *Adv. in Math.*, 39, 1981, p. 31-55.

[4] P. DONATO, Revêtements et groupe fondamental des espaces différentiels homogènes, *Thèse de doctorat d'état*, Université de Provence, 1984.

[5] J. L. HEITSCH, A cohomology for foliated manifolds, *Comm. Math. Helv.*, 50, 1975, p. 197-218.

[6] P. IGLESIAS, *Classification des fibrés principaux de groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *sur les tores de Denjoy-Poincaré*, prépublication CPT 84/P, 1690.

[7] M. A. RIEFFEL, C*-algebras associated with irrational rotations, *Pac. J. Math.*, 93, n° 2, 1981, p. 415-429.

[8] J.-M. SOURIAU, Groupes différentiels, *Lect. Notes in Math.*, 836, Springer Verlag, 1981, p. 91-128.

[9] H. M. STARK, *An introduction to number theory*, Markham Publish., Chicago, 1970.

P. D. : *Université de Provence, Département de Mathématiques, Centre de Physique théorique, CNRS, Luminy*, Case 907, 13288 *Marseille Cedex* 9.

P. I. : *CNRS, Centre de Physique théorique* (*Laboratoire propre*), *CNRS, Luminy*, Case 907, 13288 *Marseille Cedex* 9.