

EXEMPLE DE GROUPES DIFFERENTIELS :
 FLOTS IRRATIONNELS SUR LE TORE

P. DONATO *

P. IGLESIAS

Centre de Physique Théorique
 CNRS - Luminy - Case 907
 F-13288 MARSEILLE CEDEX 9 (FRANCE)

ABSTRACT

Using the J.M. Souriau's theory of "differential groups", we define a differential structure on the irrational torus \mathcal{T}_α which allows us to compute its universal covering, equal to \mathbb{R} , its first homotopy group, equal to $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. We prove that two such torus \mathcal{T}_α and \mathcal{T}_β are diffeomorphic iff $\alpha \sim \beta$ modulo $GL(2, \mathbb{Z})$, finally we compute $\text{Diff}(\mathcal{T}_\alpha)$. A significant difference appears between the quadratic irrational and the other cases.

JULY 1983

CPT-83/P.1524

* Université de Provence , Département de Mathématiques

I. INTRODUCTION

Nous considérons le tore standard $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ muni de sa structure différentielle C^∞ . La projection sur T^2 d'une droite $y = \alpha x$ de \mathbb{R}^2 définit un sous groupe à un paramètre de T^2 noté $[\alpha]$. Grâce aux techniques des espaces et groupes différentiels introduits par J.M. Souriau [2], le groupe quotient $\mathcal{T}_\alpha = T^2 / [\alpha]$ peut être muni d'une structure différentielle qui coïncide avec la structure canonique si α est rationnel. Ici cette structure est caractérisée par la définition suivante [2]:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \in D(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\alpha) \text{ si et seulement si } f \text{ est définie sur un ouvert} \\ \mathcal{U} \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ à valeur dans } \mathcal{T}_\alpha \text{ telle que : pour tout } x \\ \text{dans } \mathcal{U} \text{ il existe un voisinage ouvert } V \text{ de } x \text{ et une appli-} \\ \text{cation } \hat{f} \text{ de } C^\infty(V, T^2) \text{ relevant } f, \text{ i.e. } p_\alpha \circ \hat{f} = f, \text{ sur } V. \end{array} \right.$$

p_α est l'épimorphisme canonique de T^2 sur \mathcal{T}_α , $D(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\alpha)$ est par définition la famille des applications différentiables d'ouverts de \mathbb{R}^n à \mathcal{T}_α .

Les applications différentiables de \mathcal{T}_α à valeurs dans un "espace différentiel" E , sont les applications $\Psi: \mathcal{T}_\alpha \rightarrow E$ telles que pour tout f élément de $D(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\alpha)$ $\Psi \circ f$ est un élément de $D(\mathbb{R}^n, E)$. En particulier les difféomorphismes de \mathcal{T}_α à E sont les bijections bi-différentiables.

Pour tout groupe différentiel et pour tout espace homogène (quotient d'un groupe différentiel par un sous groupe quelconque) sont définies les notions de connexité puis de simple connexité. Dans le cas connexe sont aussi définis le revêtement universel et le groupe fondamental qui ne dépendent que de la structure différentielle [1][2].

Nous allons illustrer ces notions dans le cas précis des tores irrationnels, inaccessibles aux techniques usuelles de la géométrie différentielle.

II. REVÊTEMENTS ET GROUPE FONDAMENTAL

Rappelons la construction du revêtement universel d'un espace homogène différentiel (pour plus de précisions cf. [1] et [2]).

Soit G un groupe différentiel connexe, \hat{G} son revêtement universel, p la projection de \hat{G} sur G . Soient H un sous-groupe quelconque de G , $\hat{H} = p^{-1}(H)$, \hat{H}^0 la composante neutre de \hat{H} alors on a le diagramme :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \hat{G} & \longrightarrow & \hat{G}/\hat{H}^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

\hat{G}/\hat{H}^0 est le revêtement universel de G/H et \hat{H}/\hat{H}^0 son groupe fondamental.

D'autre part, tous les autres revêtements de G/H sont donnés à une conjugaison près par les quotients \hat{G}/K où K est un sous-groupe intermédiaire $\hat{H}^0 \subset K \subset \hat{H}$.

Dans le cas particulier du tore irrationnel \mathcal{T}_α , en notant D_α la droite $y = \alpha x$ on a :

$$G = T^2 \quad \hat{G} = \mathbb{R}^2 \quad H = [\alpha] \quad \hat{H} = D_\alpha + (\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La connexité coïncidant avec la connexité par arc différentiable, il vient après un calcul élémentaire (*) (**):

$$(3) \quad \hat{\mathcal{T}}_\alpha = \mathbb{R} \quad \pi_1(\mathcal{T}_\alpha) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(*) L'homotopie correspondante à la topologie quotient est évidemment triviale !

(**)

L'action de $\pi_1(\mathcal{T}_\alpha) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sur \mathbb{R} est donnée par :

$(n, m) : x \mapsto x + n + \alpha m$. On notera $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ le sous-groupe des réels de la forme $n + \alpha m$ $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Les autres revêtements connexes sont du type :

$$(4) \quad \mathbb{R} / [k\mathbb{Z} + \alpha\ell\mathbb{Z}] \quad (k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Le nombre de feuillettes, quand $k.\ell \neq 0$, est égal à $k.\ell$.

III. CLASSIFICATION DES TORES IRRATIONNELS

Soient \mathcal{T}_α et \mathcal{T}_β deux tores irrationnels et $\bar{f} \in \text{Diff}(\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta)$.
Il existe un isomorphisme de revêtement universel f qui relève \bar{f} [1]:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \pi_\beta \\ \mathcal{T}_\alpha & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{T}_\beta \end{array}$$

La propriété $\pi_\beta \circ f = \bar{f} \circ \pi_\alpha$ se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : f(x+n+\alpha m) = f(x) + p + \beta q$$

où $(x, n, m) \mapsto (p, q)$ est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2$ à \mathbb{Z}^2 différentiable en x et donc constante en x . De plus, f étant un isomorphisme de revêtement universel, sa restriction à $\mathbb{Z} + \alpha.\mathbb{Z}$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z} + \alpha.\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z} + \beta.\mathbb{Z}$, il existe donc une matrice de $GL(2, \mathbb{Z})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z}) \quad \text{i.e. } a, b, c, d \text{ entiers et } ad - bc = 1 \end{array} \right.$$

Enfin la différentiabilité de f implique $f'(n+\alpha m) = f'(0) \forall (n, m) \in \mathbb{Z}$,

la densité de $\mathbb{Z} + \alpha \mathbb{Z}$ dans \mathbb{R} entraîne pour tout x réel $f'(x) = f'(0)$ et donc f est affine : $f(x) = \lambda x + r$, $\lambda \neq 0$. Appliqué à $x = n + \alpha m$ il vient $\lambda = \alpha c + d$ et $\alpha = \frac{\beta a + b}{\beta c + d}$ c'est-à-dire α et β sont équivalents modulo $GL(2, \mathbb{Z})$. L'action de $GL(2, \mathbb{Z})$ étant donnée par :

$$(5) \quad \left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, x \right) \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

Réciproquement, on vérifie que si $\alpha \sim \beta$ modulo $GL(2, \mathbb{Z})$, alors f définie plus haut se projette sur un difféomorphisme de \mathcal{T}_α à \mathcal{T}_β .

Théorème : Deux tores irrationnels \mathcal{T}_α et \mathcal{T}_β sont difféomorphes si α et β sont équivalents modulo $GL(2, \mathbb{Z})$.

Remarque : le théorème est trivialement vérifié si α ou β est rationnel.

IV. DIFFÉOMORPHISMES DE \mathcal{T}_α

Les conclusions du paragraphe précédent, appliquées au cas $\alpha = \beta$ permettent de calculer $\text{Diff}(\mathcal{T}_\alpha)$.

Tout difféomorphisme de \mathcal{T}_α est la projection d'une application affine :

$$f(x) = (\alpha c + d)x + r \quad (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } r \in \mathbb{R}$$

telle que :

$$(6) \quad \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \text{Stab}_{GL(2, \mathbb{Z})}(\alpha)$$

la condition (6) est la traduction pour $\alpha = \beta$ de $\alpha = \frac{\beta a + b}{\beta c + d}$.

Ces applications constituent un sous-groupe du groupe affine de \mathbb{R} . Deux d'entre elles f et f' se projettent sur le même difféomorphisme de \mathcal{T}_α si et seulement si :

$$(7) \quad \begin{cases} (c,d) = (c',d') \\ \pi_\alpha(r) = \pi_\alpha(r') \end{cases}$$

Définissons sur $\text{Stab}_{\text{GL}(2,\mathbb{Z})}(\alpha) \times \mathcal{C}_\alpha$ la loi affine :

$$(8) \quad \begin{cases} (M, \rho) \cdot (M', \rho') = (MM', M \cdot \rho' + \rho) \\ M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ et } M \cdot \rho = \pi_\alpha((\alpha c + d)x) \text{ si } \pi_\alpha(x) = \rho \end{cases}$$

l'application définie sur $\text{Stab}_{\text{GL}(2,\mathbb{Z})}(\alpha) \times \mathcal{C}_\alpha$ dans $\text{Diff}(\mathcal{C}_\alpha)$ par :

$$(9) \quad (M, \rho) \longmapsto [\pi_\alpha(x) \longmapsto \pi_\alpha((\alpha c + d)x) + \rho]$$

est un isomorphisme.

Il est clair que si α est irrationnel non quadratique, son stabilisateur dans $\text{GL}(2,\mathbb{Z})$ est réduit à $\mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Si α est irrationnel quadratique, des théorèmes standards de la théorie des nombres [3], permettent d'établir que :

$$(10) \quad \text{Stab}_{\text{GL}(2,\mathbb{Z})}(\alpha) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$$

On utilise pour cela la décomposition en fractions continues. D'où :

Théorème : La composante neutre du groupe des difféomorphismes de \mathcal{C}_α est égale au groupe des translations de \mathcal{C}_α .

D'autre part le groupe de ses composantes est égal à :

- a) \mathbb{Z}_2 si α est irrationnel non quadratique
- b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ si α est irrationnel quadratique

La loi de groupe est donnée par (8).

Les discussions que nous avons eues avec J. Bellissard et J.M. Souriau nous ont été précieuses ; nous les en remercions.

- REFERENCES -

- [1] P. DONATO
"Homotopie et revêtements des espaces homogènes différentiels"
(à paraître).
- [2] J.M. SOURIAU
"Groupes différentiels", Lecture Notes in Mathematics,
836, p. 91, Springer Verlag 1981.
- [3] H.M. STARK
"An Introduction to Number Theory", Markham Publish.,
Chicago 1970.