D'où viennent les équations du mouvement des solides ?

patrick iglesias-zemmour

*L'étude des mouvements d'un solide dans l'espace euclidien **R**^{3} est le terrain priviégié de la théorie symplectique des systèmes complètement intégrables. Mais on ne trouve pas toujours les développements qui aboutissent aux équations du mouvement des solides dans les ouvrages classiques, cette petite note essaye de combler cette lacune.*

patrick.iglesias@cmi.univ-mrs.fr,centre de mathématiques et d'informatique 39, rue F. joliot-curie 13453 marseille cedex 13.

Les mouvements du solide

L'étude des mouvements d'un solide dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ est le terrain privilégié de la théorie symplectique des systèmes complètement intégrables. Comme on ne trouve pas toujours les développements qui aboutissent aux équations du mouvement des solides dans les ouvrages classiques, nous les dans cette petite note.

Définissons d'abord ce qu'est un solide. Intuitivement, c'est un ensemble de points $r = (r_1, \cdots, r_N)$ dont les distances mutuelles sont fixes :

$$\|r_i - r_j\| = cst, \quad \forall i, j = 1 \cdots N. \tag{1}$$

Chacun de ces points est soumis à une force $F_i = F_i(t, r_1, \cdots, r_N)$ et vérifie donc les équations de Newton :

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i, \quad m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i, \quad F_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}, \tag{2}$$

mais en respectant la contrainte solide. Comment traiter cette contrainte, c'est ce que nous allons voir.

La construction que nous avons donnée à partir du principe des travaux virtuels, qui conduit à transformer cette famille d'équations en un problème variationnel, est encore valable, avec comme lagrangien :

$$L(t, r, v) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - U, \tag{3}$$

où

$$r = (r_1, \cdots, r_N) \quad \text{et} \quad v = (v_1, \cdots, v_N) \in \mathbf{R}^{3N}. \tag{4}$$

Nous cherchons les solutions du problème variationnel suivant :

$$\delta a = 0, \quad \text{avec} \quad a = \int_a^b L(t, r(t), v(t)) \, dt, \tag{5}$$

mais avec les contraintes suivantes sur les variations :

$$\delta \|r_i - r_j\| = 0. \tag{6}$$

Si l'on veut éviter maintenant des calculs pénibles et quasiment inextricables, il faut remarquer que la condition de rigidité signifie qu'à chaque instant il existe une isométrie g_t de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ telle que :

$$r_i(t) = g_t(r_i), \quad \forall i = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

Rappelons que le groupe des isométries de $\mathbf{R}^3$, que nous noterons E, est appelé *groupe des déplacements euclidiens*, qu'un élément $g \in E$ est défini par une rotation $A \in \mathrm{SO}(3)$ et un vecteur $T \in \mathbf{R}^3$, et que son action sur $\mathbf{R}^3$ est donnée par :

$$g = (A, T) \in E, \quad r \in \mathbf{R}^3 \quad g(r) = Ar + T. \tag{8}$$

En d'autre termes, la contrainte solide signifie simplement que le point

$$r = (r_1, \cdots, r_N)$$

évolue sur une orbite du groupe E agissant sur $\mathbf{R}^{3N}$.

Si le nombre de points est suffisant et s'ils ne sont pas tous alignés, alors le déplacement g_t qui envoie les r_i sur $r_i(t)$ est unique. Autrement dit, à tout chemin $t \mapsto r = (r_1, \cdots, r_N)$ dans $\mathbf{R}^{3N}$ est associé un seul chemin $t \mapsto g(t) = g_t$ dans E. De plus ce chemin est différentiable comme l'est $t \mapsto r$.

Toute variation δr compatible avec les contraintes est obtenue par une variation quelconque du chemin $t \mapsto g_t$:

$$\delta r_i(t) = \delta g(t)(r_i). \tag{9}$$

En choisissant une origine r de l'orbite, et puisque

$$v(t) = \frac{dg(t)}{dt}(r), \tag{10}$$

on peut écrire l'action a directement sur le groupe E

$$a = \int_a^b \tilde{L}(t, g(t), \nu(t))\ dt, \tag{11}$$

où $\tilde{L}$ est l'image réciproque de L par l'application définie sur $\mathbf{R} \times TE$ à valeurs dans $\mathbf{R} \times T\mathbf{R}^{3N}$:

$$\hat{r} : (t, g, \nu) \mapsto (t, g(r), \nu(r)), \quad g \in E, \quad \nu \in T_g E, \tag{12}$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{L}(t, g, \nu) = L(t, g(r), \nu(r)). \tag{13}$$

Dans le cas qui nous préoccupe le vecteur ν est défini par deux vecteurs $\alpha \in T_A\,\mathrm{SO}(3)$ et $\tau \in \mathbf{R}^3$ de telle sorte que :

$$\nu = (\alpha, \tau), \quad r_i \in \mathbf{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \nu(r_i) = \alpha r_i + \tau. \tag{14}$$

Nous sommes donc ramenés à la situation générale d'un problème variationnel avec, comme variété de configuration, le groupe de Lie des déplacements euclidiens de l'espace $\mathbf{R}^3$. Nous avons donc à notre disposition toutes les constructions qui ont été décrites jusqu'à présent, en particulier l'expression de la forme de Cartan ϖ sous sa forme non homogène [Igl] :

$$\varpi(\delta y) = \tilde{p}(\delta g) - \tilde{h}\delta t, \quad \tilde{y} = (t, g, \nu), \tag{15}$$

où :

$$\tilde{p} = d\tilde{L}_g \in T_g^*E, \quad \text{et} \quad \tilde{h}(t, g, \nu) = h(t, g(r), \nu(r)). \tag{16}$$

On obtient immédiatement la valeur de $\tilde{L}$:

$$\tilde{L}(t, g, \nu) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\alpha J \bar{\alpha} + \langle \alpha c, \tau \rangle + \frac{m}{2}\,\|\tau\|^2 - \tilde{U}, \tag{17}$$

la matrice J étant la « matrice des moments » :

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i \bar{r}_i, \tag{18}$$

le vecteur c et le scalaire m

$$c = \sum m_i r_i, \quad m = \sum_{i=1}^{N} m_i, \tag{19}$$

étant respectivement le centre de gravité du solide et sa masse totale. Enfin, $\tilde{U}(t, g) = U(t, g(r))$ est le potentiel des forces résultantes sur le solide.

La forme linéaire p a deux composantes, que nous noterons $p_{\mathrm{SO}(3)}$ et $p_{\mathbf{R}^3}$, qui ont pour valeur :

$$p_{\mathrm{SO}(3)}(\delta A) = \mathrm{Tr}[(J\bar{\alpha} + \tau\bar{c})\delta A] \quad \text{et} \quad p_{\mathbf{R}^3}(\delta\tau) = \langle m\tau + \alpha c, \delta\tau \rangle\,. \tag{20}$$

La construction de la forme de Cartan dans le cas général des solides libres n'est pas difficile mais fastidieuse, et nous nous contenterons, à partir de maintenant, du cas des mouvements du solides autour d'un point fixe. Le groupe qui intervient alors n'est plus le groupe des déplacements euclidiens mais son sous-groupe $SO(3)$. Les termes dépendants de τ disparaissent et il reste :

$$\tilde{L}(t, g, \nu) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\alpha J \bar{\alpha} - \tilde{U}. \tag{21}$$

La matrice J est définie positive, et définit donc une métrique riemannienne sur $SO(3)$; notons :

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle_J = \operatorname{Tr}\alpha J \bar{\alpha}', \quad \tilde{L} = \tfrac{1}{2}\|\alpha\|_J^2 - \tilde{U}. \tag{22}$$

La forme de Cartan devient :

$$\varpi(\delta y) = \langle \alpha, \delta A \rangle_J - \tilde{h}\delta t, \quad \text{avec} \quad \tilde{h} = \tfrac{1}{2}\|\alpha\|_J^2 + \tilde{U}, \quad y = (t, A, \alpha). \tag{23}$$

Notons alors :

$$\tilde{F} = -\operatorname{grad}_J \tilde{U} \in T_A \mathrm{SO}(3), \tag{24}$$

où grad_J désigne le gradient au sens de la norme définie par J, $\tilde{F}$ étant la force induite sur SO(3) par le potentiel $\tilde{U}$. La dérivée extérieure de ϖ s'écrit simplement :

$$d\varpi(\delta y, \delta' y) = \left\langle \delta A - \alpha\delta t, \delta'\alpha - \tilde{F}\delta' t \right\rangle_J - \left\langle \delta' A - \alpha\delta' t, \delta\alpha - \tilde{F}\delta t \right\rangle_J. \tag{25}$$

On peut déjà remarquer sur cette expression que si la force exercée sur le solide est nulle (donc $\tilde{F} = 0$), les équations que l'on obtient sont celles des géodésiques sur le groupe de SO(3) pour la métrique définie par J. En particulier, si $J = \mathbf{1}$ les mouvements solides sont les groupes à un paramètre de $SO(3)$. Autrement dit, les mouvements d'un solide s'interprètent comme les mouvements d'un point A dans l'espace des matrices $M(\mathbf{R}^3)$, muni de la métrique définie par J, soumis à une force $\tilde{F}$, et astreint à se mouvoir sur la sous-variété $\mathrm{SO}(3) \subset M(\mathbf{R}^3)$.

Notons encore que si le terme de force est suffisamment régulier, la variété symplectique des mouvements solides est le tangent du groupe SO(3) muni de la forme symplectique image réciproque de la forme de Liouville par la métrique J. Il suffit en effet de faire $t = cst$ et on obtient :

$$\omega(\delta x, \delta' x) = \langle \delta A, \delta'\alpha \rangle_J - \langle \delta' A, \delta\alpha \rangle_J, \quad x = (A, \alpha) \in T\,\mathrm{SO}(3). \tag{26}$$

Le traitement des problèmes de ce type est généralement difficile du fait de la métrique et du plongement de la sous-variété de configuration. Mais dans le cas d'un groupe, comme ici, on peut trivialiser l'espace tangent ; $T\,\mathrm{SO}(3)$ est isomorphe au produit $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{so}(3)$ grâce à la forme de Maurer-Cartan définie par :

$$\theta : T_A\,\mathrm{SO}(3) \longrightarrow \mathrm{so}(3), \theta(A, \alpha) = (A, Z = A^{-1}\alpha). \tag{27}$$

Dans cette trivialisation, en notant $x = (a, Z) \in \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{so}(3)$ et δx un vecteur tangent à X, la forme de Cartan devient :

$$\varpi(\delta x) = \mathrm{Tr}\, A^{-1}\delta A J \bar{Z} - \left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, Z J \bar{Z} + \tilde{U}\right)\delta t, \tag{28}$$

et sa dérivée extérieure :

$$\begin{aligned} d\varpi(\delta x, \delta' x) &= \mathrm{Tr}(\xi' - Z\delta' t)J(\delta\bar{Z} - \bar{f}\delta t) \\ &- \mathrm{Tr}(\xi - Z\delta t)J(\delta' Z - \bar{f}\delta' t) \\ &+ \mathrm{Tr}[\xi', \xi] J\bar{Z}, \end{aligned} \tag{29}$$

où on a défini :

$$\xi = A^{-1}\delta A, \xi' = A^{-1}\delta' A \in \mathrm{so}(3), \quad f = A^{-1}\tilde{F}. \tag{30}$$

On identifie enfin l'algèbre de Lie $\mathrm{so}(3)$ avec $\mathbf{R}^3$ grâce à l'opérateur j du produit vectoriel[1], et on obtient :

$$\begin{aligned} d\varpi(\delta x, \delta' x) &= \langle \Omega' - \zeta\delta' t, \delta\zeta - \phi\delta t\rangle_I - \langle \Omega - \zeta\delta t, \delta'\zeta - \phi\delta' t\rangle_I \\ &+ \langle \zeta, \Omega' \wedge \Omega\rangle_I \end{aligned} \tag{31}$$

où $\langle\ ,\ \rangle_I$ désigne le produit scalaire dans $\mathbf{R}^3$ associé au *tenseur d'inertie* du solide

$$I = J - \mathrm{Tr}\, J, \tag{32}$$

et où Ω, Ω', ζ et ϕ représentent respectivement ξ, ξ', Z et f :

$$\xi = j(\Omega) \quad \xi' = j(\Omega') \quad Z = j(\zeta) \quad f = j(\phi). \tag{33}$$

[1]L'opérateur j est défini de $\mathbf{R}^3$ dans l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(3)$ par $j(X)(Y) = X \wedge Y$. C'est un isomorphisme linéaire.

Le calcul du noyau de $d\varpi$ est alors immédiat : il est engendré par le champ de vecteurs solution des équation :

$$\Omega = \zeta \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{dt} = \phi + I^{-1}(I\zeta \wedge \zeta). \tag{34}$$

Ce sont les équations du mouvement du solide. On a l'habitude de les présenter dans une base diagonalisant le tenseur d'inertie, soit λ_i $(i = 1, 2, 3)$ les valeurs propres de I, le système précédent est équivalent au suivant :

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_i}\, \zeta_j \zeta_k, \quad (i, j, k) = \mathrm{pc}(1, 2, 3). \tag{35}$$

Exercice 1. Généraliser cette construction pour un groupe de Lie quelconque G et établir les équations du mouvement.

Exercice 2. Traiter le problème de 4 points dans $\mathbf{R}^3$ contraints à se mouvoir en préservant le volume du tetraèdre qu'ils délimitent ; utiliser l'action du groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$.

Remarque. Lorsque l'on veut décrire le solide par une distribution continue de points et non plus par une distribution finie, on le représente par un compact $S \subset \mathbf{R}^3$, muni d'une densité de matière, c'est-à-dire une mesure dn. L'espace de configuration n'est plus $Q = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{3N}$ mais $Q = \mathbf{R} \times C^\infty(S, \mathbf{R}^3)$. Chaque application $r : S \longrightarrow \mathbf{R}^3$ devient un état du solide. Le lagrangien du problème est modifié :

$$L(t, r, v) = \int_S \left[\tfrac{1}{2}\, m\, \|v\|^2 - U\right] dn, \tag{36}$$

où v, comme r, est une application de S dans $T_r\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3$, représentant la distribution des vitesses des constituants du solide ; m est une fonction réelle positive définie sur S, représentant la distribution de masse. Les forces sont locales, ce qui explique le terme de potentiel sous forme d'intégrale. On en déduit la forme de Cartan associée :

$$\varpi(\delta y) = \int_S m\, \langle v, \delta r\rangle\, dn - h\delta t, \quad h = \int_S \left[\tfrac{1}{2} m\, \|v\|^2 + U\right] dn. \tag{37}$$

Il faut noter que cette forme de Cartan est définie sur un espace de dimension infinie $\mathbf{R} \times C^\infty(S, T\mathbf{R}^3)$, où $C^\infty(S, T\mathbf{R}^3) = TC^\infty(S, \mathbf{R}^3)$. La contrainte solide se traite de la même manière que pour le cas fini. Les configurations solides sont encore une orbite du groupe d'Euclide, agissant naturellement sur $C^\infty(S, \mathbf{R}^3)$ par composition :

$$g \in E, \quad r \in C^\infty(S, \mathbf{R}^3) : \quad g(r) = g \circ r. \tag{38}$$

Les mouvements du solide continu sont les solutions des mêmes équations que pour une distribution finie de points, mais avec la matrice des moments suivante :

$$J = \int_S m r \bar{r} \; dn. \tag{39}$$

On peut traiter, de la même manière, d'autres types de contrainte en remplaçant le groupe des déplacements euclidiens par un autre sous-groupe des difféomorphismes de $\mathbf{R}^3$. Par exemple, pour traiter les mouvements d'un fluide incompressible on choisira le sous-groupe des difféomorphismes qui préservent le volume. Une grande partie de la théorie des systèmes complètement intégrables trouve son origine dans la recherche des solutions du mouvement des solides. Le lecteur pourra consulter avec profit le beau livre de Michèle Audin [Aud]. ▶

Bibliographie

[Aud] M. Audin. *Spinning Tops*, volume 51. Cambridge University Press, Cambridge 1996.

[Igl] P. Iglesias *Mécanique analytique et géométrie symplectiques*. Notes personnelles, 2000. http ://hermes.univ-mrs.fr/˜patrick/