De la mécanique à la géométrie symplectique

Michèle Audin et Patrick Iglesias

version du 18 février 1994

Les premiers éléments de ce qu'on peut appeler le *calcul symplectique* apparaissent dans l'œuvre de Joseph-Louis Lagrange à la fin du dix-huitième siècle, comme un outil pour la résolution approchée des équations du système des planètes. Il faudra ensuite tout le dix-neuvième siècle pour voir se constituer la théorie mathématique que l'on appelle aujourd'hui *géométrie symplectique.* Elle se construira sous la double influence, d'une part de la théorie des *congruences de courbes* (nom donné par Johanes Plücker aux systèmes de courbes définies par des équations polynomiales) développée en particulier par Gaston Darboux dans ses leçons sur la *Théorie générale des surfaces* [5], et d'autre part sous l'influence du développement de la mécanique analytique, notamment grâce aux travaux d'Henri Poincaré dans sa *Nouvelle mécanique céleste* [13]. Ce n'est qu'en 1946 que le terme *symplectique*, du grec *sumplektikos* qui signifie littéralement *qui entrelace*, sera choisi par Hermann Weyl [16] pour qualifier un groupe de transformations particulier intervenant dans l'étude des *complexes de droites*[1], délivrant ainsi son acte de naisssance à la géométrie symplectique.

La géométrie symplectique s'occupe surtout, mais pas seulement, des propriétés des espaces de solutions des systèmes dynamiques conservatifs. C'est à dire, essentiellement, des solutions d'équations différentielles du second ordre obtenues par des principes de minima (principe des travaux virtuels ou encore principe de moindre action). Dans son développement, la géométrie symplectique apparait aussi comme un langage unificateur pour poser et résoudre, le langage n'est pas neutre, des problèmes d'origines diverses. Elle intervient souvent en relation avec d'autres théories mathématiques, avec la géométrie algébrique pour les systèmes complètement intégrables, avec la théorie des singularités pour l'op-

1. Ce groupe était nommé jusqu'alors *groupe complexe* en référence à la théorie dont il était issu (les complexes de droites sont un cas particulier des congruences de courbes), l'ambiguïté avec la théorie des nombres complexes, introduite par cette dénomination, était devenue insupportable.

tique géométrique, avec la théorie des équations aux dérivées partielles pour la mécanique quantique et l'étude des milieux continus.

Dans les années quatre-vingts, sous l'impulsion de Vladimir Arnold et de Mikhail Gromov une branche plus autonome de la géométrie symplectique est apparue, la *topologie symplectique*. Issue du développement propre de la géométrie symplectique, ses techniques comme ses objectifs en font une théorie mathématique détachée *a priori* de ses préoccupations originelles. Il n'est pas exclu qu'elle ait malgré tout son mot à dire dans le développement ultérieur de la mécanique ou de la physique, mais cela est une autre histoire... C'est ce cheminement de la mécanique de Lagrange vers la topologie symplectique, via la géométrie symplectique, que nous avons essayé de décrire dans cet article.

Il n'est pas inutile, autant pour l'historien que pour le mathématicien, de connaître les origines de la géométrie symplectique qui, si elle n'existe vraiment que depuis quelques décennies, date de 1811, quand parait la deuxième édition du traité de *Mécanique analytique* de Lagrange [9].

C'est en élaborant une méthode pratique de calcul approché des orbites des planètes du système solaire, que Lagrange introduit dans son ouvrage, consacré à l'étude des *équations se rapportant aux problèmes de la mécanique et l'art de les résoudre*, les premiers éléments de calcul symplectique. Plus précisemment, c'est le 22 août 1808 qu'il présente à l'Institut de France son *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes* [10] où sont décrits pour la première fois ses *crochets* et *parenthèses* qui définissent la structure symplectique de l'*espace des éléments d'une planète*, nous y reviendrons. Ce mémoire sera suivi de celui *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires* présentée 13 mars 1809 [11], où il généralise sa méthode à tous les problèmes de mécanique. Il en donnera une version notablement simplifiée, et définitive, le 19 février 1810 [12]. C'est à partir de cette version qu'il écrira le chapitre de son traité de mécanique intitulé *Sur la variation des éléments des orbites elliptiques produite par une force d'impulsion, ou par des forces accélératrices* [9, chapitre II, section VII]. Ce volume ne sera mis en forme et publié qu'après sa mort, ce qui explique son caractère inachevé et peut-être le retard à l'épanouissement des idées nouvelles qui y sont introduites.

Le succès de la méthode de Lagrange, dont est issue la géométrie symplectique, sera total puisque c'est en l'utilisant qu'Urbain Le Verrier découvre en 1846 une nouvelle planète du système solaire : Neptune.

Esquissons, car il est instructif, le raisonnement qui conduisit Lagrange à poser les premiers éléments de calcul symplectique. Il cherchait une méthode simple de calcul approché des mouvements des planètes. Ce problème est toujours trop complexe pour être résolu explicitement.

Grâce aux travaux d'Isaac Newton, on connaissait déjà très bien à l'époque la nature des mouvements d'une planète soumise à la seule attraction du soleil. Lagrange note d'ailleurs qu'*un des plus beaux résultats de Newton est d'avoir établi que toutes les orbites des corps célestes sont de même nature*, ce sont des coniques (ellipses, paraboles ou hyperboles).

Pour caractériser complètement le mouvement d'un corps soumis à la loi de l'attraction universelle autour d'un centre fixe, il faut connaître six constantes, les *constantes d'intégration*. Cinq d'entre-elles sont nécessaires pour déterminer la conique dans l'espace, Lagrange les notera a, b, h, i, k. Pour les orbites elliptiques, a désigne le *demi-grand axe* (ou distance moyenne), b est le *paramètre* de l'ellipse (c'est une fonction simple de a et de l'exentricité de l'ellipse), i est l'*inclinaison* du plan de l'orbite, c'est l'angle entre le plan de l'orbite et celui de l'*ecliptique* (plan moyen des orbites des planètes), h est la *longitude du nœud*, c'est l'angle entre ligne des nœuds (intersection du plan de l'orbite et de l'ecliptique) et une direction fixe, enfin k est la *longitude du périhélie* compté à partir de la ligne des nœuds, c'est l'angle entre la ligne des nœuds et l'axe des foyers.

Si la valeur de ces cinq quantités permettent de déterminer la trajectoire de la planète, elles ne suffisent pas à reconstituer son mouvement, il faut savoir où est la planète sur sa trajectoire à un instant donné, ce paramètre que Lagrange désigne par la lettre c est appelé *époque* par les astronomes. La position de la planète dans le ciel en tout temps (son mouvement) s'obtient alors en utilisant les deux lois découvertes par Johanes Kepler: les aires décrites dans l'ellipse par le rayon vecteur croissent proportionnellement au temps, et la durée de révolution est proportionnelle à la racine carrée du cube du grand axe.

A deux mouvements distincts correspondent deux familles différentes d'éléments, ainsi chaque mouvement de la planète autour du soleil se trouve entièrement décrit par les six constantes (a, b, c, h, i, k) que l'on nomme, en astronomie, *éléments* de la planète.

Comme nous l'avons dit, l'étude du mouvement de l'ensemble des planètes est infiniment complexe, à cause du grand nombre de paramètres en jeu et des difficultés techniques qui en résultent. Pour l'étudier malgré tout, au moins partiellement, Lagrange va considérer l'influence de l'ensemble des planètes sur l'une d'entre elles (la Terre par exemple), comme une *perturbation*. Il expliquera le sens qu'il donne à ce mot par le raisonnement suivant. Imaginons une planète perturbée par le choc instantané dû à l'impact d'un petit astéroïde. Son orbite en est affectée momentanément mais après le choc sa trajectoire est de nouveau une conique parcourue selon les mêmes lois de Kepler. L'effet de l'impact sur le mouvement de la planète se réduit donc seulement à une modification des éléments qui caractérisent son orbite.

Assimilons alors l'effet de forces perturbatrices permanentes à une série d'impulsions infiniment petites reçues de façon continue par la planète comme si elle subissait à chaque instant l'impact d'astéroïdes infiniment petits. En étendant le raisonnement précédent, l'effet des forces perturbatrices sur la planète se réduit à une variation infinitésimale *continue* des éléments de son orbite. De cette manière, le mouvement perturbé de la planète se trouve décrit, sur l'espace des éléments, par une équation différentielle. La courbe solution décrira approximativement le mouvement réel de la planète. Cette méthode du calcul des perturbations est appelée *méthode de la variation des constantes.*

D'après les lois de la mécanique, la variation des éléments (a, b, c, h, i, k) de la planète est proportionnelle à la résultante des forces perturbatrices. Les coefficients de proportionnalité, faisant intervenir des dérivée des éléments par rapport à la vitesse, sont *a priori* des fonctions du temps de la position et de la vitesse elle-même. En ramenant les forces perturbatrices aux éléments de la planète, et par un jeu d'arguments subtils, Lagrange transforme ce système différentiel en un système apparemment plus compliqué mais dont les coefficients des forces perturbatrices, qui apparaissent sous la forme de parenthèses $(a, b), (a, c), (a, h), \ldots, (i, k)$, deviennent indépendants du temps et ne sont fonctions que des éléments (a, b, c, h, i, k).

La résolution du système se trouve alors simplifiée, ce qui est appréciable dans une époque où tous les calculs sont effectués à la main. Cette formulation réduit d'autre part la multiplication des erreurs d'approximations, et permet à Lagrange d'améliorer un théorème sur la stabilité séculaire[2] du grand axe des orbites elliptiques, établi par Pierre de Laplace en 1773.

Lagrange note enfin que sa méthode de la variation des constantes qui conduit à des résultats si remarquables et utiles pour l'étude du système des planètes peut s'appliquer à tous les problèmes de la mécanique, indépendamment de leur type et du nombre de constantes nécessaires à leur description.

L'ensemble des parenthèses qu'il associe ainsi à chaque système de la mécanique, où plutôt leurs inverses qu'il notera sous forme de crochets $[a, b], [a, c], [a, h]$, etc... constituent les premiers éléments de calcul symplectique de l'histoire. Ils définissent, sur l'espace des solutions du système, ce qu'en termes modernes on nomme les *composantes d'une formes symplectique.* Les prémisses de la géométrie symplectique étaient posées. De nombreux géomètres ensuite, parmi lesquels: Denis Poisson (les parenthèses de Lagrange ont été développées par Poisson et portent désormais le nom de crochets de Poisson), Wiliam Rowan Hamilton dont nous reparlerons, Carl Jacobi, Niels Abel, Gaston Darboux, Henri Poincaré, Élie Cartan, préciseront le cadre mathématique de ce qui n'était encore qu'une méthode,

2. On appelle, en astronomie, *instabilité séculaire* un type d'instabilité dont l'effet ne se fait ressentir qu'aux long des siècles. La stabilité séculaire se définit donc par l'absence d'instabilité séculaire.

et aboutiront à la constitution de ce corps théorique qu'on appelle aujourd'hui *géométrie symplectique.*

Evidemment ce développement ne s'est pas fait de façon linéaire explicite et conscient, et il est temps d'abandonner le point de vue historique pour présenter le cadre actuel de la géométrie symplectique. Elle se définit par son outil principal qui est la *forme symplectique.* Pour faire une analogie, la géométrie euclidienne est celle d'un espace dans lequel on sait mesurer les longueurs et les angles suivant certaines règles. Il en est de même pour les géoméries dites non-euclidiennes et plus généralement pour ce qu'on appelle la *géométrie riemannienne* dont l'outil essentiel est le *produit scalaire*, un procédé qui à deux vecteurs associe un nombre. Une forme symplectique est une machine du même genre, qui fabrique un nombre à partir de deux vecteurs, mais les règles sont différentes. Par exemple, si on y entre deux fois le même vecteur, le résultat obtenu est nul, c'est une conséquence d'une des propriétés de la forme symplectique, l'*antisymétrie*: le signe change lorsqu'on permute les arguments. Pas moyen de définir des longueurs avec un tel objet. En revanche, elle permet mesurer des surfaces, et c'est même une façon de décrire l'exemple le plus simple: si u et v sont deux vecteurs du plan, l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs est la valeur de la forme symplectique calculée sur u et v. A peine plus général, le cas d'une surface est le prototype des espaces symplectiques à deux paramètres. Les vecteurs u et v sont cette fois tangents à la surface en un point qui peut varier; la valeur de la forme symplectique calculéee sur les vecteurs u et v est encore l'aire du parallélogramme qui s'y appuie, mais celui-ci est maintenant dessiné dans le plan tangent[3].

La géométrie symplectique est la théorie des espaces de paramètres, que l'on appelle encore des *variétés*[4], munis d'une telle forme symplectique. Il faut se méfier toutefois du confort intuitif que nous procurent les modèles de variétés symplectiques que sont les surfaces, car les théorèmes importants de la géométrie symplectique sont faux ou évidents en dimension deux. La géométrie symplectique n'existe vraiment qu'à partir de la dimension quatre, la dimension trois étant exclue par une autre propriétés des forme symplectique qui élimine immédiatement les espaces de dimension impaire. Cela ne signifie pas pour autant que tout espace de dimension paire soit symplectique. Un des premièrs sorites de la théorie est qu'il n'existe aucune structure symplectique sur les sphères de dimension paire hormis sur la sphère de dimension deux (c'est une surface et on a décrit plus haut sa structure symplectique). La nature globale des variétés symplectiques (par exemple leur topologie) est d'ailleurs une des questions majeures: otez un point à

3. L'aire de ce parallélogramme, c'est à dire la valeur de la forme symplectique calculé sur u et v, est donné par le produit scalaire entre le vecteur unitaire orthogonal à la surface (au point choisi) et le produit vectoriel de u par v.

4. Le terme technique *variété* désigne un espace dont on sait repérer les points par des ensemble de paramètres en nombre fixé, ce nombre de paramètres est appelé la *dimension de la variété*.

n'importe quelle sphère de dimension paire, ce qui reste est symplectique.

Dans l'exemple de l'espace des éléments d'une planète, la forme symplectique ω est définie par les crochets de Lagrange. Evaluée sur deux vecteurs u et v tangents en un point (a, b, c, h, i, k), elle vaut

$$\omega(u, v) = [a, b]u_a v_b + [a, c]u_a v_c + \ldots + [i, k]u_i v_k,$$

où $u_a, u_b, \ldots, u_k$, et $v_a, v_b, \ldots, v_k$ sont les coordonnées des vecteurs u et v. Cette expression justifie le terme de *composante* de la forme symplectique que nous avons utilisé plus haut pour qualifier ces crochets.

Du point de vue théorique, le choix explicite des constantes d'intégration importe finalement peu, il ne peut être guidé que par les exigences de la mécanique. Comme le fait d'ailleurs remarquer Lagrange, la position et la vitesse du corps à un instant fixé caractérisent son mouvement aussi bien que les éléments de son orbite. Pour ce choix particulier de paramètres la forme symplectique prend une expression particulièrement simple. Si (q_1, q_2, q_3) et (p_1, p_2, p_3) désigne les coordonnées de la position q et de l'impulsion p (le produit de la masse par la vitesse) de la planète, la forme symplectique de Lagrange devient dans ces nouvelles coordonnées

$$\omega((p, q), (p', q')) = \sum_{i=1}^{3} p_i q'_i - p'_i q_i.$$

On doit à Darboux d'avoir démontré vers 1880 qu'il existe pour n'importe quelle variété symplectique des systèmes de coordonnées locales, appelés *systèmes de coordonnées canoniques*, dans lesquels la forme symplectique s'exprime aussi simplement. Mais cette propriété, certes très importante, n'est qu'une propriété locale. Une variété symplectique prise au hasard n'est presque jamais équivalente, dans son ensemble, à un tel domaine de coordonnées canoniques. Il faut en général plusieurs systèmes de coordonnées de ce type pour la décrire toute entière, de la même manière qu'il faut plusieurs cartes géographiques pour décrire le globe. C'est le cas pour la sphère que nous avons évoqué plus haut, mais c'est aussi vrai pour l'espace des mouvements elliptiques d'une planète. On pourrait multiplier les exemples.

A la suite des travaux de Lagrange et de Poisson sur les équations de la mécanique, c'est à Hamilton que reviendra de mesurer la généralité de cette approche. Il montrera que dans l'espace symplectique des (p, q) que nous venons de décrire, appelé *espace des phases*, l'espace des conditions initiales à un instant fixé, les équations du mouvement pour des forces indépendantes du temps sont équivalentes aux suivantes , appelées *équations de Hamilton*:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

où H est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle des forces en présence[5]. Les coordonnées q_i sont les *configurations* du système, chacune représentant un *degré de liberté*, et les p_i ses *impulsions*. En libérant ainsi le calcul symplectique de son aspect perturbatif pour en faire le langage de la mécanique analytique (qui devenait alors la *mécanique hamiltonienne*[6]), Hamilton offrait à cette dernière un cadre plus conceptuel, d'aucuns diraient structurant.

C'est essentiellement dans le cadre de ce nouveau formalisme que s'est développée par la suite l'étude des systèmes dynamiques, en particulier des *systèmes complètement intégrables*. On peut vérifier par le calcul que les mouvements s'effectuent à énergie constante, la fonction H (le hamiltonien du système) reste constante au cours du temps. On dit que H est *intégrale première* du système. On diminue d'autant la complexité du système que l'on dispose d'intégrales premières indépendantes en *involution*, c'est à dire dont les crochets de Poisson mutuels sont nuls. Leur nombre ne peut pas être supérieur au nombre de degrés de liberté du système (la moitié de la dimension de l'espace des phases), c'est une propriété de la structure symplectique, mais en trouver autant dépend du hamiltonien: il ne doit pas être trop "chaotique". Si c'est possible, on peut construire un nouveau système de coordonnées dans lequel les équations de Hamilton deviennent linéaires. C'est pour cette raison que de tels systèmes sont dits complètements intégrables.

Ces systèmes ont été étudiés par les plus grands mathématiciens du dix-neuvième siècle, notamment Carl Jacobi, Sofia Kowalevskaïa, et surtout Joseph Liouville. Il s'est intéressé en particulier aux systèmes complètement intégrables dont les trajectoires sont confinées dans des régions limitées de l'espace de configuration (l'espace des coordonnées q_i). Dans ce cas les mouvements s'enroulent sur des *tores* (imaginer des bouées), c'est un résultat de géométrie symplectique.

La toupie est un exemple de système complètement intégrable à deux degrés de liberté (après réduction par rapport à certains paramètres): outre l'énergie le moment cinétique par rapport à l'axe est conservé. Un autre exemple de tel système est celui des *géodésiques*[7] sur un ellipsoïde. Ces géodésiques satisfont un système d'équations différentielles de type hamiltonien qui est complètement intégrable. A l'époque où Jacobi l'a étudié (1838), on mesurait le méridien terrestre et les trois

5. C'est Christian Huygens qui introduit dans son étude sur le pendule composé la *constante des forces vives* que Lagrange, en son honneur, notera H, bien avant la naissance de W. R. Hamilton. Aujourd'hui cette fonction est appelée *hamiltonien*.

6. Il y a toutefois de subtiles nuances entre ce qu'on appelle mécanique lagrangienne et mécanique hamiltonienne (ou formalisme lagrangien et formalisme hamiltonien) mais ces diverses versions de la mécanique analytique sont complètement contenues dans la géométrie symplectique.

7. Une géodésique est une courbe dont la longueur entre deux quelconques de ses points est la plus courte possible parmi tous les chemins qui passent par ces deux points. Par exemple les géodésiques du plan sont les droites, celles de la sphère sont les grands cercles.

axes de ce qui n'était pas encore le géoïde, mais l'ellipsoïde terrestre. . . c'était un problème de mathématiques appliquées.

Ces vingt-cinq dernières années ont vu un regain d'intérêt pour les systèmes complètement intégrables. Ils sont apparus dans des domaines divers, théorie des champs, mécanique des milieux continus, mécanique statistique. Quatre chercheurs de l'université de Princeton Clifford Gardner, John Greene, Martin Kruskal, Robert Miura ainsi que Peter Lax découvraient à la fin des années soixante que les ondes solitaires, décrites par les équations de Korteweg-de Vries, se comportaient comme des systèmes complètement intégrables ayant une infinité de degrés de liberté. Les méthodes employées révélaient un nouveau domaines de recherches entre géométrie symplectique et géométrie des courbes algébriques.

Les systèmes ayant la propriété de *complète intégrabilité* sont rares comme l'a montré Poincaré au début du siècle. Autrement dit, il est peu probable en choisissant un hamiltonien au hasard qu'il soit intégrable, mais il est possible de traiter certains de ces systèmes plus complexes comme des perturbations de systèmes complètement intégrables.

Le théorème le plus célèbre dans ce domaine, après les travaux de Poincaré, est connu sous le nom de théorème KAM, du nom de ses auteurs Andreï Kolmogorov, Vladimir Arnold et Jurgen Moser. Ce résultat, élaboré tout au long de ces dernières décénnies[8], indique que pour de petites perturbations de systèmes intégrables, beaucoup de mouvements sont encore confinés sur des tores de l'espace des phases, leurs trajectoires sont donc encore localisées dans des régions bornées de l'espace de configuration. Autrement dit, les perturbations *séculaires* sont rares pour des systèmes proches de systèmes complètement intégrables. Malheureusement, ce théorème purement qualitatif ne nous permet pas de déterminer quels mouvements sont concernés. Il ne nous dit pas, par exemple, si la Terre est sur une trajectoire stable.

Aujourd'hui cette discipline des systèmes dynamiques fait l'objet d'études très fines, où la géométrie symplectique laisse parfois la place à l'analyse et l'arithmétique. Il faut citer à ce propos les résultats de Michel Herman qui permettent notamment d'élargir le domaine de validité du théorème KAM.

Sur un autre plan, l'*optique géométrique* est un domaine fertile en applications de la géométrie symplectique. On y étudie la réflexion et de la réfraction de la lumière lorsqu'on néglige ses propriétés ondulatoires, c'est à dire la dynamique des fronts d'onde et leurs métamorphoses. En mathématique, l'optique géométrique fait partie de la théorie des *congruences de droites* (familles de droites définies par des équations algébriques) qui fut un facteur important du développement

8. Il a été annoncé la première fois par A. Kolmogorov au Congrés International des Mathématiciens de 1954.

de la géométrie symplectique.

Dans un milieu homogène et isotrope la lumière se propage en ligne droite, les rayons lumineux sont assimilés à des droites de l'espace, orientées par le sens de parcours de la lumière. L'ensemble de toutes les droites est appelé *espace des rayons*. Chacune de ces droites peut être considérée comme la trajectoire d'une particule (de lumière) libre de toute contrainte extérieure. A ce titre l'espace des rayons est l'ensemble des mouvements d'un point matériel libre, c'est donc une variété symplectique.

Une source lumineuse peut être ponctuelle ou étendue. Dans les deux cas les rayons lumineux sont émis perpendiculairement à une surface qu'on appelle *front* (d'onde). La famille de rayons émise par un front est appelée *congruence de normales*, par opposition à une famille de droites quelconques. Si l'on considère les droites du plan, un théorème classique de calcul différentiel[9] permet de montrer que toute famille de droites dépendant d'un paramètre (dans le plan, les fronts sont des courbes) est une congruence de normales, autrement dit: il existe une source dont elles sont issues. Cette propriété tombe en défaut pour les droites de notre espace ordinaire à trois dimension. On ne peut pas toujours faire passer une surface orthogonalement à une famille de droites arbitraire. C'est la géométrie symplectique qui fournit la solution de ce problème[10]: pour qu'une famille de droites soit une congruence de normales il faut et il suffit que la forme symplectique soit identiquement nulle sur cette famille de droites. On dit que la famille de droites est *lagrangienne*, nous aurons l'occasion de retrouver cette propriété.

La géométrie symplectique nous offre aussi le moyen d'unifier la loi de Descartes de la réflexion des rayons lumineux avec la loi de Huygens de la réflexion des ondes lumineuses. Comment se transforme une onde lumineuse après réflexion sur une paroi? Le principe de Huygens indique une solution, chaque point de la paroi se transforme en une source lumineuse, l'onde réfléchie est alors la résultante de cette nouvelle famille d'ondes lumineuses. Dans le cadre de l'optique géomt́rique l'onde avant sa diffusion par l'obstacle est représentée par la famille des rayons qui sont issus de la source (son front), c'est une variété lagrangienne de l'espace des rayons. Le passage de l'obstacle est ensuite décrit, en associant au rayon incident le rayon réfléchi, par application de la loi de Descartes. Il s'avère que cette transformation de l'espace des rayons préserve la forme symplectique (ses composantes restent invariantes), la famille lagrangienne des rayons incidents reste donc lagrangienne au passage de l'obstacle (c'est la traduction géométrique du principe de Hyugens). La famille de droites obtenue par cette transformation représente ainsi le front de l'onde lumineuse diffusée. Sa géométrie peut être alors

9. Le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles.

10. On peut trouver cette proposition, sous une forme légèrement différente mais équivalente, dans les leçons sur la géométrie des surfaces de Darboux [5].

facilement reconstruite connaissant la forme de l'obstacle.

La métamorphose des fronts après le passage d'un obstacle peut faire apparaître certaines *singularités* comme, par exemple, les figures obtenues après réflexion de rayons lumineux par une surface concave. Il suffit de se faire servir une tasse de café au soleil pour voir se dessiner à sa surface une telle courbe brillante de la forme d'un 3 (une néphroïde). Ces singularités sont appelées des *caustiques*[11]. L'étude, par les méthodes de la géométrie symplectique, de ces caustiques (leur formes stables) a été particulièrement développée par V. Arnold et son école [3].

L'allure des caustiques dépend à la fois de la nature de la source lumineuse et des propriétés de réflexion de l'obstacle (un miroir déformant par exemple). En interposant un écran sur le chemin des rayons réfléchis, on obtient une correspondance entre les points du front d'onde et les points d'impact des rayons sur l'écran, autrement dit, le front d'onde se projette sur l'écran. Cette projection peut donner lieu à l'apparition de *singularités*, comme l'ombre d'une feuille translucide pliée sur une surface plane (mais là au contraire le pli apparaîtra plus sombre). C'est cette image qu'on observe à la surface du café. L'ensemble de ces images, quand l'écran balaye tout l'espace, est appelée la caustique de l'obstacle. On peut remplacer l'écran par une brume légère sur le trajet des rayons diffusés[12], la caustique apparaît alors sous la forme d'une nappe brillante.

La théorie des caustiques optiques est donc au confluent de la théorie des singularités, popularisée (sinon médiatisée) en son temps sous le nom de théorie des catastrophes, et de la géométrie symplectique. Les caustiques optiques ne sont pas n'importe quelles singularités mais des singularités d'applications lagrangiennes, n'oublions pas que les fronts sont des sous-espaces lagrangiens de l'espace des rayons. La surface en forme de soucoupe volante représentée sur la figure a quelques titres à être appelée caustique[13]. Elle a assez intéressé l'astrophysicien russe Jakov Zeldovich pour que, après l'avoir mise à contribution pour donner un modèle de la formation des galaxies, il l'ait encore exploitée pour proposer une explication du phénomène O.V.N.I. Les objets *soucoupoïdes* très lumineux décrits par les observateurs d'ovnis ne seraient que ces caustiques, objets immateriels mais bien visibles (comme la courbe à la surface du café) créés par la réflexion et la réfraction de la lumière, à travers les nuages par exemple. Cette explication, sans nul doute séduisante, est combattue par un théorème démontré en 1986 par le jeune mathématicien russe Yuri Chekhanov, au risque de rendre leur mystère aux ovnis: la surface en question (la soucoupe) n'est *pas* une enveloppe de rayons

11. Du grec *kausticos* qui signifie brûlant, en effet l'intensité de la lumière se concentre le long de la caustique.

12. Il existe une très belle image de la caustique du miroir sphérique obtenue par brumisation dans l'article *Optique* de l'*Encyclopédie Universalis*

13. On la trouve dans les tables des spécialistes comme une singularité stable d'application différentiable.

lumineux. Ce théorème est vraiment symplectique: pour le démontrer, on ne peut rester dans l'espace physique, on doit se placer dans l'espace symplectique des rayons.

Le champ d'application de la géométrie symplectique ne se limite pas, en optique, aux milieux homogènes et isotropes. Un rayon de lumière dans un milieu transparent suit la courbe minimale pour le *chemin optique*, c'est le *principe de moindre action* de Fermat. La *longueur optique* dépend de l'indice de réfraction du milieu, qui peut varier si le milieu est hétérogène. Ces courbes sont des géodésiques. L'espace des géodésiques d'un milieu transparent possède une structure symplectique analogue à celle de l'espace des droites. C'est une propriété générale des systèmes soumis à un principe de minimum, on les appelle *systèmes conservatifs*. Ce sont justement les systèmes dont la mécanique est friande, c'est pourquoi la géométrie symplectique est un modèle si pertinent.

En élargissant le concept de système dynamique conservatif singulier à celui de variété symplectique, qui est une classe d'objets plus large, la mécanique a pu s'enrichir de systèmes dont on croyait la nature incompatible avec l'aspect classique. En considérant le produit de l'espace des phases ordinaire d'une particule libre par la sphère à deux dimensions, Jean-Marie Souriau a construit dans les années soixante un modèle classique de la particule à spin [17] dont le comportement quantique s'obtient en appliquant des méthodes de géométrie symplectique. Ces développements de la géométrie symplectique en relation avec la mécanique quantique (notamment à travers la théorie des équations aux dérivées partielles) est encore le sujet de nombreux travaux (et controverses).

Toutes les constructions que nous venons d'évoquer ont nécessité des développement théoriques importants pour comprendre la géométrie des variétés symplectiques. Une différence fondamentale avec d'autres théories comme la géométrie riemannienne, qui étudie les propriétés métriques des espaces, est l'absence d'*invariants locaux*. La courbure est un exemple d'invariant métrique local: aussi petite soit la région de la Terre qui vous intéresse, vous ne pourrez pas en dresser une carte plane avec distances et angles égaux. Mais comme la structure locale des variétés symplectique est unique, par application du théorème de Darboux, tous les points d'une variété symplectique sont équivalents. Pour distinguer deux variétés symplectiques il faut alors considérer leurs propriétés globales, tenir compte de leur *topologie*. Ces considérations sont à l'origine de la plus récente branche de la géométrie symplectique que l'on appelle *topologie symplectique*. Beaucoup de réflexes acquis par la pratique d'autres théories géométriques ne sont ici d'aucune utilité, il faut tout inventer. Eloignée *a priori* des applications, la topologie symplectique se développe comme une théorie autonome. Un peu comme en théorie des nombres, on y trouve beaucoup de problèmes dont les énoncés sont élémentaires, mais dont la démonstration est difficile.

Le problème de topologie symplectique sans doute le plus célèbre est connu sous le nom de *chameau symplectique* (voir figure) où l'on essaie de faire passer une grosse boule par un petit trou[14]. Bien entendu, on a le droit de déformer la boule. Si on autorise n'importe quelle déformation, ça passe. Il suffit d'amincir suffisement la boule. On peut même le faire en préservant son volume au cours de la déformation (penser à de la pâte à modeler plutôt qu'à un ballon de baudruche). Mais si on se place dans un espace symplectique, même le plus simple possible, et que l'on impose à la déformation de préserver la forme symplectique, alors c'est impossible dès la dimension quatre. Il faut que le diamètre de la boule soit inférieur à celui du trou!

Une autre manifestation de cette *rigidité symplectique* est l'impossibilité de faire rentrer n'importe quelle boule dans un long cylindre mince (voir figure). Claude Viterbo aime présenter ce résultat de Gromov [6] comme un principe d'incertitude de la mécanique classique [14]. Si on connait la position et la vitesse de deux particules en interaction à un instant donné avec une certaine incertitude on aimerait, en laissant évoluer le système, prévoir la situation de l'une d'entre elles avec une meilleure précision. Traduit en termes symplectiques, l'ensemble des conditions initiales permises par les erreurs de mesures est un petit cube dans l'espace des phases du système que l'on aimerait voir se transformer en un long parallélipipède mince sous l'action (symplectique) du temps, la section du parallélipipède mesurant la précision désirée. Le théorème précédent nous affirme que c'est impossible.

Les techniques développées actuellement en topologie symplectique sont essentiellement de deux types. D'une part l'analyse complexe, c'est à dire l'utilisation de la théorie des nombres complexes, qui permet l'usage de théorèmes puissants déjà connus mais qui met en jeu une théorie et des méthodes très délicates. Ces méthodes continuent à produire de beaux théorèmes... et de nouveaux problèmes.

Une autre approche, que ses auteurs qualifient de plus élémentaire—pas tant par modestie que parce que les notions utilisées sont plus classiques dans la théorie—est celle d'Ikvar Ekeland, Helmut Hofer, Claude Viterbo... : au domaine de l'espace qui vous intéresse (le long cylindre mince, la grosse boule) vous associez des systèmes différentiels *hamiltoniens* dont vous savez montrer qu'ils ont une trajectoire fermée. A chacune de ces trajectoires est associée par la forme symplectique un nombre appelé *action*, ces actions permettent à leur tour de définir une *capacité* du domaine, qui est un invariant symplectique grâce auquel vous saurez distinguer la grosse boule (sa capacité est son rayon) du cylindre (dont la capacité est aussi le rayon).

14. "Il est plus facile à un chameau de passer par le trou d'une aiguille qu'à un riche d'entrer au royaume des cieux" (Evangile selon Saint Luc).

Issue de la mécanique classique, la géométrie symplectique en est devenue le langage et l'outil. Nous aurions pu parler de symétries et d'applications moments, de régularisation des systèmes dynamiques, de courbes pseudo-holomorphes, d'intersections lagrangiennes, et bien d'autres constructions de géométrie symplectique. Son développement a abouti, sous diverses influences, à une théorie qui utilise un arsenal très riche de méthodes mathématiques, et on peut rester perplexe devant une telle complexité. A ce propos, on peut lire dans les leçons sur les mathématiques du dix-neuvième siècle données par Felix Klein, le jugement suivant: "Malgré l'indubitable beauté de cette branche, je voudrais cependant mettre en garde contre une lecture à sens unique... En réalité, de ces théories, le physicien ne peut tirer pour ses travaux que très peu, et l'ingénieur presque rien. Elles constituent en quelque sorte un schéma avec des cases vides qui prennent un sens seulement après que le monde bigarré des phénomènes (de la Nature) y ait été disposé." Il semble que le développement de la mécanique et des sciences physiques de ce siècle, ne se soit pas accomodé de cette mise en garde. En tous les cas, la géométrie symplectique s'est révélée comme un domaine des mathématiques en plein essor, fourmillant de problèmes divers. Même si son évolution est aujourd'hui devenue autonome, les méthodes variationnelles, les principes de moindre action et les systèmes hamiltoniens qui en sont à l'origine... lui fournissent encore certains de ses plus beaux résultats.

Encadré 1, Sur la notion de géoémtrie

Dès ses origines, alors que la géométrie n'était encore que la "mesure de la Terre", l'importance des transformations qu'on appelle aujourd'hui les "isométries" était reconnue (penser aux "cas d'égalité des triangles").

En géométrie plane — celle des triangles — on commençait, dès le début du dix-neuvième siècle, à distinguer entre les notions affines (qu'on appelait descriptives) et les notions métriques. Les premières sont invariantes par tous ls changements linéaires de coordonnées: ce sont les notions de droites, d'alignement, de concourance, la notion de milieu, de centre de gravité, mais pas celle de médiatrice ou d'orthocentre, puisqu'il existe des transformations linéaires qui nepréservent pas l'orthogonalité. La notion d'angle droit, elle, est une notion métrique, elle est préservée par une classe plus restreinte de transformations, les isométries, qui conservent les distances.

C'est à Felix Klein que revient d'avoir, dans son célèbre Programme d'Erlangen (1872) [8], formalisé complètement ce type de distinction en dégageant un nouveau concept de géométrie. Désormais, une géométrie est l'étude des propriétés qui restent invariantes par une classe donnée (un groupe, en fait) de transformations.

Ainsi la géométrie affine est celle des propriétés préservées par le groupe des changements linéaires de coordonnées, la géométrie métrique relève du groupe des isométries.

Dans le plan, on peut aussi considérer toutes les transformations linéaires qui préservent les aires. Ce sont tout simplement celles dont la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vérifie $ad - bc = 1$. Ce groupe est le groupe symplectique du plan. Plus généralement, la géométrie symplectique est celle des transformations qui préservent une forme symplectique.

Encadré 2, Sur la définition d'une forme symplectique

Sur un espace muni de coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_m)$ une forme symplectique est donnée par une matrice $A(x) = a_{i,j}(x_1, \ldots, x_m)$ (qui dépend du point x) antisymétrique ($a_{j,i} = -a_{i,j}$) et qui est inversible pour tout x, ce qui force m à être pair, on écrira $m = 2n$, on dit que la forme symplectique est non dégénérée. On peut considérer A comme définissant une forme différentielle

$$\omega = \sum_{i<j} a_{i,j}(x) dx_i \wedge dx_j,$$

on demande en plus que cette forme soit *fermée*, en d'autres termes que

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_k} = 0.$$

Du point de vue de la mécanique, cette mystèrieuse condition est la traduction du caractère conservatif des forces en présence, c'est à dire qu'elle dérivent d'un potentiel.

Le théorème de Darboux dit alors qu'on peut trouver des coordonnées locales $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ telles que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Encadré 3, Sur les espaces de droites

Toute droite δ du plan $\mathbf{R}^2$ est définie complètement par son point r le plus proche de l'origine, comme le montre le dessin. L'espace des droites du plan est donc une variété à deux dimensions, c'est une surface, plus précisemment un cylindre: la coordonnée sur la base du cylindre est l'angle θ de la droite avec une direction fixe (l'axe ox par exemple) et la hauteur h sur la génératrice est la distance à l'origine du point r. Dans ce système de coordonnées la forme symplectique s'écrit $d\theta \wedge dh$, c'est un système de Darboux.

Pour définir une droite Δ de l'espace à trois dimension $\mathbf{R}^3$, le plus simple consiste à la repérer d'abord par son point r le plus proche de l'origine et ensuite par sa direction définie par son vecteur directeur unitaire u. La droite Δ est entièrement caractérisée par le couple (u, r) où u est un vecteur de la sphère S^2 et r est orthogonal à u. De cette façon, l'espace des droites de $\mathbf{R}^3$ est décrit comme l'espace des vecteurs tangent à la sphère S^2. Il faut quatre paramètres pour repérer Δ: deux pour u sur la sphère et deux autres pour r dans le plan tangent à u. L'espace des droites de $\mathbf{R}^3$ est donc une variété de dimension quatre. En utilisant les coordonnées sphériques usuelles (θ, φ) pour repérer u, et les paramètres associés (r_θ, r_φ) pour r, la forme symplectique est donnée par:

$$\cos(2\theta) d\theta \wedge dr_\theta + \cos(\theta) d\varphi \wedge dr_\varphi + r_\varphi \sin(\theta) d\theta \wedge d\varphi.$$

Comme on peut le constater ces coordonnées ne sont pas canoniques. Mais il suffit de changer de variables:

$$\begin{array}{lcllcl} p_1 & = & \frac{1}{2}\sin(2\theta) & \qquad p_2 & = & \varphi \\ q_1 & = & r_\theta & \qquad q_2 & = & \cos(\theta) r_\varphi \end{array}$$

pour que la forme symplectique devienne $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$. Ce nouveau système de coordonnées est canonique.

Encadré 4, Sur les origines du calcul symplectique

Le mouvement d'une planète soumise aux lois de l'attraction universelle est entièrement caractérisé par six nombres appelés éléments et notées a, b, c, h, h, i, k. Ce sont des intégrales premières du système, des fonctions du temps t de la position $\mathbf{r}$ et de la vitesse $\mathbf{v}$, constantes le long du mouvement.

Lors d'une perturbation infinitésimale instantanée de la planète, la variation de l'élément a est donnée par l'équation différentielle :

$$\frac{da}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}_j} \frac{d\mathbf{v}_j}{dt}.$$

D'après les lois de la mécanique, la masse de la planète étant prise pour l'unité, les terme $d\mathbf{v}_j/dt$ sont égaux aux composantes F_j de la résultante des forces perturbatrices. En supposant que ces forces dérivent d'un potentiel Ω, $F_i = \partial\Omega/\partial \mathbf{r}_i$, et en utilisant l'indépendance de Ω par rapport à la vitesse $\mathbf{v}$, on obtient

$$\frac{da}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}_j} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}_j} - \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}_j}.$$

En rapportant Ω au temps t et aux éléments (a, b, c, h, i, k) de la planète, la variation de l'élément a s'exprime encore sous la forme suivante

$$\frac{da}{dt} = (a, b)\frac{\partial \Omega}{\partial b} + (a, c)\frac{\partial \Omega}{\partial c} + \ldots + (a, k)\frac{\partial \Omega}{\partial k},$$

où les parenthèses $(a, b), (a, c), \ldots, (i, k)$ sont les fonctions

$$(a, b) = \sum_{j=1^3} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}_j} \frac{\partial b}{\partial \mathbf{r}_j} - \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial b}{\partial \mathbf{v}_j} \quad (a, c) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}_j} \frac{\partial c}{\partial \mathbf{r}^k} - \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial c}{\partial \mathbf{v}_j} \quad \text{etc.} \ldots$$

Un calcul explicite permet de vérifier que ces parenthèses sont encore des intégrales premières, elles ne sont fonctions que des éléments (a, b, c, h, i, k).

Il suffit d'exprimer ensuite les composantes des forces perturbatrices $\partial\Omega/\partial a$, $\partial\Omega/\partial b$ etc. . . en séries par rapport au temps pour connaître de façon approchée, après intégration

$$a(t) = a_0 + (a, b) \int_0^t \frac{\partial \Omega}{\partial b}\, dt + (a, c) \int_0^t \frac{\partial \Omega}{\partial c}\, dt + \ldots + (a, k) \int_0^t \frac{\partial \Omega}{\partial k}\, dt$$

l'évolution l'élément a sous l'effet des forces perturbatrices. On distingue alors entre instabilités périodiques et séculaires suivant que les termes d'approximation des forces perturbatrices sont des fonctions périodiques ou linéaires du temps. Ce qui a été dit jusqu'ici pour l'élément a vaut évidemment *mutatis mutandis* pour tous les autres.

On obtient l'expression des forces perturbatrices en termes des éléments de la planète par inversion des parenthèses:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = [a, b]\frac{db}{dt} + [a, c]\frac{dc}{dt} + \ldots + [i, k]\frac{da}{dt}.$$

Les crochets qui apparaissent ici sont eux aussi indépendants du temps. Ce sont les composantes de la forme sympectique ω définie sur l'espace des éléments de la planète par

$$\omega = [a, b]da \wedge db + [a, c]da \wedge dc + \ldots + [i, k]di \wedge dk.$$

C'est cette construction, due à Lagrange, qui est à l'origine du calcul symplectique en mécanique. Il notera l'antisymétrie des crochets:

$$[a, b] = -[b, a] \quad [a, c] = -[c, a], \ldots, [i, k] = -[k, i]$$

mais ne relève pas la propriété dite de *fermeture*

$$\frac{\partial [b, c]}{\partial a} + \frac{\partial [c, a]}{\partial b} + \frac{\partial [a, b]}{\partial c} = 0,$$

vérifiée non seulement pour a, b, c mais pour tout autre triplet d'éléments. Cette propriété, mise en évidence plus tard, est capitale dans la définition d'une forme symplectique. Elle est en mécanique la conséquence directe du caractère conservatif des forces en présence.

References

[1] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundation of mechanics.* The Benjamin, Cumming publishing company inc., 1978.

[2] V. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Éditions MIR, Moscou, 1976.

[3] V. Arnold, A. Varchenko et S. Gussein-Zadé. *Singularités des applications différentiables.* Éditions MIR, Moscou, 1986.

[4] M. Audin et J. Lafontaine. *Pseudo-holomorphic curves in symplectic geometry.* Progress in mathematics, Birkhauser, 1994 (à paraître).

[5] G. Darboux. *Leçon sur la théorie générales des surfaces.* Gauthier-Villars, Paris, 1915.

[6] M. Gromov *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds.* Inventiones Mathematicae, volume 82 ,1985, pp. 307–347.

[7] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press, 1991.

[8] F. Klein. *Le programme d'Erlangen.* Collection *Discours de la méthode.* Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[9] J.-L. Lagrange. *Mécanique analytique.* Librairie Albert Blanchard, Paris, 1965.

[10] J.-L. Lagrange. Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 713–768. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 22 août 1808 à l'Institut de France.

[11] J.-L. Lagrange. Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 771–805. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 13 mars 1809 à l'Institut de France.

[12] J.-L. Lagrange. Second mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 809–816. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 19 février 1810 à l'Institut de France.

[13] H. Poincaré. *Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste.* Gauthier-Villars, Paris, 1892.

[14] C. Viterbo. *Une introduction à la topologie symplectique.* Gazette des mathématiciens. Numéro 54, novembre 1992.

[15] A. Weinstein. *Lectures on symplectic manifolds.* Numéro 29 dans CBMS Lecture Notes. AMS, 1979.

[16] H. Weyl. *Classical Groups.* Princeton University Press, 1946.

[17] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris, 1970.

Index des noms

Niels Henrik Abel (1802-1829), mathématicien norvégien.

Vladimir Arnold, mathématicien, Université de Moscou et Paris-Dauphine.

Elie Cartan (1869-1851), mathématicien français.

Yuri Chekanov, mathématicien, Moscou.

Gaston Darboux (1842-1917), mathématicien français.

Ikvar Ekland, mathématicien, Université de Paris-Dauphine.

Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français.

Michaël Gromov, mathématicien, Institut des Hautes Etudes Scientifiques Paris.

Wilian Rowan Hamilton (1805-1865), mathématicien irlandais.

Michel Herman, mathématicien, École Polytechnique–Paris.

Helmut Hofer, mathématicien, Bochum (RFA).

Christian Huygens (1629-1665), mathématicien et physicien hollandais.

Carl Jacobi (1804-1851), mathématicien allemand.

Johanes Kepler (1630-1671), astronome et mathématicien allemand.

Felix Klein (1849-1925), mathématicien allemand.

Andreï Kolmogorov, mathématicien, Moscou.

Sofia Kowaleskaïa (1850-1891), mathématicienne d'origine russe.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), mathématicien français.

Pierre de Laplace (1749-1827), mathématicien français.

Urbain Le Verrier (1811-1877), astronome français.

Joseph Liouville (1809-1882), mathématicien français.

Jurgen Moser, mathématicien, École Polytechnique de Zürich.

Isaac Newton (1642-1727), mathématicien et physicien anglais.

Johanes Plücker (1801-1868), mathématicien allemand.

Henri Poincaré (1854-1912), mathématicien français.

Denis Poisson (1781-1840), mathématicien français.

Jean-Marie Souriau, mathématicien, Université d'Aix-Marseille.

Claude Viterbo, mathématicien, Université d'Orsay.

Hermann Weyl (1885-1955), mathématicien allemand.

Yacov Zeldovich (1903-1988), astrophysicien russe.