# Difféologie d' espace singulier et petits diviseurs

Patrick Iglesias
Centre de Physique théorique*
CNRS–Luminy–Case 907
F–13288 MARSEILLE Cedex 9 (France)

**Résumé**: On montre comment apparait, dans la théorie des fibrés difféologiques, la question des petits diviseurs, en particulier dans l'étude du tore irrationnel $\mathbb{T}_\alpha$.

**Abstract**: We show how appears, in the theory of diffeological spaces, the question of small divisors, in particular in the study of the irational torus $\mathbb{T}_\alpha$.

aout 85

*Laboratoire propre. Centre National de la Recherche Scientifique.

CPT-85/P.1803

A moins d'être définis explicitement, les objets dont il est question dans cette note: difféologie,applications différentiables, submersion,immersion... doivent être compris au sens de la catégorie des espaces difféologiques[4] [7] [9] .

## 1- Fibrés difféologiques principaux

La notion de fibration se généralise aux espaces difféologiques, elle fait appel à une propriété des applications que nous avons appelée micro trivialité [7] :

1.1 **Définition**:

Une application différentiable $f \in D(X,M)$, X et M espaces difféologiques, sera dite **micro triviale** si, pour toute plaque $\varphi$ de M, l'image réciproque $f_\varphi$ (de f par $\varphi$) de base def($\varphi$) (ouvert de $\mathbb{R}^n$) est localement triviale.

Rappelons que l'image réciproque d'une application différentiable $f : X \to M$ par une application différentiable $\varphi : \Omega \to M$ est définie par:

$$\begin{cases} X_\varphi = \{(r,x) \in \Omega \times X \mid \varphi(r) = f(x)\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1.2) \\ f_\varphi = pr_\Omega \mid X_\varphi \quad \text{ou } pr_\Omega \text{ est la projection sur } \Omega \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X_\varphi \arrow[r, "\varphi_f"] \arrow[d, "f_\varphi"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \Omega \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

Le diagramme précédent est évidemment commutatif, Les applications $f_\varphi$ et $\varphi_f$ désignent, respectivement, les restrictions des projections $pr_\Omega$ et $pr_X$ à $X_\varphi$. Ce sont des submersions parce que f et$\varphi$ sont des submersions [7].

La propriété de micro trivialité s'exprime en termes purement géométriques en utilisant la notion de **groupoïde associé** à une application différentiable (voir

[7]). Si $p : X \to M$ est une fibration, c'est en particulier une submersion, toutes les **fibres** $X_m=p^{-1}(m)$, $m\in M$, munies de la difféologie de partie, sont difféomorphes [7] leur type difféologique est appelé **fibre type**.

Si $p : X \to M$ est une fibration le triplet $P=(X,M,p)$ sera aussi appellé fibré (difféologique), X sera l'**espace total**, M la **base** et p la **projection**, du fibré (la fibre type F est souvent identifiée avec une fibre $X_{m_0}=p^{-1}(m_0)$, $m_0\in M$).

La définition des **fibrés difféologiques principaux** est donnée grâce à la proposition suivante:

1.3 **Proposition:**

Etant donnés: un espace difféologique X, un groupe difféologique G et une action différentiable de G sur X, notée $(a,x) \mapsto \underline{a}_X(x)$ avec $(a,x)\in G\times X$. Si l'application $\mathfrak{F}$ définie par:

$$\mathfrak{F} : X\times G \to X\times X$$
$$(x,a) \mapsto (x,\underline{a}_X(x))$$

est une immersion alors La projection canonique $\pi$ de X sur son quotient difféologique $M=X/G$ est une fibration difféologique nous dirons alors que $\Pi=(X,M,\pi)$ muni de l'action de G est une **fibration difféologique principale**.

□ voir [7] □

1.4 **proposition** :

a) Si la base d'un fibré difféologique principal est une variété, il est localement D-trivial. Si la fibre type est aussi une variété l'espace total est une variété.

b)L'image réciproque d'un fibré difféologique (principal) par une application différentiable est encore un fibré difféologique (principal).

c) Si G est un groupe difféologique et H un sous groupe de G. La projection canonique de G sur son quotient G/H est une fibration difféologique.

□ voir [7] □

1.5 **Définition** :

Deux fibrés difféologiques principaux de même base et de même groupe seront **équivalents** s'il existe un difféomorphisme équivariant de de leurs espaces totaux se projetant sur l'identité de la base.

## 2- Flots libres sur les tores de Denjoy-Poincarré

Nous appelons **flot libre** au dessus d'un espace difféologique M tout fibré difféologique principal de groupe structural $(\mathbb{R},+)$ de base M [3].

Nous appelons tore irrationnel $\mathbb{T}_\alpha$ le quotient oblique du tore $\mathbb{T}^2$ par la droite de pente irationnelle $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Difféologiquement cet espace s'identifie avec le quotient du cercle $S^1$ par l'action $r_\alpha$ de $\mathbb{Z}$:

$$\forall\ n \in \mathbb{Z} \quad \forall\ z \in S^1 \quad r_\alpha(n)(z)=z.e^{2i\pi n\alpha} \quad (2.1)$$

$S^1$ est en fait un revêtement de $\mathbb{T}_\alpha$ [4] [5] [7]. Notons $\pi_\alpha$ la projection canonique de $S^1$ sur son quotient $\mathbb{T}_\alpha=S^1/\mathbb{Z}$. Et notons $Gr(\pi_\alpha)$ le graphe de la relation d'équivalence associé à $\pi_\alpha$.

$$Gr(\pi_\alpha)=\{(z_1,z_2)\in S^1\times S^1 \mid \pi_\alpha(z_1)=\pi_\alpha(z_2)\} \quad (2.2)$$

$Gr(\pi_\alpha)$ est l'image de $S^1\times\mathbb{Z}$ par $\mathfrak{F}$ (1.3), il est donc difféomorphe à $S^1\times\mathbb{Z}$ puisque $\mathfrak{F}$ est une immersion.

$Gr(\pi_\alpha)$ est en fait l'espace des flêches du groupoïde difféologique associé à la relation d'équivalence définie par la projection $\pi_\alpha$ [7]. Son application caractéristique $\chi=(s,b)$, où les applications s et b sont les applications sources et but du groupoïde, est donnée, dans la trivialisation définie par $\mathfrak{F}$, par:

$$\forall\ (z,n)\in S^1\times\mathbb{Z} \qquad \chi(z,n)=(z,z.e^{2i\pi n\alpha}) \quad (2.3)$$

On utilise alors le théorème suivant, reliant les classes d'équivalence de flots libres au dessus des quotients de variétés et le premier groupe de cohomologie de $Gr(\pi_\alpha)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ [7]:

2.4 **Proposition** :

Soit $P=(X,M,p)$ une submersion telle que X soit une variété. Le premier groupe de cohomologie: $H^1(Gr(p),\mathbb{R})$, du graphe* de la projection p à valeurs dans $\mathbb{R}$, est en bijection avec l'espace des classes de M-équivalence de flots libres au dessus de M:

$$H^1(Gr(p),\mathbb{R})=\mathrm{Flots}(M)$$

Dans le cas précis du tore $\mathbb{T}_\alpha$, parce que $\pi_\alpha$ est une fibration difféologique principale ($\mathfrak{F}$ est une trivialisation du graphe de $\pi_\alpha$) les cocycles et les cobords sont donnés, par:

$$\begin{cases} Z^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})=\{f\in D(S^1\times\mathbb{Z},\mathbb{R}) \mid \forall(r,n,m)\in S^1\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;\; f(z,n+m)=f(z,n)+f(z.e^{2i\pi n\alpha},m)\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.5) \\ B^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})=\{f\in D(S^1\times\mathbb{Z},\mathbb{R}) \mid \exists\; g\in D(S^1,\mathbb{R}) \;\; \forall(r,n)\in S^1\times\mathbb{Z} \; f(z,n)=g(z.e^{2i\pi n\alpha})-g(z)\} \end{cases}$$

## 3- Flots libres sur $\mathbb{T}_\alpha$ et petits diviseurs

L'équation de cocycle se ramène à:

$$\begin{cases} f(z,n)=\sum_{k=0,\ldots,n-1} f^*(z.e^{2i\pi k\alpha}) \qquad n>0 \\ f(z,-n)=-\sum_{k=0,\ldots,n-1} f^*(z.e^{2i\pi(k-n)n\alpha}) \quad n>0 \quad (3.1) \\ f(z,0)=0 \end{cases}$$

où $f^*$ est une application différentiable quelconque, f et $f^*$ sont reliées par:

$$f^*\in D(S^1,\mathbb{R}) \qquad f^*(z)=f(z,1) \qquad (3.2)$$

La relation de cohomologie entre $f_1\in Z^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})$ et $f_2\in Z^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})$ se traduit sur $f_1^*$ et $f_2^*$ par:

$$f_2^*=f_1^*+g\circ r_\alpha(1)-g \qquad g\in D(S1,\mathbb{R}) \qquad (3.3)$$

---

* Nous appelons graphe d'une application différentiable, aussi bien son graphe au sens usuel du terme, que le graphe de la relation d'équivalence qu'elle engendre sur son espace de définition.

En notant $L_\alpha$ l'action de $D(S^1,\mathbb{R})$ sur lui même définie grâce à la formule (3.3), où $f_2^*=L_\alpha(f_1^*)$, le groupe $H^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})$ s'identifie avec le quotient de $D(S^1,\mathbb{R})$ par l'action $L_\alpha$ :

$$H^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})=D(S^1,\mathbb{R})/L_\alpha \qquad (3.4)$$

L'intégrale $\oint f^*$ est un invariant naturel de cette action, en associant à $f^*$ le couple $(\oint f^*, f^*-\oint f^*)$, le calcul de $H^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})$ se ramène à l'étude de l'équation:

$$\delta f^*=g\circ r_\alpha(1)-g \qquad (g,\delta f^*)\in D(S^1,\mathbb{R})^2 \qquad \oint \delta f^*=0 \qquad (3.5)$$

Sous cette forme cette équation a été étudié par de nombreux auteurs, en particulier par V.Arnold [1][2], J. Moser [8], M.R.Hermann [6]. Pour une large classe de nombres, ceux vérifiant la condition diophantienne suivante:

$$\exists\ \varepsilon>0,\ \exists\ k>0 : |\alpha-(m/n)| > k/n^{2+\varepsilon} \qquad \forall (m,n)\in\mathbb{Z}^2 \qquad (3.6)$$

l'équation (3.5) en g a toujours une solution unique si la difféologie que l'on considère est au moins la difféologie** $C^3$[6].Ce résultat peut alors s'interpréter en termes de difféologie:

3.6- **Proposition** :

Si $\alpha$ est un nombre diophantien (condition 3.6) l'espace des flots libres, au dessus de $\mathbb{T}_\alpha$, identifié au groupe de cohomologie $H^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})$, est égal à $\mathbb{R}$. La projection de $Z^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est donné par:

$$\forall f^*\in Z^1(Gr(\pi_\alpha),\mathbb{R})\sim D(S^1,\mathbb{R}) \qquad f^*\rightarrow \oint f^*$$

Chaque flot libre au dessus de $\mathbb{T}_\alpha$ est équivalent au fibré $P_\omega=(\mathbb{T}^2,\mathbb{T}_\alpha,p_\omega)$, avec $\omega=\oint f^*$ muni de l'action $\theta_\omega$ de $\mathbb{R}$ :

$$\forall (t,z_1,z_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}2 \qquad \theta_\omega(t)(z_1,z_2)=(e^{2i\pi\omega t}z_1, e^{2i\pi\omega\alpha t}z_2)$$

$\omega=0$ caractérise le fibré trivial.

** La difféologie d'un espace X est $C^k$ si si elle a été définie à partir de la difféologie $C^k$ des espaces numériques $\mathbb{R}^n$.

## Conclusion :

L'axiomatique des espaces difféologiques à été proposée initialement pour l'étude des espaces de dimension infinie [9] [4]. Il s'avère qu'elle est aussi pertinente dans l'étude des quotients singuliers (voir aussi [5]).

## Bibliographie


[1] V.Arnold– Small dénominatorsl; mapping of the circumférence onto itself. Ilsvestiia A.N. SSSR. série Math. 25,1 (1965)

[2] V.Arnold– Chapitres supplémentaires à la théorie des équatios différentielles. Edition MIR (Moscou) (1980)

[3] J.Dieudonné– Eléments d'analyse III. Gauthiers–Villars. Paris 1970

[4] P.Donato– Revêtements et groupe fondamental des espaces différentiels homogènes. Thèse Université de Provence. Marseille (1984)

[5] P.Donato P.Iglesias– Exemple de groupes difféologiques: Flots irrationnels sur le tore. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301, Série I, N° 4, 1985.

[6] M.R.Hermann– Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Thèse Publication Mathématiques, N° 49, I.H.E.S. Bures sur Yvette 1979

[7] P.Iglesias– Fibrés difféologiques et homotopie. Thèse (à paraitre)

[8] J.Moser– A rapidly convergent iteration method, partII,Ann. Scuola Norm. di Pisa, Ser. III, 20 (1966)

[9] J.M.Souriau– Groupes différentiels et physique mathématique. Feuilletage et quantification géométrique, pp75–79. Collection travaux en cours . éd. Hermann Paris (1984)