Densité des corps quadratiques plats

Patrick Iglesias

Introduction

Dans un précédent article, [Igl94], nous avons défini le *type combinatoire* d'un ordre d'un corps de nombres algébriques réels $\mathbf{K}$. Lorsque $\mathbf{K}$ est quadratique, le type combinatoire de l'ordre $\mathcal{D}_f$ de conducteur f est le quotient de la frontière de l'enveloppe convexe des points de $\mathcal{D}_f$ situés dans le cône positif de $\mathbf{K}$, avec des points marqués : les *sommets géométriques* qui sont les sommets de l'enveloppe convexe, et les *sommets plats* qui sont les points de $\mathcal{D}_f$ situés dans les faces de l'enveloppe convexe. Il se représente comme un graphe $\Gamma_f = [b_1, \ldots, b_g]$, où g est le nombre de sommets géométriques et les $b_i - 1$ le nombre de sommets plats entre deux sommets géométriques consécutifs, comme l'illustre les quelques exemples données dans la figure 1.

Nous étudions dans cet article, le cas le plus simple : celui pour lequel il n'y a qu'une classe de sommets géométriques (les unités positives). Lorsque l'anneau des entiers vérifie cette propriété, nous disons que le corps est *plat*, et nous en donnons une caractérisation simple. Pour chaque classe de congruence de d modulo 4 il n'y a que certaines classes permises de b modulo 4. Nous montrons, par des méthodes analytiques, que pour chacune de ces valeurs permises il y a une infinité de corps du type $\Gamma(d) = [b]$ et nous calculons les densités relatives de ces corps suivant la valeur de b. Nous avons été conduit à modifier légèrement la définition originale des densités de Dirichlet à cause du trop petit nombre de corps plats dans l'ensemble de tous les corps quadratiques. En définitive nous trouvons que la densité des corps plats de type $\Gamma(d) = [b]$ est proportionnelle, à une constante universelle près, à la fonction arithmétique suivante

$$\rho(b) = \frac{1}{b\prod_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right)}$$

1 Les ordres plats

Nous reprenons les notations de [Igl94]. Nous considérons un ordre $\mathcal{D}_f$ de conducteur f d'un corps quadratique $\mathbf{K}$, et nous supposons que $\Gamma_f = [b]$. Soit ε l'unité positive fondamentale de $\mathcal{D}_f$, cela signifie que tous les points minimaux entre 1 et ε sont alignés. Il n'y a donc dans ce cas qu'un sommet géométrique (la classe de l'unité) et $b-1$ sommets plats.

1.1 Définition. Nous dirons qu'un ordre $\mathcal{D}_f$ de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ est *plat* s'il existe un entier naturel b tel que $\Gamma_f(d) = [b]$. Nous dirons, de même, que le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ est plat si son anneau des entiers est plat.

1.2 Théorème. *Soit $\mathcal{D}_f$ un ordre de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ et ε son unité fondamentale positive, alors $\mathcal{D}_f$ est plat si et seulement si il existe deux entiers $b > 0$ et r tels que $\varepsilon = 1 + b(r + f\omega)$, avec $r > 0$ si $d \equiv 2$ ou 3 mod 4 et $r > -f/2$ si $d \equiv 1$ mod 4. De plus :*

$$d \equiv 2 \text{ ou } 3 \text{ mod } 4 \;\Rightarrow\; f^2d = r^2 + \frac{2r}{b} \quad \text{et} \quad \varepsilon = 1 + b\Big(r + f\sqrt{d}\Big) \tag{1}$$

$$d \equiv 1 \text{ mod } 4 \;\Rightarrow\; f^2d = R^2 + \frac{4R}{b} \text{ avec } R = 2r + f$$

$$\text{et} \quad \varepsilon = 1 + \frac{b}{2}\Big(R + f\sqrt{d}\Big) \tag{2}$$

Dans les deux cas $\Gamma_f(d) = [b]$.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{D}_f$ soit plat, alors $\varepsilon = 1 + bu$ et $u = r + sf\omega$, il faut montrer que $s = 1$. Mais s est le volume du parallélogramme défini par le couple de vecteurs $(1, 1+u)$, or comme ce paralélogramme est à sommets entiers, qu'il ne contient de points entiers ni sur ses faces ni à l'intérieur (par hypothèse) : $\det(1, 1+u) = 1$, c'est-à-dire $s = 1$. Réciproquement, si $\varepsilon = 1 + bu$ avec $u = r + f\omega$, alors le nombre de points entiers contenus à l'intérieur du parallélogramme défini par $(1, \varepsilon)$ est égal à $\det(1, \varepsilon) - 1 = b - 1$. Nous connaissons déjà les $b - 1$ points entiers $1 + ku$, $k = 1 \dots b-1$, il n'y en a donc pas d'autres, le graphe de $\mathcal{D}_f$ est donc du type $[b]$. ■

Le théorème précédent peut aussi s'interpréter de la façon suivante :

1.3 Proposition. *Soit $b > 0$ et $r > 0$ deux entiers tels que b divise $2r$. Soit f^2 le facteur carré de $r^2 + 2r/b$ et d son facteur sans carré, si d est congru à 2 ou 3 modulo 4, alors l'ordre $\mathcal{D}_f$ de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ est plat et $\Gamma_f(d) = [b]$. Son unité fondamentale positive ε est donnée par la formule 1.*

1.4 Proposition. *Soit $b > 0$ et $R > 0$ deux entiers tels que b divise $4R$. Soit f^2 le facteur carré de $R^2 + 4R/b$ et d son facteur sans carré, si d est congru à 1 modulo 4, et si R est congru à f modulo 2 alors l'ordre $\mathcal{D}_f$ de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ est plat et $\Gamma_f(d) = [b]$. Son unité fondamentale positive ε est donnée par la formule 2.*

Donnons une interprétation des nombres b et r (ou R). Rappelons que le discriminant de l'ordre $\mathcal{D}_f$ est égal au carré du volume du réseau engendré par $\{1, f\omega\}$, c'est-à-dire : $D_f = f^2 d$ si $d \equiv 1 \bmod 4$, et $D_f = 4f^2 d$ si $d \equiv 2$ ou $3 \bmod 4$. Considérons le réseau engendré par $\{1, \varepsilon\}$ et soit D_ε son discriminant, on peut constater que dans tous les cas :

$$D_\varepsilon = b^2 D_f \quad i.e. \quad b = \sqrt{\frac{D_\varepsilon}{D_f}}. \tag{3}$$

L'interprétation de r dans le cas $d \equiv 2, 3 \bmod 4$, et R dans le cas $d \equiv 1 \bmod 4$ est apparemment moins naturelle, elle est liée à la trace de l'unité fondamentale ε, on peut constater que :

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{b}\,\mathrm{tr}(\varepsilon - 1) \quad \text{si} \quad d \equiv 1 \bmod 4 \\ r &= \frac{1}{2b}\,\mathrm{tr}(\varepsilon - 1) \quad \text{si} \quad d \equiv 2, 3 \bmod 4 \end{aligned} \tag{4}$$

Il y a beaucoup d'ordres plats dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$, il est d'ailleurs possible de les décrire tous.

1.5 Proposition. *Toute unité positive de l'anneau des entiers du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ est l'unité fondamentale d'un ordre plat maximal.*

Démonstration. Soit ε une unité positive de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$, telle que $\varepsilon > 1$. Soit $u = \varepsilon - 1$, il se décompose sur la base $\{1, \omega\}$ en $u = n + m\omega$, avec n et m entiers naturels. Soit $b = n \wedge w$, $r = n/b$ et $f = m/b$ de telle sorte que $u = b(r + f\omega)$ et $\varepsilon = 1 + bu$. Soit $\mathcal{D}_f$ l'ordre engendré par 1 et $f\omega$, on est dans le cadre du théorème 1.2 : $\Gamma_f(d) = [b]$ et ε est l'unité fondamentale positive de $\mathcal{D}_f$. Si nous n'avions pas pris le pgcd de n et m, mais un diviseur quelconque b' $(b = kb')$ nous aurions pu poser de la même manière $r' = n/b'$, $f' = m/b'$ et $u' = r' + f'\omega$. De telle sorte que $\varepsilon = 1 + b'(r' + f'\omega)$ soit l'unité fondamentale positive de $\mathcal{D}_{f'}$. Mais l'ordre $\mathcal{D}_{f'} = \{1, f'\omega\} = \{1, kf\omega\}$ est contenu dans $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_f$ est bien l'ordre plat maximal d'unité fondamentale positive ε. ■

On peut ainsi associer à toute unité ε de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$, un ordre plat maximal $\mathcal{D}_\varepsilon$ d'unité positive fondamentale ε. Les ordres plats de tout corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ sont donc indexés par $\mathbf{N}^*$.

2 Etude des corps plats

Nous identifierons comme d'ordinaire, l'ensemble des corps quadratiques réels $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ à l'ensemble des nombres entiers sans facteur carré d. Nous noterons $\mathcal{Q}$ ce dernier ensemble et ν sa fonction caractéristique (le module de la fonction de Möbius) :

$$\nu(1) = 1, \text{ et si } n \neq 1 : \nu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est sans facteur carré} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5}$$

Nous diviserons notre étude des corps plats $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ suivant la congruence de d modulo 4, soit :

$$\mathcal{Q}_i(b) = \{d \in \mathcal{Q} \mid \Gamma(d) = [b] \text{ et } d \equiv i \bmod 4\} \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

D'après la proposition 1.2 nous savons que $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ et plat si et seulement si il existe deux entiers r et b, ou R et b, tels que $d = r^2 + 2r/b$ si $d \equiv 2, 3$ modulo 4 ou $d = R^2 + 4R/b$ si $d \equiv 1$ modulo 4. La proposition suivante précise cette décomposition suivant r (ou R) et b.

2.1 Proposition. *Soit $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ un corps quadratique réel, alors :*

1. *$\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ est plat, $d \equiv 1$ mod 4 et $\Gamma(d) = [b]$ si et seulement si b est impair et s'il existe un entier impair R' sans facteur carré tel que $d = R'(R'b^2 + 4)$ et tel que $R'b^2 + 4$ soit sans facteur carré.*
2. *$\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ est plat, $d \equiv 2$ mod 4 et $\Gamma(d) = [b]$ si et seulement si*
   - *$b \equiv 0$ mod 4 et s'il existe un entier $r' \equiv 2$ mod 4 sans facteur carré, tel que $d = r'[r'(b/2)^2 + 1]$ et tel que $r'(b/2)^2 + 1$ soit sans facteur carré.*
   - *$b \equiv 2$ mod 4 et s'il existe un entier $r' \equiv 1$ ou 2 mod 4 sans facteur carré, tel que $d = r'[r'(b/2)^2 + 1]$ et tel que $r'(b/2)^2 + 1$ soit sans facteur carré.*
3. *$\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ est plat, $d \equiv 3$ mod 4 et $\Gamma(d) = [b]$ si et seulement si*
   - *$b \equiv 0$ mod 4 et s'il existe un entier $r' \equiv 3$ mod 4 sans facteur carré, tel que $d = r'[r'(b/2)^2 + 1]$ et tel que $r'(b/2)^2 + 1$ soit sans facteur carré.*
   - *b est impair et s'il existe un entier impair r' sans facteur carré, tel que $d = r'(r'b^2 + 2)$ et tel que $r'b^2 + 2$ soit sans facteur carré.*

De plus, dans chaque cas de congruence de b mod 4, la décomposition ci-dessus est unique.

Démonstration. Analysons la décomposition de d suivant les cas :

1) $d \equiv 1$ mod 4.

En vertu du théorème 1.2, $R = 2r + 1$ (avec $f = 1$) est impair, puisque b doit diviser $4R$, on a :

	$d \equiv 1$	$d \equiv 2$	$d \equiv 3$
$b \equiv 0$	$\varnothing$	$d = r'[r'(b/2)^2 + 1]$ $r' \equiv 2$	$d = r'[r'(b/2)^2 + 1]$ $r' \equiv 3$
$b \equiv 2$	$\varnothing$	$d = r'[r'(b/2)^2 + 1]$ $r' \equiv 1$ ou 2	$\varnothing$
$b \equiv 1$ ou $b \equiv 3$	$d = R'(R'b^2 + 4)$ R' impair	$\varnothing$	$d = r'(r'b^2 + 2)$ r' impair

Table 1: Décomposition de d pour les corps quadratiques plats

1.1) $b \equiv 2 \bmod 4$. Posons $b = 2b'$, alors b' divise R et b' est impair, posons $R = R'b'$ de sorte que $d = R'^2b'^2 + 2R'$, alors $d \equiv 1(4)$ et $R'b' \equiv 1(4) \Rightarrow 2R' \equiv 0(4) \Rightarrow R \equiv 0(2)$ ce qui n'est pas permis.

1.2) $b \equiv 0 \bmod 4$. Soit $b = 4b'$, puisque b' divise R alors $R = R'b$ avec b' impair et $d = R'^2b^2 + R'$, donc d est pair, or $d \equiv 1(4)$.

Le nombre b est donc impair. D'autre part, si b et R sont impairs tels que $d = R^2 + 4R/b$, alors b divise R. Soit $R = R'b$ alors $d = R'^2b^2 + 4R'$ et $d \equiv 1(4)$. Enfin, d étant sans facteur carré il en est de même de R' et $R'b^2+4$, réciproquement soient b et R' deux nombres impairs tels que R' soit sans facteur carré ainsi que $R'b^2+4$, puique ces nombres sont premiers entre eux leur produit $d = R'(R'b^2 + 4)$ est sans facteur carré, et de plus congru à 1 modulo 4, on pose alors $R = R'b$.

2) $d \equiv 2$ ou $3 \bmod 4$.

En vertu du théorème 1.2, $d = r^2 + 2r/b$, soit :

2.1) Si b est pair $b = 2b'$, alors b' divise r : $r = r'b'$ et $d = r'(r'b'^2 + 1)$. Puisque r' et $r'b'^2 + 1$ sont premiers entre eux, d est sans facteur carré si et seulement si r' et $r'b'^2 + 1$ sont sans facteur carré.

2.2) Si b est impair, alors b divise r : $r = r'b'$, d'où $d = r'^2 b^2 + 2r' = r'(r'b^2 + 2)$. Mais r' est nécessairement impair, sinon $d \equiv 0 \bmod 4$, donc r' et $r'b^2 + 2$ sont premiers entre eux, ils sont donc chacun sans facteur carré.

La réciproque est du même type que pour $d \equiv 1 \bmod 4$. La vérification des congruences modulo 4 est laissé aux soins du lecteur. ■

Cette proposition est résumée par le tableau 1. Nous allons montrer maintenant que dans tous les cas autorisés par la propositon précédente les ensembles $\mathcal{Q}_i(b)$ sont infinis et nous évaluerons leurs densités relatives.

3 Densités de Dirichlet

Une méthode classique, pour s'assurer qu'une partie $A \subset \mathbf{N}^*$ est infinie, consiste à montrer que sa *densité de Dirichlet* est non nulle, c'est une condition suffisante. Rappelons que la densité de Dirichlet de A est définie comme la limite, lorsqu'elle existe :

$$D(A) = \lim_{s \to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{7}$$

En particulier, la densité des nombres sans facteur carré est bien connue :

$$D(\mathcal{Q}) = \lim_{s \to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathcal{Q}} \frac{1}{n^s} = \lim_{s \to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}. \tag{8}$$

Puisque nous manipulerons essentiellement des ensembles de nombres sans facteur carré, nous définirons la densité d'un ensemble d'entiers A relativement à $\mathcal{Q}$ par :

$$d(A) = \frac{D(A \cap \mathcal{Q})}{D(\mathcal{Q})} = \lim_{s \to 1} \frac{\zeta(2)}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} \frac{\nu(n)}{n^s}. \tag{9}$$

Malheureusement, la densité des ensembles $\mathcal{Q}_i(b)$ est nulle. En effet, les seuls nombres d tels que $\Gamma(d) = [b]$ s'écrivent $d = r^2 + 2r/b$ ou bien $d = R^2 + 4R/b$ suivant la congruence de d modulo 4, dans tous les cas d est quadratique, et puisque la série $\sum 1/n^2$ converge, $d(\mathcal{Q}_i(b)) = 0$. Autrement dit, il y a trop peu de corps plats dans l'ensemble des corps quadratiques.

Pour exploiter toutefois la méthode de Dirichlet dans notre cas, il faut modifier légèrement la définition des densités que nous utiliserons. Nous le ferons à partir du lemme suivant.

3.1 Lemme. *Soit A un ensemble d'entiers naturels strictement positifs. S'il existe un réel strictement positif a tel que la série $\sum_{n\in A} 1/n^{s/a}$ converge pour tout $s > 1$, et tel que la limite :*

$$d_a(A) = \lim_{s\to 1} \frac{\zeta(2)}{\zeta(s)} \sum_{n\in A} \frac{1}{n^{s/a}} \tag{10}$$

soit finie et non nulle ; alors ce nombre est unique, $a \in [1, \infty[$ et A est infini.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux nombres $0 < a' < a$ tels que $0 < d_{a'}(A) < \infty$ et $0 < d_a(A) < \infty$. Soit C une constante strictement positive, $\beta = a - a' > 0$, et N un entier supérieur à $C^{1/\beta}$. Alors pour tout $n > N$ et tout $s > 1$, $1/n^{s/a'} > N^\beta/n^{s/a}$, c'est-à-dire $1/n^{s/a'} > C/n^{s/a}$. En décomposant les séries en une première somme jusqu'à N et le reste, on déduit de $\lim_{s\to 1} \zeta(s) = \infty$ que pour tout $C > 0$: $d_{a'}(A) > C d_a(A)$, ce qui est impossible. Donc, ou bien $d_{a'}(A)$ est fini et non nul et alors $d_a(A)$ est nul, ou bien $d_a(A)$ est fini et non nul et $d_{a'}(A)$ est infini. Il est clair d'autre part que $d_a(A) = 0$ pour toute partie finie A de $\mathbf{N}^*$ et pour tout $a > 0$. Enfin, si $d_a(A) > 0$ alors $a \geq 1$, puisque pour tout $a < 1$ la série $\sum_{n\in A} 1/n^{s/a}$ est majorée par $\zeta(s/a)$ qui converge quand s tend vers 1. Le degré de A, s'il existe, est donc toujours inférieur ou égal à 1. ■

3.2 Définition. Si l'ensemble A vérifie les conditions du lemme précédent, a sera appelé *degré* de A et noté $\deg A$. Le réel $d_a(A)$ sera encore appelé *densité de Dirichlet*.

3.3 Remarque. L'unicité du degré d'une partie A de $\mathbf{N}^*$, s'il existe, nous permet de parler de sa densité de Dirichlet sans autre précision, c'est ce que nous ferons parfois. Evidemment, si pour tout $a > 0$, $d_a(A) = 0$, nous dirons que la densité de A est nulle. ▶

La propriété essentielle de ces densités réside dans la proposition suivante.

3.4 PROPOSITION. *Soit P un polynôme de degré p à coefficients entiers positifs, et k son coefficient dominant. Soit A une partie de $\mathbf{N}^*$ de degré a, l'ensemble image $P(A) = \{P(n) \in \mathbf{N}^* \mid n \in A\}$ est de degré ap, autrement dit :*

$$\deg P(A) = \deg P \deg A. \tag{11}$$

Sa densité de Dirichlet vaut :

$$d_{ap}(P(A)) = \frac{d_a(A)}{k^{1/ap}}\cdot \tag{12}$$

DÉMONSTRATION. Soit $a = \deg A$, $P(n) = kn^p + a_{p-1}n^{p-1} + \ldots + a_0$, et Q le polynôme $Q(x) = 1 + b_1x + \ldots + b_px^p$, avec $b_i = a_{p-i}/k$. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} \times [0, \infty[$:

$$f(s, x) = \exp\left(-\frac{s}{ap}\log Q(x)\right). \tag{13}$$

De telle sorte que :

$$\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n\in A}\frac{1}{P(n)^{s/ap}} = \frac{1}{k^{s/ap}\zeta(s)}\sum_{n\in A}\frac{f(s,1/n)}{n^{s/a}}. \tag{14}$$

La fonction f étant inférieure à 1, cette série converge pour tout $s > 1$. Pour calculer sa limite quand $s \to 1$ remarquons que f est continuement différentiable sur $\mathbf{R} \times [0, \infty[$, et strictement décroissante (de 1 vers 0) pour toute valeur fixée de s. Soit alors $\delta > 0$, posons :

$$\alpha = \max_{0\le s\le 1+\delta}\max_{0\le x\le 1}(1, |f'_s(x)|), \tag{15}$$

alors, $1 - \alpha x < f(s, x) < 1$ pour tout $s \in [1, 1+\delta]$. On en déduit :

$$\frac{1}{k^{s/ap}\zeta(s)}\sum_{n\in A}\frac{1}{n^{s/a}} - \frac{\alpha}{n^{1+s/a}} < \frac{1}{k^{s/ap}\zeta(s)}\sum_{n\in A}\frac{f(s,1/n)}{n^{s/a}}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{k^{s/ap}\zeta(s)}\sum_{n\in A}\frac{f(s,1/n)}{n^{s/a}} < \frac{1}{k^{s/a}\zeta(s)}\sum_{n\in A}\frac{1}{n^{s/a}}. \tag{17}$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+s/a}$ converge pour $s > 0$, on conclut :

$$\lim_{s\to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\in A} \frac{1}{P(n)^{s/ap}} = \lim_{s\to 1} \frac{1}{k^{s/ap}\zeta(s)} \sum_{n\in A} \frac{1}{n^{s/a}} = \frac{1}{k^{1/ap}} d_a(A). \tag{18}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. ■

4 Calcul des densités de $\mathcal{Q}_i(b)$

Revenons maintenant au calcul des densités de $\mathcal{Q}_i(b)$. Considérons, par exemple le cas $d \equiv 3 \bmod 4$, alors $d = r^2 + 2r/b = r'^2 b'^2 + 2r'$, avec les notations de la table 1, r' est impair et sans facteur carré ainsi que $r'b^2 + 2$. Si l'ensemble des $r' \in \mathcal{Q}$ vérifiant ces conditions possède une densité de Dirichlet au sens ordinaire, non nulle, on pourra déduire que $\mathcal{Q}_3(b)$ est de degré 2, infini, et calculer sa densité connaissant celle des r' en question. C'est ce que nous allons faire à présent, mais pour cela nous aurons besoin des quelques définitions et lemmes suivants.

Rappelons qu'on appelle *fonction multiplicative* toute fonction complexe χ définie sur $\mathbf{N}^*$ (ou $\mathbf{Z}$), telle que :

$$m \wedge n = 1 \quad \Rightarrow \quad \chi(mn) = \chi(m)\chi(n). \tag{19}$$

Soit ε_a la fonction définie sur $\mathbf{N}^*$ par :

$$\varepsilon_a(k) = a \wedge k \ \varphi\left(\frac{k}{a \wedge k}\right) \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \tag{20}$$

où a est un entier positif et p parcourt l'ensemble des diviseurs premiers de k. Une vérification immédiate montre qu'elle est multiplicative. En particulier, si a et k sont premiers entre eux, $\varepsilon_a(k) = \varepsilon(k)$, avec :

$$\varepsilon(k) = k \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \tag{21}$$

Nous utiliserons plus loin la propriété suivante de ε, vérifiée pour tout couple d'entiers k_1 k_2 :

$$\varepsilon(k_1)\varepsilon(k_2) = \varepsilon(k_1 k_2) \prod_{p|k_1\wedge k_2} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \tag{22}$$

La fonction ε_a va nous permettre d'exprimer la densité, relative à $\mathcal{Q}$, des nombres sans facteur carré dans la classe de congruence de a modulo k, soit :

$$d(a,k) = d\{nk + a \mid n = 1 \dots \infty\}. \tag{23}$$

4.1 Lemme. *La densité, relative à $\mathcal{Q}$, des nombres sans facteur carré dans la classe de congruence de a modulo k est donnée par :*

$$d(a,k) = \lim_{s \to 1} \frac{\zeta(2)}{\zeta(s)} \sum_{n \equiv a \bmod k} \frac{\nu(n)}{n^s} = \frac{\nu(a \wedge k)}{\varepsilon_a(k)}. \tag{24}$$

Elle est équirépartie dans les classes de congruences de même pgcd avec k.

Démonstration. Rappelons qu'un caractère χ est une fonction multiplicative à valeurs dans S^1, *i.e.* $|\chi| = 1$. Pour tout caractère χ et tout réel $s > 1$, définisons $\ell(s,\chi)$ comme la restriction à $\mathcal{Q}$ de la fonction $L(s,\chi)$ de Dirichlet, plus précisemment :

$$\ell(s,\chi) = \sum_{n \in \mathcal{Q}} \frac{\chi(n)}{n^s} = L(s, \nu\chi). \tag{25}$$

alors :

$$\ell(s,\chi) = \frac{L(s,\chi)}{L(2s,\chi^2)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s}\right), \tag{26}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. En effet, la série converge évidemment puisqu'elle est majorée par $\zeta(s)$. la deuxième égalité s'obtient en développant, comme d'habitude, le produit infini sur les nombres premiers, et en remarquant que les dénominateurs qui interviennent sont tous les nombres sans facteur carré. La première égalité s'obtient en utilisant l'identité $1 + \chi(p)/p^s = (1 - \chi(p)^2/p^{2s})/(1 - \chi(p)/p^s)$.

Supposons maintenant que $a \neq 0$, soit $k = gk'$ et $a = ga'$ où $g = a \wedge k$, alors :

$$\sum_{n \equiv a \bmod k} \frac{\nu(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu(mk + a)}{(mk + a)^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu(g(mk' + a'))}{g^s(mk' + a')^s}. \tag{27}$$

Si $\nu(g) = 0$ alors $\nu(g(mk' + a')) = 0$ et $d(a \bmod k) = 0$, la formule est vrai dans ce cas. Nous supposerons donc que g est sans facteur carré. Mais alors

$\nu(g(mk'+a')) = \nu(mk'+a')$ si g et $mk'+a'$ sont premiers entre eux et $\nu(g(mk'+a')) = 0$ sinon, on peut donc écrire :

$$\sum_{n\equiv a \bmod k} \frac{\nu(n)}{n^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi_g(mk'+a')\nu(mk'+a')}{g^s(mk'+a')^s}, \tag{28}$$

où χ_g est le caractère :

$$\chi_g(n) = 1 \quad \text{si} \quad g \wedge n = 1 \quad \text{et} \quad \chi_g(n) = 0 \quad \text{sinon.} \tag{29}$$

Faisons le changement de variable muette : $n = mk' + a'$,

$$\sum_{n\equiv a \bmod k} \frac{\nu(n)}{n^s} = \frac{1}{g^s} \sum_{n\equiv a' \bmod k'} \frac{\chi_g(n)\nu(n)}{n^s}. \tag{30}$$

Mais maintenant $a' \wedge k' = 1$, et donc a' est inversible dans l'anneau $\mathbf{Z}/k'\mathbf{Z}$, soit a'^* son inverse : $a'a'^* \equiv 1 \bmod k'$. Soit $G_{k'}$ le groupe des unités de $\mathbf{Z}/k'\mathbf{Z}$ et $\widehat{G}_{k'}$ son groupe des caractères. Notons, pour tout entier g et tout caractère χ de $G_{k'}$:

$$\ell_g(s,\chi) = \sum_{\substack{n\in\mathcal{Q} \\ n\wedge g=1}} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_g(n)\nu(n)\chi(n)}{n^s}. \tag{31}$$

Le caractère χ est ici relevé à $\mathbf{N}$ en posant $\chi(n) = 0$, pour tout n tel que $n \wedge k' \neq 1$. Considérons alors la somme suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi\in\widehat{G}_{k'}} \chi(a'^*)\ell_g(s,\chi) &= \sum_{\chi\in\widehat{G}_{k'}} \chi(a'^*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\chi_g(n)\nu(n)}{n^s} \\
&= \sum_{\chi\in\widehat{G}_{k'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(a'^*)\chi(n)\chi_g(n)\nu(n)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\chi\in\widehat{G}_{k'}} \frac{\chi(a'^*n)\chi_g(n)\nu(n)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_g(n)\nu(n)}{n^s} \left[\sum_{\chi\in\widehat{G}_{k'}} \chi(a'^*n) \right]
\end{aligned} \tag{32}$$

En utilisant la propriété fondamentale des caractères :

$$\sum_{\chi\in\widehat{G}_{k'}} \chi(n) = \#G_{k'} \text{ si } n \equiv 1 \bmod k', \text{ et } \sum_{\chi\in\widehat{G}_{k'}} \chi(n) = 0 \text{ sinon,} \tag{33}$$

on obtient :

$$\sum_{\chi\in\widehat{G}_{k'}} \chi(a'^*)\ell_g(s,\chi) = \#G_{k'} \sum_{n\equiv a' \bmod k'} \frac{\chi_g(n)\nu(n)}{n^s}. \tag{34}$$

En particularisant le caractère trivial $\chi_{k'}$ de $G_{k'}$, on a :

$$\sum_{n\equiv a' \bmod k'} \frac{\chi_g(n)\nu(n)}{n^s} = \frac{1}{\#G_{k'}}\Big\{\ell_g(s,\chi_{k'}) + \sum_{\chi\neq\chi_{k'}} \chi(a'^*)\ell_g(s,\chi)\Big\}. \tag{35}$$

Calculons le premier terme de l'accolade, on a grâce à l'identité 26 :

$$\ell_g(s,\chi_{k'}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_g(n)\nu(n)\chi_{k'}(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1+\frac{\chi_g(n)\chi_{k'}(n)}{p^s}\right), \tag{36}$$

mais, par définition de $\chi_{k'}$, on a immédiatement :

$$\ell_g(s,\chi_{k'}) = \prod_{p\nmid k' \text{et } p\nmid g}\left(1+\frac{1}{p^s}\right) = \frac{\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)}{\prod_{p\mid k' \text{ou } p\mid g}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)}. \tag{37}$$

En appliquant la formule 26 au caractère constant $\chi = 1$, et en remarquant (puique p est premier) que $p \mid k'$ ou $p \mid g$ équivaut à $p \mid gk' = k$, on a :

$$\ell_g(s,\chi_{k'}) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)}. \tag{38}$$

En posant ensuite

$$R(s) = \frac{\zeta(2)}{g\ \#G_{k'}\ \zeta(s)} \sum_{\chi\neq\chi_{k'}} \chi(a'^*)\ell_g(s,\chi), \tag{39}$$

on obtient :

$$d(a,k) = \frac{1}{g\ \#G_{k'}\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{1}{p}\right)} + \lim_{s\to 1} R(s). \tag{40}$$

D'après le théorème de Dirichlet, $\sum_{\chi\neq\chi_{k'}}\chi(a'^*)L(s,\chi)$ est bornée (voir par exemple [Ayo63]). Il en est donc de même de $\sum_{\chi\neq\chi_{k'}}\chi(a'^*)\ell_g(s,\chi)$, d'où $\lim_{s\to 1} R(s) = 0$. La formule s'obtient enfin en remplaçant $\#G_{k'}$ par sa valeur $\varphi(k/g)$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier le cas $a = 0$, qui est plus simple, en notant que $0 \wedge k = k$ et $\varphi(1) = 1$. ■

4.2 Remarque. Considérons les nombres du type $nk + a$ avec $n \equiv l \bmod h$, leur densité est évidemment donnée par :

$$d\{nk + a \mid n \equiv l \bmod h\} = d(lk + a, hk) \tag{41}$$

Nous utiliserons fréquemment cette identité par la suite. ▶

Soit $\mathcal{P}'$ un ensemble des nombre premiers. Pour tout $j > 0$, désignons par $\mathcal{P}'_j$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}'$ à j éléments, et convenons que $\mathcal{P}'_0 = \{1\}$. On le lemme calculatoire suivant.

4.3 Lemme. *Soit $\mathcal{P}'$ un ensemble de nombres premiers, $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} - \mathcal{P}'$ et ε la fonction définie par la formule 21, alors pour tout entier k :*

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \sum_{\{p_i\}\in\mathcal{P}'_j} \frac{1}{\varepsilon\left(k\prod_i p_i^2\right)} = \frac{\sigma'}{k\prod_{p''|k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p'|k}\left(1-\frac{1}{p^2-1}\right)}, \tag{42}$$

où $p' \in \mathcal{P}'$, $p'' \in \mathcal{P}''$, et σ' est la constante :

$$\sigma' = \prod_{p\in\mathcal{P}'}\left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right), \tag{43}$$

Démonstration. Par définition la série s'écrit aussi :

$$\frac{1}{\varepsilon(k)} - \sum_{p_1}\frac{1}{\varepsilon(kp_1^2)} + \sum_{p_1}\sum_{p_2>p_1}\frac{1}{\varepsilon(kp_1^2p_2^2)} - \text{etc.} \tag{44}$$

Intéressons-nous au terme $\varepsilon(kp_1^2\dots p_j^2)$, d'après l'identité 22 nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\varepsilon(kp_1^2\dots p_j^2) &= \frac{\varepsilon(k)\varepsilon(p_1^2\dots p_j^2)}{\prod_{p|k\wedge p_1^2\dots p_j^2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}\\ &= \varepsilon(k)\frac{\varepsilon(p_1^2)}{\prod_{p|k\wedge p_1^2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}\cdots\frac{\varepsilon(p_j^2)}{\prod_{p|k\wedge p_j^2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}.\end{aligned} \tag{45}$$

or :

$$\frac{\varepsilon(p_i^2)}{\prod_{p|k\wedge p_i^2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} = p_i^2 \text{ si } p_i \mid k \text{ et } p_i^2 - 1 \text{ si } p_i \nmid k. \tag{46}$$

On peut donc écrire :

$$\frac{\varepsilon(p_i^2)}{\prod_{p|k\wedge p_i^2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} = p_i^2 - \chi_k(p_i), \tag{47}$$

où χ_k est le caractère trivial associé à k. On a ainsi :

$$\varepsilon(kp_1^2 \dots p_j^2) = \varepsilon(k)\prod_{i=1}^{j}\left(p_i^2 - \chi_k(p_i)\right). \tag{48}$$

La série devient alors :

$$\frac{1}{\varepsilon(k)}\left\{1 - \sum_{p_1}\frac{1}{p_1^2-\chi_k(p_1)} + \sum_{p_1<p_2}\frac{1}{p_1^2-\chi_k(p_1)}\frac{1}{p_2^2-\chi_k(p_2)} - \text{ etc.}\right\} \tag{49}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\varepsilon(k)}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\sum_{\{p_i\}\in\mathcal{P}'_j}\prod_i\frac{1}{p_i^2-\chi_k(p_i)} = \frac{1}{\varepsilon(k)}\prod_{p\in\mathcal{P}'}\left(1-\frac{1}{p^2-\chi_k(p)}\right). \tag{50}$$

En séparant les p qui divisent k et les autres, on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon(k)}\prod_{p'|k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p'\nmid k}\left(1-\frac{1}{p^2-1}\right). \tag{51}$$

On a donc :

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\sum_{\{p_i\}\in\mathcal{P}'_j}\frac{1}{\varepsilon\left(k\prod_i p_i^2\right)} = \frac{1}{\varepsilon(k)}\prod_{p'|k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{\prod_{p'\in\mathcal{P}'}\left(1-\frac{1}{p^2-1}\right)}{\prod_{p'|k}\left(1-\frac{1}{p^2-1}\right)}. \tag{52}$$

On obtient le résultat annoncé, en décomposant $\varepsilon(k)$

$$\varepsilon(k) = k\prod_{p'|k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p''|k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right), \tag{53}$$

ce qui permet de simplifier le terme $\prod_{p'|k}(1-1/p^2)$, et en remplaçant enfin $\prod_{p'\in\mathcal{P}'}(1-1/(p^2-1))$ par σ' qui ne dépend que de $\mathcal{P}'$. ■

	$d \equiv 1$	$d \equiv 2$	$d \equiv 3$
$b \equiv 0$	0	2/3	2/3
$b \equiv 2$	0	4/3	0
$b \equiv 1$ ou $b \equiv 3$	1	0	1

Table 2: Coefficients des densités de $\mathcal{Q}_i(b)$

Nous pouvons maintenant calculer explicitement les densités des ensembles $\mathcal{Q}_i(b)$.

4.4 Proposition. *Pour tout entier b et tout $i = 1, 2, 3$, vérifiant les conditions du tableau 1, les ensembles $\mathcal{Q}_i(b)$ des corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, plats de type $\Gamma(d) = [b]$ avec $d \equiv i \bmod 4$, sont infinis et de degré 2. Leurs densités sont données par :*

$$d_2(\mathcal{Q}_i(b)) = c_i[b] \frac{\sigma}{b \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right)}. \tag{54}$$

Où les $c_i[b]$ sont les constantes, ne dépendant que de $b \bmod 4$, données par le tableau 2.

Démonstration. Nous partagerons la démonstration suivant les cases du tableau 1.

1) $d \equiv 1 \bmod 4$ et b impair.

Grâce à la proposition 2.1, si b est impair :

$$\mathcal{Q}_1(b) \simeq \{R' \text{ impair} \mid \nu(R') = 1, \nu(R'b^2 + 4) = 1\} \tag{55}$$

Définissons alors, pour tout entier k impair, les ensemble :

$$\begin{aligned} A &= \{nk + 4 \mid n \text{ impair}, \nu(n) = 1 \text{ et } \nu(nk + 4) = 1\} \\ A' &= \{nk + 4 \mid n \text{ impair et } \nu(nk + 4) = 1\} \\ A'' &= \{nk + 4 \mid n \text{ impair}, \nu(n) = 0 \text{ et } \nu(nk + 4) = 1\} \end{aligned}$$

On a évidemment :

$$d(A) = d(A') - d(A'') \tag{56}$$

En appliquant alors l'identité 23, il vient immédiatement :

$$d(A') = d(k+4, 2k), \tag{57}$$

et en appliquant la proposition 4.1, compte tenu que $k+4$ et $2k$ sont premiers entre eux, on a :

$$d(A') = \frac{1}{\varepsilon(2k)}. \tag{58}$$

La densité de A'' est définie par :

$$d(A'') = \lim_{s\to 1} \frac{\zeta(2)}{\zeta(s)} \sum_{n \text{ impair}} \frac{(1-\nu(n))\nu(nk+4)}{(nk+4)^s}. \tag{59}$$

c'est-à-dire :

$$d(A'') = \lim_{s\to 1} \frac{\zeta(2)}{\zeta(s)} \sum_{p^2 m} \frac{\nu(mp^2k+4)}{(mp^2k+4)^s}, \tag{60}$$

où p parcourt l'ensemble $\mathcal{P}^*$ des nombre premier impair et m est impair (puisque $n = p^2m$ doit l'être). En appliquant la méthode du crible, et en utilisant à nouveau l'identité 23, nous obtenons :

$$d(A'') = \sum_p d(p^2k+4, 2p^2k) - \sum_{p_1<p_2} d(p_1^2p_2^2k+4, 2p_1^2p_2^2k) \cdots \text{ etc.} \tag{61}$$

où les p_i parcourent l'ensemble des nombres premiers impairs. Mais comme là encore $p_1^2 \dots p_j^2 k$ et $p_1^2 \dots p_j^2 k + 4$ sont premiers, on obtient :

$$d(A) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \sum_{\{p_i\}\in\mathcal{P}^*} \frac{1}{\varepsilon(2k\prod_i p_i^2)}. \tag{62}$$

En appliquant alors le lemme 4.3, en notant que $\sigma = \sigma^* \varepsilon(2)$ et que les seuls diviseurs de k sont impairs, on a en définitive :

$$d(A) = \frac{\sigma}{k\prod_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right)} \tag{63}$$

Pour revenir à la densité de $\mathcal{Q}_1(b)$ remarquons, grâce à la proposition 3.4, que $d_2(\mathcal{Q}_i(b)) = bd(A)$ pour $k = b^2$, ce qui donne le résultat.

Pour les autres cas la démonstration est basée sur la même méthode, les seuls points à vérifier sont les valeurs des constantes. Nous ne définirons que les ensembles mis en jeux, et laisserons au lecteur le soin de vérifier les calculs.

2) $d \equiv 2$ et $b \equiv 0 \bmod 4$.

Soit B l'ensemble défini pour tout nombre pair k :

$$B = \{nk + 1 \mid n \equiv 2 \bmod 4, \nu(n) = 1 \text{ et } \nu(nk + 1) = 1\}. \tag{64}$$

On associe à B les deux ensembles B' et B'' copiés sur le modèle de A' et A'' tel que $d(B) = d(B') - d(B'')$. On obtient alors par la méthode du crible :

$$d(B) = \frac{\sigma}{3k \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right)} \tag{65}$$

On obtient la valeur de $c_2[b]$ en remplaçant k par $(b/2)^2$.

3) $d \equiv 2$ et $b \equiv 2 \bmod 4$.

Dans ce cas il faut $C = C_1 \cup C_2$, avec :

$$\begin{aligned} C_1 &= \{nk + 1 \mid n \equiv 1 \bmod 4, \nu(n) = 1 \text{ et } \nu(nk + 1) = 1\} \\ C_1 &= \{nk + 1 \mid n \equiv 2 \bmod 4, \nu(n) = 1 \text{ et } \nu(nk + 1) = 1\}. \end{aligned} \tag{66}$$

et alors $d(C) = d(C_1) + d(C_2)$. On trouve dans les deux cas :

$$d(C_i) = \frac{\sigma}{2k \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right)} \tag{67}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer k par $(b/2)^2$.

4) $d \equiv 3$ et $b \equiv 0 \bmod 4$

Il faut considérer l'ensemble

$$D = \{nk + 1 \mid n \equiv 3 \bmod 4, \nu(n) = 1 \text{ et } \nu(nk + 1) = 1\}, \tag{68}$$

on obtient :

$$d(D) = \frac{\sigma}{3k \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right)} \tag{69}$$

5) $d \equiv 3$ et b impair

Ce cas est complètement analogue au cas $d \equiv 1 \bmod 4$, en fait on aurait pu remplacer $nk + 4$ dans la définition de A par $nk + 2^l$ sans changer le résultat.

Ce qui achève la démonstration. ■

Les graphes des densités des $\mathcal{Q}_i(b)$ sont données jusqu'à $b = 50$ par les figures 4, 5 et 6 où nous avons porté en ordonnée $d_2(\mathcal{Q}_i(b))/\sigma$. Rappelons que σ est définie par 43. On en a une valeur approchée :

$$\sigma = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right) \simeq 0.5307. \tag{70}$$

4.5 Remarque. On peut vérifier que la plus petite densité de $\mathcal{Q}_i(b)$ vaut toujours σ pour tout $i = 1, 2, 3$. En majorant et minorant le produit $\prod_{p|b}(1 - 1/(p^2-1))$, respectivement par 1 et σ, on constate que :

$$\frac{\sigma}{b} \leq d_2(\mathcal{Q}_i(b)) \leq \frac{1}{b}. \tag{71}$$

La fonction densité est donc décroissante en ce sens. D'autre part, cette dernière proposition met en évidence la fonction arithmétique :

$$\rho(b) = \frac{1}{b \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^2-1}\right)} \tag{72}$$

qui permet de mesurer la densité relative des corps quadratiques plats dans une même classe de congruence de d modulo 4. Ces remarques semblent indiquer que la démonstration de la proposition précédente doit pouvoir être simplifiée, ce que nous essaierons de faire dans une prochaine version. ▶

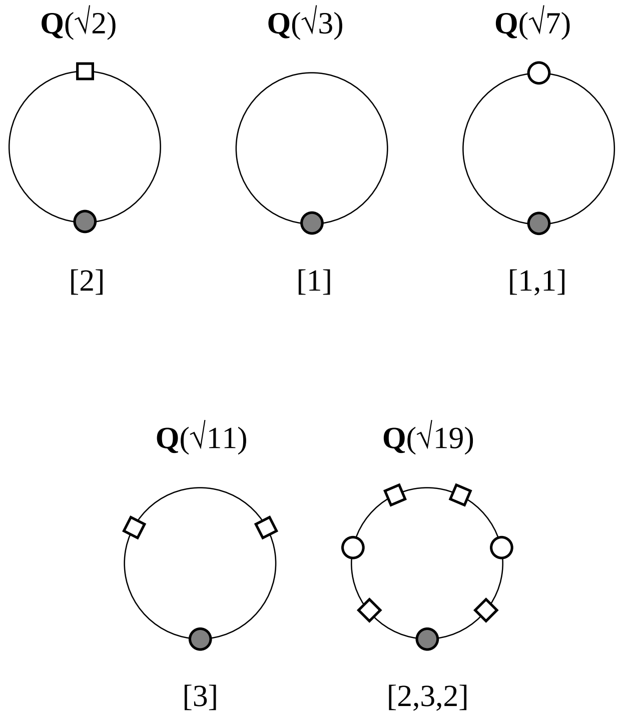

Figure 1: Quelques graphes de corps quadratiques. Les points marqués d'un cercle sont les sommets géométriques, ceux marqués d'une croix : les sommets plats.

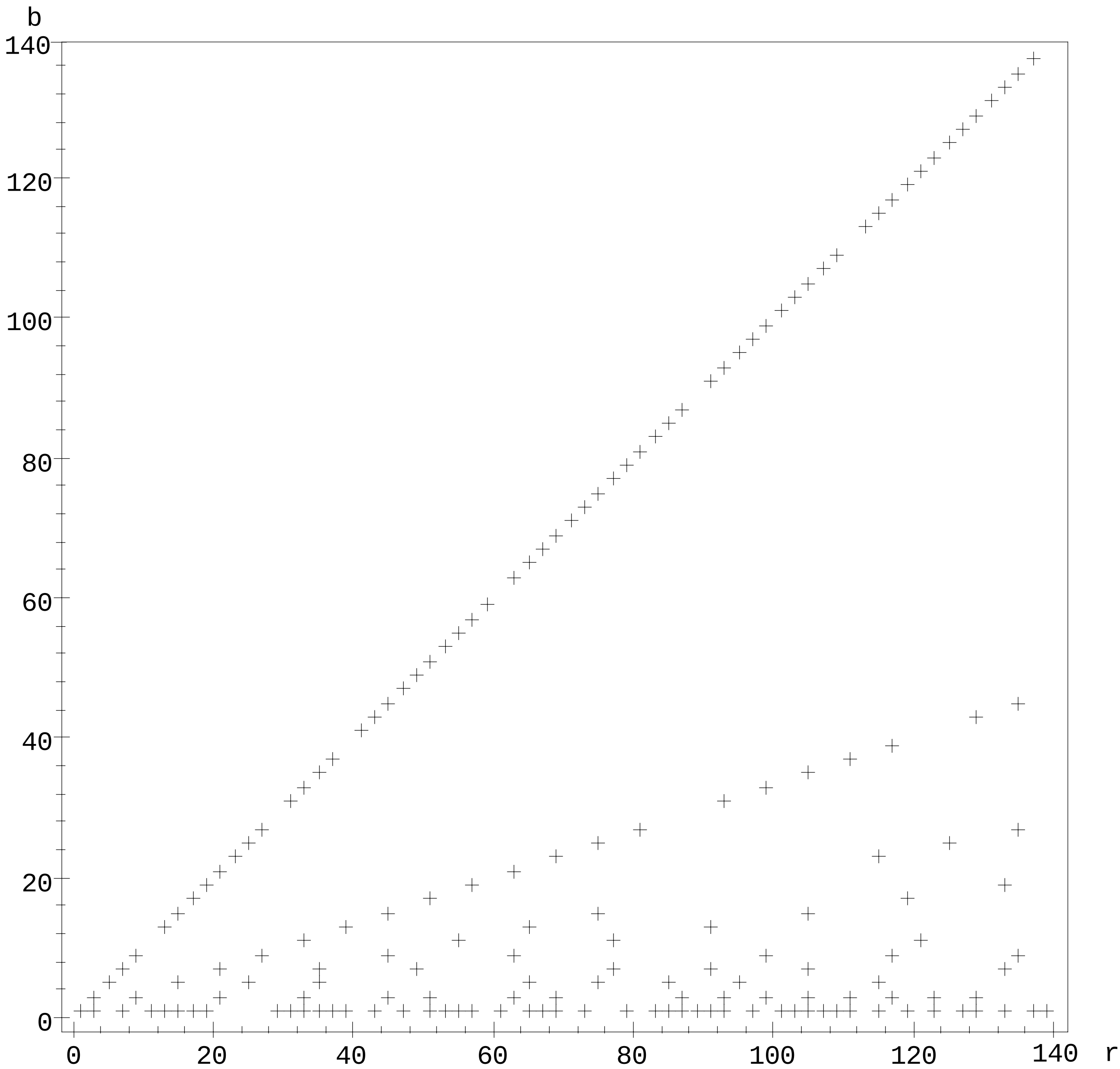

Figure 2: Répartition, en fonction de b et r, des corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, de type $\Gamma(d) = [b]$ avec $d \equiv 1 \bmod 4$

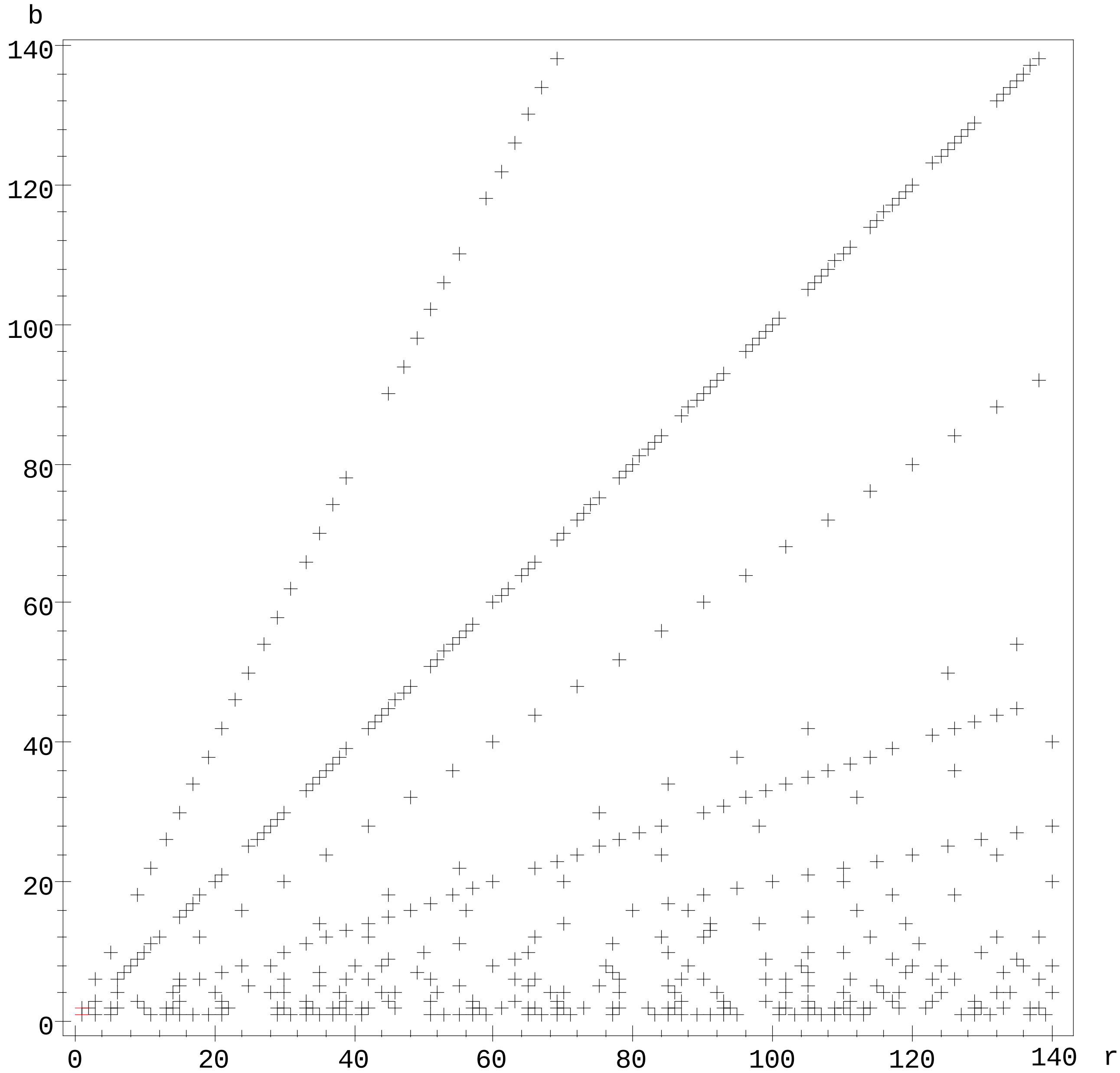

Figure 3: Répartition, en fonction de b et r, des corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$, de type $\Gamma(d) = [b]$ avec $d \equiv 2, 3 \bmod 4$

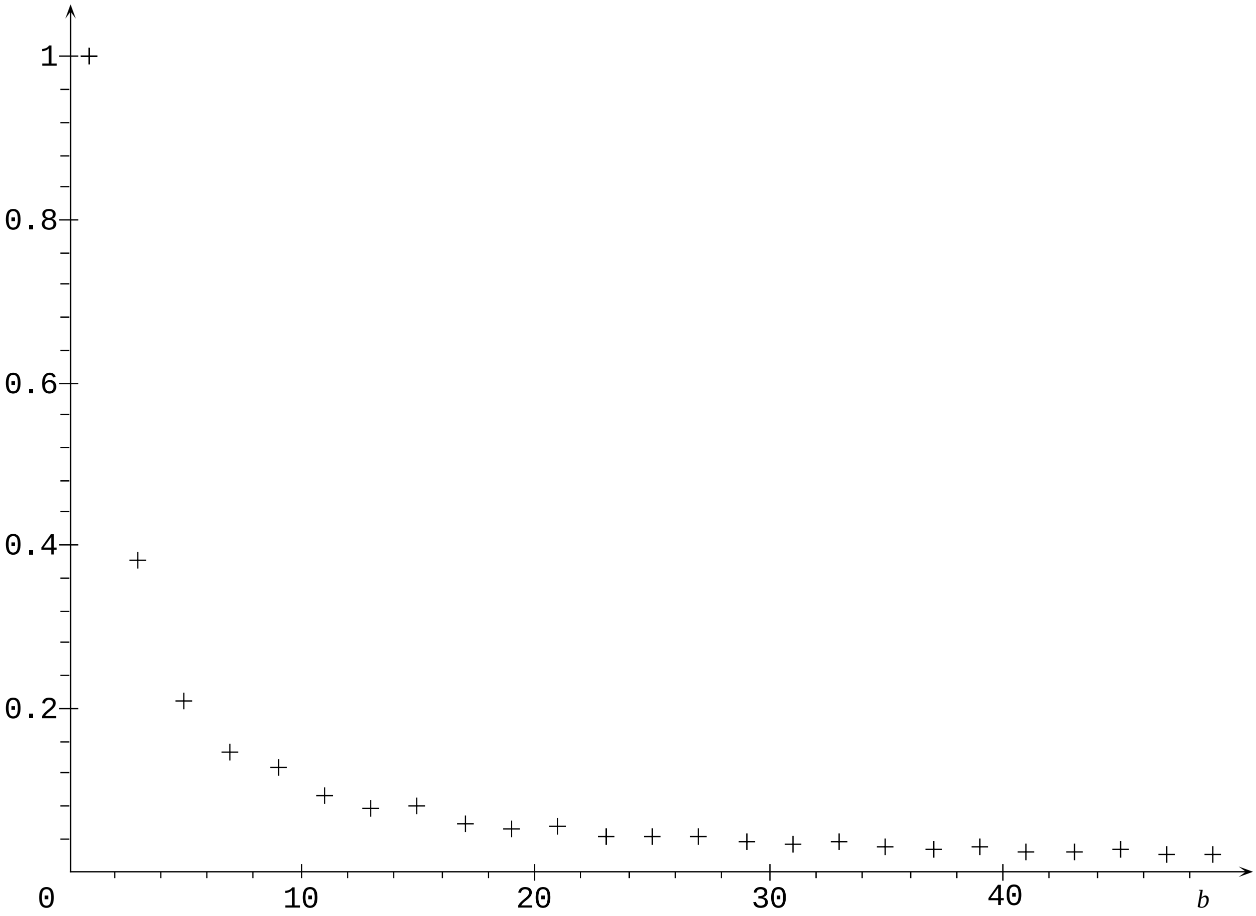

Figure 4: Graphe de densité des corps plats $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ de type $\Gamma(d) = [b]$ avec $d \equiv 1 \bmod 4$

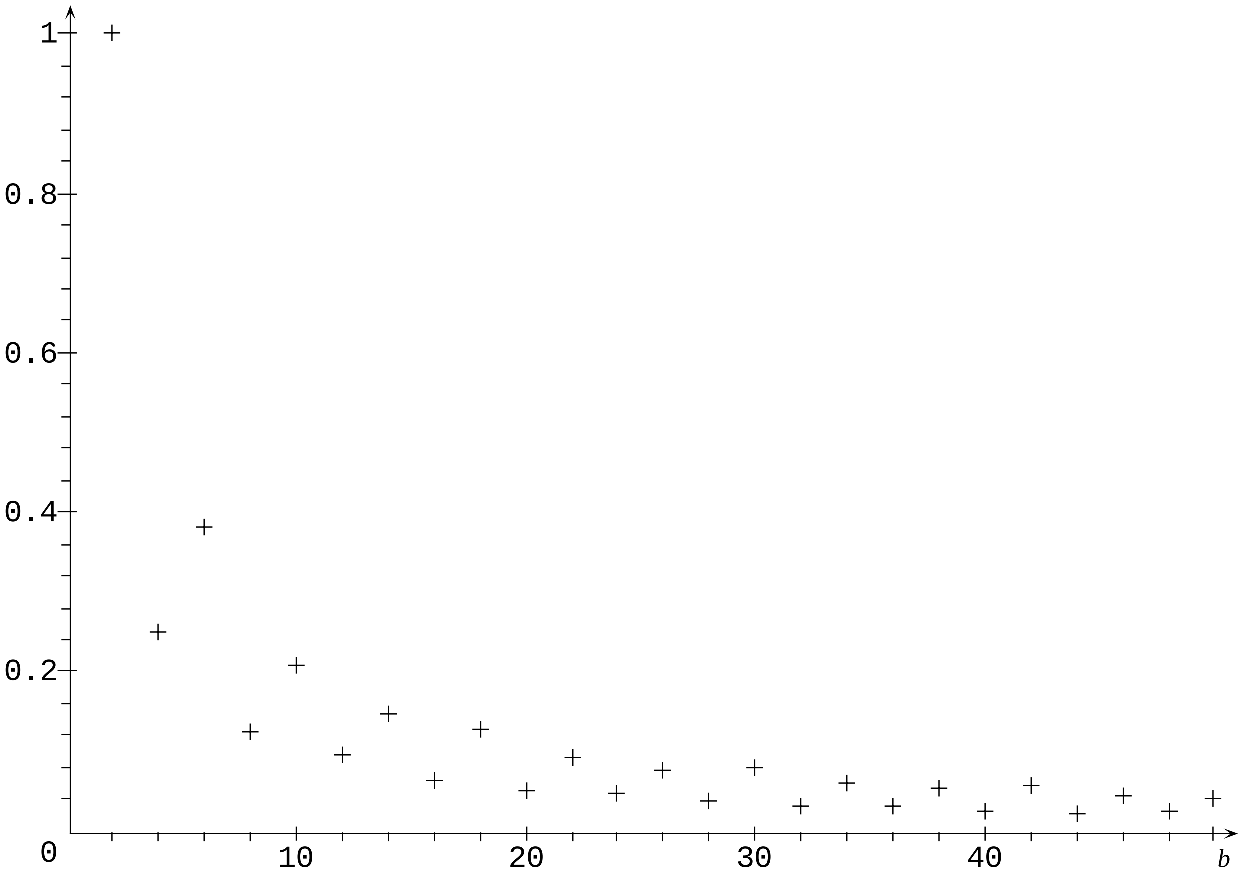

Figure 5: Graphe de densité des corps plats $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ de type $\Gamma(d) = [b]$ avec $d \equiv 2 \bmod 4$

Bibliographie

[Ayo63] R. Ayoub. *Analytic Theory of Numbers*. Number 10 in Math. Survey. Am. Math. Soc., 1963.

[Igl94] P. Iglesias. Type combinatoire des corps de nombres algébriques réels. Prépublication, ENS–Lyon, 1994.

Patrick Iglesias
CMI
39 rue F. Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13

`Patrick.Iglesias@cmi.univ-mrs.fr`

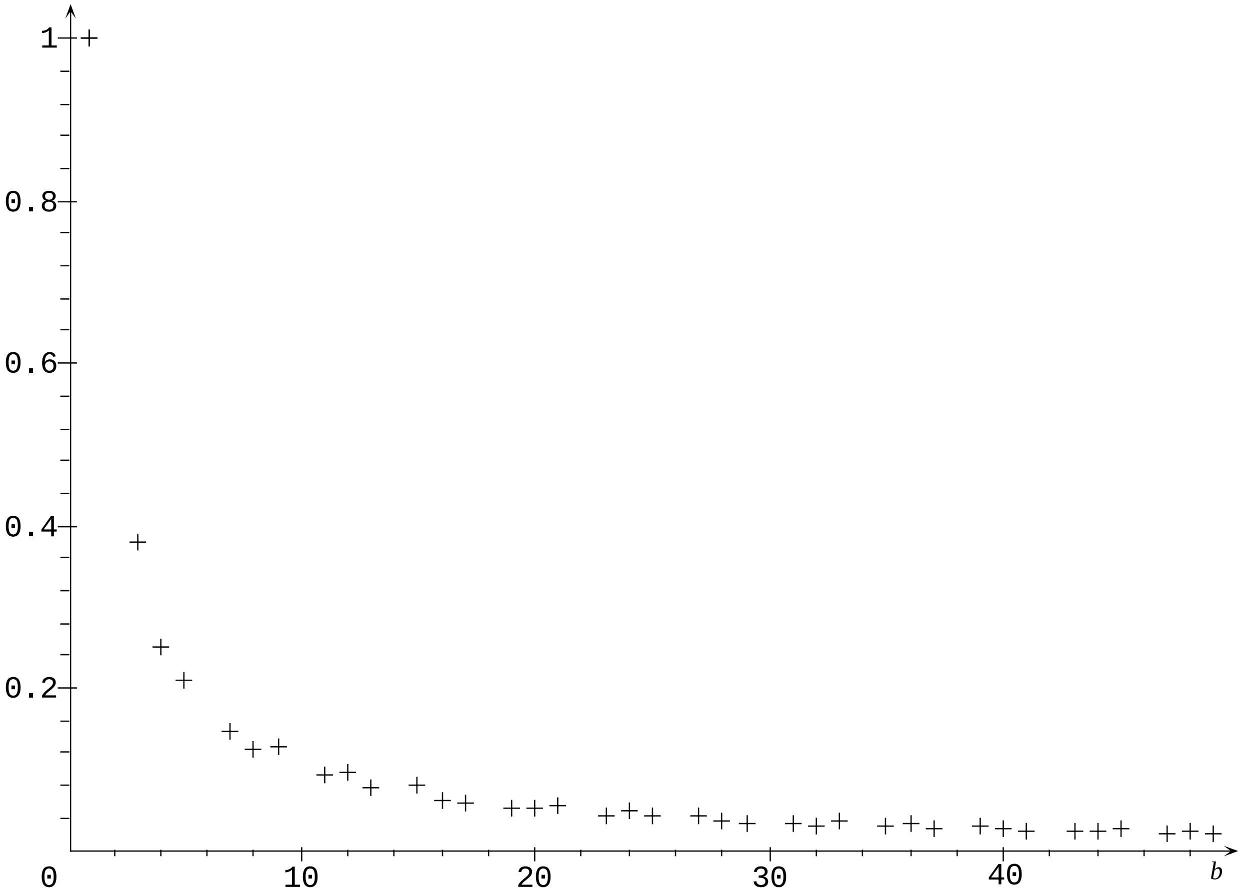

Figure 6: Graphe de densité des corps plats $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$ de type $\Gamma(d) = [b]$ avec $d \equiv 3 \bmod 4$