Arithmétique des rapports de similitudes symplectiques

Patrick Iglesias

le 4 août 1993 (corrections du 31 janvier 1994)

Résumé

Nous analysons la structure algébrique du groupe des rapports de similitudes d'une variété symplectique, lorsque le groupe des périodes de la forme symplectique est non nul et de type fini. Nous donnons une construction qui permet de réaliser tous les groupes permis comme les groupes des rapports de similitudes d'une forme symplectique sur le cotangent d'un tore.

1 Introduction

On peut associer, à toute variété symplectique (X, ω), son *groupe des similitudes* $\mathcal{S}_\omega$. Ce sont les difféomorphismes de X, dont l'action dilate la forme symplectique d'un *rapport* constant. L'action de $\mathcal{S}_\omega$, en homologie, nous donne un certain nombre d'informations sur la nature de son groupe des *rapports de similitudes* $\mathcal{R}_\omega$. Le problème se divise alors en deux cas distincts, suivant que la forme ω est exacte ou non. Lorsque le groupe des périodes P_ω de ω est non nul et de type fini, on montre que c'est un sous-groupe des unités d'un ordre, d'un corps de nombres algébriques K_ω, associé naturellement à P_ω. Le groupe $\mathcal{R}_\omega$ est donc du type $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^m$ ou $\mathbf{Z}^m$. Nous donnons une construction générale qui permet de réaliser tout groupe de ce type comme le groupe des rapports de similitudes d'une forme symplectique, définie sur le cotangent d'un tore dont la dimension est $1 + [P : \mathbf{Z}]$. Cette construction est améliorée dans certain cas, comme par exemple pour les corps quadratiques.

Dans un prochain article, nous analyserons la situation la plus simple du cas ω exacte : lorsque X est homogène pour un groupe de Lie agissant par similitudes. Nous verrons que les variétés de ce type se partagent en deux classes. Leur analyse fait appel à la géométrie des orbites coadjointes, et l'action du groupe affine de $\mathbf{R}$.

2 Similitudes d'une variété symplectique

On appelle *similitude* d'une variété symplectique (X, ω) tout difféomorphisme φ de X tel que :

$$\varphi^* \omega = k\omega. \tag{1}$$

A priori, k est une fonction différentiable sur X, mais dès que $\dim X \geq 4$, X étant supposée connexe, cette fonction est constante. Le nombre k est alors appelé le *rapport de similitude* de φ. La proposition suivante est une simple généralisation de cette propriété.

PROPOSITION **2.1** *Soit (X, ω) une variété symplectique connexe de dimension $2n$, et φ un difféomorphisme de X tel que : $\varphi^*\omega^m = k\omega^m$. Alors, si $1 \leq m < n$ la fonction k est constante.*

DÉMONSTRATION En effet, soit $x \in X$ et $\xi \in T_xX$. L'espace vectoriel quotient $\xi^\perp / \mathbf{R}\xi$ est symplectique et de dimension $2n-2$, où $\xi^\perp$ désigne l'orthogonal symplectique de ξ. Puisque $m < n$, il existe alors une famille de vecteurs (u_i, v_i), $i = 1 \ldots m$, orthogonaux à ξ tels que : $\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$ et $\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0$. On a donc, d'une part : $dk \wedge \omega^m = d\varphi^*\omega^m = 0$, et d'autre part : $dk \wedge \omega^m(\xi, u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m) = dk(\xi)$. On en déduit $dk(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in T_xX$. ■

Le *groupe des similitudes* de (X, ω) sera noté $\mathcal{S}_\omega$:

$$\mathcal{S}_\omega = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(X) \mid \exists k \in \mathbf{R} - \{0\} \text{ tel que } \varphi^*\omega = k\omega\}. \tag{2}$$

Soit χ l'homomorphisme, qui à toute similitude φ associe son rapport k :

$$\chi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_\omega, \mathbf{R} - \{0\}) \quad \varphi^*\omega = k\omega \quad \Rightarrow \quad \chi(\varphi) = k. \tag{3}$$

Son noyau est le groupe des *transformations symplectiques* et sera noté $\mathcal{D}_\omega$:

$$\mathcal{D}_\omega = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(X) \mid \varphi^*\omega = \omega\}. \tag{4}$$

Son image est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{R} - \{0\}$ qui sera noté $\mathcal{R}_\omega$ et appelé le *groupe des rapports de similitudes* de la variété symplectique (X, ω) :

$$\mathcal{R}_\omega = \{k \in \mathbf{R} - \{0\} \mid \exists\varphi \in \mathrm{Diff}(X) \text{ tel que } \varphi^*\omega = k\omega\}. \tag{5}$$

Cette situation est résumée par la suite exacte de groupes :

$$1 \longrightarrow \mathcal{D}_\omega \longrightarrow \mathcal{S}_\omega \xrightarrow{\chi} \mathcal{R}_\omega \longrightarrow 1. \tag{6}$$

Chacun de ces groupes est un invariant de la structure symplectique. En particulier $\mathcal{R}_\omega$ dont la nature semble plus accessible que celle de $\mathcal{D}_\omega$. Malheureusement, dans bien des cas $\mathcal{R}_\omega$ est trivial[1]. Par exemple, lorsque la variété X est de volume fini :

$$\int_X \omega^n < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_\omega \subset \{\pm 1\}. \tag{7}$$

Soit P_ω le groupe des périodes de la forme symplectique ω :

$$P_\omega = \{\int_\sigma \omega \mid \sigma \in H_2(X, \mathbf{Z})\}. \tag{8}$$

Le groupe $\mathcal{R}_\omega$ agit multiplicativement sur P_ω :

$$k \in \mathcal{R}_\omega, \quad p \in P_\omega \quad \Rightarrow \quad kp \in P_\omega. \tag{9}$$

En effet, si $\varphi^*\omega = k\omega$ et $p = \int_\sigma \omega$, alors $kp = \int_{\varphi_*\sigma} \omega \in P_\omega$. Notons que :

Proposition **2.2** *Si $P_\omega \neq \{0\}$, le groupe des rapports de similitudes $\mathcal{R}_\omega$ est dénombrable. Autrement dit, si $\mathcal{R}_\omega$ n'est pas dénombrable la forme symplectique est exacte.*

Démonstration Remarquons que le groupe des rapports de similitudes de $c\omega$ où $c \neq 0$ est identique à celui de ω. Puisque $P_\omega \neq \{0\}$ il existe un cycle σ tel que $\int_\sigma \omega = 1/c$. Alors $1 \in P_{c\omega}$ et donc, en vertu de (9) : $\mathcal{R}_\omega \subset P_{c\omega}$. Puisque $P_{c\omega}$ est dénombrable, il en est de même de $\mathcal{R}_\omega$. ■

[1] Nous conviendrons de dire que le groupe des rapports de similitudes est trivial lorsqu'il est au mieux égal à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Cette proposition implique en particulier que si le sous-groupe des rapports positifs de similitudes est la demi-droite $]0,\infty[$ toute entière alors ω est exacte. Attention, ω non exacte n'implique pas que le sous-groupe des rapports positifs de similitudes soit la demi-droite toute entière. Il suffit de considérer la forme symplectique $\omega = \mathrm{surf} \oplus \mathrm{surf}$ sur $S^2 \times S^2$ privé de la diagonale, où surf est la forme volume canonique. Elle est exacte (elle s'annule sur le générateur du H_2 qui est l'anti-diagonale) et de volume fini, on a donc à la fois ω exacte et $\mathcal{R}_\omega = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Cette variété n'est autre que le tangent de la sphère S^2, munie d'une formes symplectique exacte et de volume fini. Cela signifie entre autre qu'aucun champs de Liouville (similitude infinitésimale) n'est complet. Il serait peut-être intéresant de construire un exemple de variété symplectique (exacte) dont le groupe des rapports positifs de similitudes ne soit pas la demi-droite entière sans toutefois être dénombrable ?

On peut montrer de façon générale que :

Proposition **2.3** *Soit (X, ω) une variété symplectique non exacte. Deux similitudes homotopes à travers $\mathrm{C}^\infty(X)$ ont mêmes rapports.*

Démonstration Soit φ une homotopie à travers $\mathrm{C}^\infty(X)$ entre deux simililitudes φ_0 et φ_1 de rapports k_0 et k_1. La 1-forme α définie sur X par intégration :

$$\alpha_x(\xi) = \int_0^1 \omega(\dot\gamma_x(t), d\varphi_t(\xi))\, dt, \quad \text{où} \quad \gamma_x(t) = \varphi_t(x),$$

vérifie $\varphi_1^*\omega = \varphi_0^*\omega + d\alpha$, c'est à dire $(k_1 - k_0)\omega = d\alpha$, et donc, puisque ω n'est pas exacte, $k_1 = k_0$ et $d\alpha = 0$. ■

La nature des deux cas, ω exacte ou non, est donc qualitativement différente, dans le premier cas c'est plutôt un problème d'analyse : complétude de champs de Liouville (similitudes infinitésimales), dans le second c'est d'abord un problème d'algèbre. Nous nous intéressons ici au cas pour lesquels ω n'est pas exacte, et plus particulièrement lorsque son groupe des périodes est de type fini. Pour cela nous avons besoin d'un certain nombre de constructions algébriques (voir aussi [BC67]).

3 Constructions algébriques

On appelle *stabilisateur* d'un $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel E de $\mathbf{R}$, tout nombre réel k tel que $kE \subset E$. On note K, l'anneau des stabilisateurs de E :

$$K = \{k \in \mathbf{R} \mid kE \subset E\} \tag{10}$$

Proposition **3.1** *Soit E un $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$, de dimension finie $n = [E : \mathbf{Q}]$. Son anneau K des stabilisateurs est une extension finie de $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire un corps de nombres algébriques. De plus, E est un K-espace vectoriel, son degré $p = [K : \mathbf{Q}]$ divise n, et $\dim_K E = n/p$.*

Démonstration Il suffit de montrer que si $k \in K$ et $k \neq 0$, alors $1/k \in K$. La multiplication par k est une application linéaire de E dont le noyau est réduit à $\{0\}$, elle est injective. Puisque E est de dimension finie, elle est surjective : pour tout $y \in E$ il existe $x \in E$ tel que $kx = y$, c'est-à-dire $x = y/k$. Le nombre $1/k$ est donc un stabilisateur de E. D'autre part, K est une sous-algèbre de $\mathrm{L}(E)$, donc de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, comme $\mathbf{Q} \subset K$, K est une extension finie de $\mathbf{Q}$. Enfin, l'espace E est naturellement un K-module, c'est donc un K-espace vectoriel, on a donc $\dim_{\mathbf{Q}} E = \dim_{\mathbf{Q}} K \times \dim_K E$. ■

Considérons maintenant un réseau $P \subset E$, c'est-à-dire un sous-groupe additif de E tel que $P \otimes \mathbf{Q} = E$. Son anneau des stabilisateurs :

$$A = \{k \in \mathbf{R} \mid kP \subset P\} \tag{11}$$

est évidemment un sous-anneau du corps K. De plus :

Proposition **3.2** *Soit E un $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$ de dimension finie et $P \subset E$ un réseau. L'anneau A des stabilisateurs de P est un ordre du corps K des stabilisateurs de E. En d'autres termes : $E = P \otimes \mathbf{Q} \Rightarrow K = A \otimes \mathbf{Q}$.*

Démonstration Soit $w = (w_1, \ldots, w_n)$ une $\mathbf{Z}$-base de P, c'est-à-dire une $\mathbf{Q}$-base de $E = P \otimes \mathbf{Q}$ telle que $w(\mathbf{Z}^n) = P$. Soit M la matrice représentant la multiplication par $k \in K$ dans la base w, elle peut s'écrire $M = M'/l$ où l est le plus petit commun multiple des coefficients de M, et $M' \in \mathrm{L}_n(\mathbf{Z})$. Pour tout $p \in P$ on a donc $lkp \in P$ c'est-à-dire $lk \in A$ ou encore $k \in A \otimes \mathbf{Q}$. ■

Nous noterons par la suite U le groupe des unités de l'ordre A, c'est-à-dire le sous groupe des éléments de A, inversibles dans A :

$$U = \{u \in A \mid 1/u \in A\}. \tag{12}$$

Rappelons que sa structure est donnée par le théorème de Dirichlet :

$$U \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^{r+s-1}, \tag{13}$$

où r est le nombre de places réelles de K et $2s$ le nombre de ses places complexes. C'est-à-dire, les nombre de racines réelles et complexes du polynôme caractéristique d'un élément primitif de K.

Il sera commode, pour la suite, de réaliser matriciellement le corps K des stabilisateurs de E, l'ordre A des stabilisateurs de P et le groupe des unités U de A.

Soit $w = (w_1, \ldots, w_n)$ une $\mathbf{Z}$-base de P que nous considèrerons aussi bien comme un ensemble de n nombres réels (indépendants sur $\mathbf{Q}$), que comme un isomorphisme linéaire de $\mathbf{Q}^n$ sur E. Soit $k \in K$, et $M \in \mathrm{L}_n(\mathbf{Q})$ la matrice de la multiplication par k dans la base w. Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "k"] & E \\ \mathbf{Q}^n \arrow[u, "w"] \arrow[r, "M"'] & \mathbf{Q}^n \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}$$

se traduit par :

$$M = w^{-1} \circ k \circ w \quad \Leftrightarrow \quad wM = kw. \tag{14}$$

Autrement dit, la matrice de la multiplication par k appartient à l'algèbre des matrices qui ont w comme (co-)vecteur propre, soit :

$$\mathcal{M}_K = \{M \in \mathrm{L}_n(\mathbf{Q}) \mid \exists k \in \mathbf{R} : wM = kw\}. \tag{15}$$

L'homomorphisme d'algèbre :

$$\chi_w : \mathcal{M}_K \to K \quad \text{tel que} \quad \chi_w(M) = k \Leftrightarrow wM = kw, \tag{16}$$

est un isomorphisme, puisque les coefficients de w sont indépendants sur $\mathbf{Q}$. Ainsi $\mathcal{M}_K \simeq K$, autrement dit $\mathcal{M}_K$ est la réalisation matricielle du corps K dans la base w.

Introduisons alors les sous-algèbres $\mathcal{M}_P$ et $\mathcal{M}_P^\times$:

$$\mathcal{M}_P = \mathcal{M}_K \cap \mathrm{L}_n(\mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_P^\times = \mathcal{M}_K \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}). \tag{17}$$

Elles représentent respectivement, dans la base w, l'ordre A des stabilisateurs de P et son groupe des unités U :

$$A \simeq \mathcal{M}_P \quad \text{et} \quad U \simeq \mathcal{M}_P^\times. \tag{18}$$

4 Nature algébrique des rapports de similitudes d'une variété symplectique

Soit (X, ω) une variété symplectique, et P_ω son groupe des périodes. Soit E_ω le sous-espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ engendré par P_ω :

$$E_\omega = P_\omega \otimes \mathbf{Q}, \tag{19}$$

nous noterons K_ω l'anneau des stabilisateurs de E_ω, A_ω le sous-anneau des stabilisateurs de P_ω et U_ω le groupe des unités de A_ω.

Proposition **4.1** *Soit (X, ω) une variété symplectique dont le groupe des périodes P_ω est non nul et de type fini. Le groupe $\mathcal{R}_\omega$ des rapports de similitudes de ω est un sous-groupe des unités U_ω de l'ordre A_ω des stabilisateurs de P_ω.*

Démonstration Nous avons vu que le groupe $\mathcal{R}_\omega$ agit multiplicativement sur P_ω (9). Donc, pour tout $k \in \mathcal{R}_\omega$: $kP_\omega \subset P_\omega$, d'où $\mathcal{R}_\omega \subset A_\omega$. Mais, comme φ est inversible $1/k \in A_\omega$ et donc $\mathcal{R}_\omega \subset U_\omega$. ■

Comme conséquence élémentaire de cette proposition, on peut déduire par exemple :

- si ω est entière ($P_\omega \simeq \mathbf{Z}$) son groupe des similitudes est trivial, en effet E_ω est dans ce cas isomorphe à $\mathbf{Q}$ ce qui entraine $A_\omega = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

- Si le groupe des périodes P_ω est engendré par 1 et θ, où θ est un nombre transcendant, ou même algébrique de degré plus grand que 2, le groupe des rapports de similitudes de ω est aussi trivial puisqu'on a encore, $E_\omega \simeq \mathbf{Q}$.
- Si $\theta = \sqrt{2}$ alors $\mathcal{R}_\omega$ peut être non-trivial, ce sera alors un sous-groupe des puissances de $1+\sqrt{2}$.

Comme nous allons le voir maintenant, il est possible de réaliser tout groupe du type $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^m$ comme le groupe des rapports de similitudes d'une variété symplectique.

5 Variété symplectique dont le groupe des rapports de similitudes est donné

Soit V une variété sur laquelle est définie une 2-forme fermée ε. Bien que ε ne soit pas symplectique *a priori*, il est toujours possible de définir son groupe des similitudes $\mathcal{S}_\varepsilon$ et son groupe des rapports de similitudes $\mathcal{R}_\varepsilon$.

Relevons l'action de $\mathcal{S}_\varepsilon$ sur le cotangent T^*V, en composant le relevé ordinaire de φ par la dilatation le long des fibres, de rapport $\chi(\varphi)$:

$$\varphi \in \mathcal{S}_\varepsilon, \quad (q,p) \in T^*V \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varphi}(q,p) = (\varphi(q), \chi(\varphi)\varphi_*(p)). \tag{20}$$

La 2-forme ω, définie sur T^*V par :

$$\omega = dp \wedge dq + \pi^*\varepsilon, \tag{21}$$

est symplectique ; où $dp \wedge dq$ désigne la forme de Liouville, et π la projection du cotangent sur sa base. On vérifie immédiatement que $\mathcal{R}_\varepsilon \subset \mathcal{R}_\omega$.

Nous allons appliquer cette méthode pour réaliser tout groupe d'unités d'un corps de nombres algébriques, comme le groupe des rapports de similitudes d'une variété symplectique. La construction qui suit est le fruit de discussions avec Alexandre Givental, que je remercie tout particulièrement pour cela.

Soit $P \subset \mathbf{R}$ un sous-groupe de type fini, $n = [P : \mathbf{Z}]$, et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ une de ses bases. Soit ϵ la deux-forme sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ définie, au point (t, x), par :

$$\epsilon = dt \wedge w(dx) \quad \text{avec} \quad w(dx) = \sum_{i=1}^{n} w_i dx^i. \tag{22}$$

Elle est invariante par les translations entières. Elle définit donc, sur le tore $T \times T^n = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)/(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^n)$, une deux-forme fermée ε dont le groupe des périodes est justement P.

$$P_\varepsilon = P = w(\mathbf{Z}^n). \tag{23}$$

Soit $E = P \otimes \mathbf{Q}$, K le corps des stabilisateurs de E, A l'ordre des stabilisateurs de P et U le groupe des unités de A.

Soit $\mathcal{M}_P$ l'algèbre des matrices, isomorphe à l'ordre A des stabilisateurs de P, défini par (17). Relevons trivialement sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ l'action de toute matrice $M \in \mathcal{M}_P$, soit :

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Puisque $\tilde{M}$ est à coefficients entiers, elle définit un difféomorphisme φ_M du tore $T \times T^n$. Mais $\tilde{M}^* \epsilon = dt \wedge w(Mdx)$, d'où l'on déduit :

$$M \in \mathcal{M}_P \quad \Rightarrow \quad \tilde{M}^* \varepsilon = \chi_w(M) \varepsilon. \tag{25}$$

En choisissant $V = T \times T^n$, et en appliquant la construction précédente, on obtient :

$$P_\omega = P \quad \text{et} \quad M \in \mathcal{M}_P \quad \Rightarrow \quad \varphi_M^* \omega = \chi_w(M) \omega. \tag{26}$$

En particulier le groupe des rapports de similitudes de ω est exactement le groupe des unités de l'ordre des stabilisateurs de P. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Proposition **5.1** *Soit $P \subset \mathbf{R}$ un sous-groupe de type fini, $n = [P : \mathbf{Z}]$, et U le groupe des unités de son ordre des stabilisateurs. Il existe sur le cotangent du tore $T \times T^n$ une forme symplectique ω telle que $P_\omega = P$ et $\mathcal{R}_\omega = U$.*

De cette façon tout groupe d'unités d'un corps de nombres algébriques, donc du type $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^m$, peut être réalisé comme le groupe des rapports de similitudes d'une variété symplectique.

La construction précédente constitue une sorte de linéarisation (homologique) des variétés symplectique de groupe de périodes donné.

Remarque 5.2 Il est possible, dans certains cas, d'améliorer cette construction. Considérons par exemple le groupe $P = \mathbf{Z}(\sqrt{d})$ et $w = (1\ \sqrt{d})$. Désignons par $\bar{w}$ le composé de w par l'automorphisme non trivial de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$: $\bar{w}(x_1, x_2) = x_1 - x_2\sqrt{d}$. La 2-forme $\epsilon = dt \wedge w(dx) + ds \wedge \bar{w}(dx)$, définie sur $\mathbf{R}^4$ est symplectique. Faisons agir $M \in \mathcal{M}_P$ sur $\mathbf{R}^4$: trivialement sur t, en multipliant par $\chi_w(M)/\bar{\chi}_w(M)$ sur s, et naturellement sur x. Cette action dilate la forme ϵ du rapport $\chi(M)$. La forme symplectique ϵ et l'action de $\mathcal{M}_P$, ainsi définie, passent au quotient $T \times \mathbf{R} \times T^2$. La forme symplectique ω ainsi obtenue a comme groupe des périodes P, et comme groupe des rapports de similitudes l'ordre des stabilisateurs de P. Pour les corps quadratiques, le modèle minimal est donc la variété de dimension 4 : $T^3 \times \mathbf{R}$. ▶

6 Obstructions algébriques supérieures

Considérons les groupes de similitudes des puissances extérieures d'une forme symplectique ω définie sur une variété X de dimension $2n$. Notons :

$$\mathcal{S}^m_\omega = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(X) \mid \varphi^*\omega^m = k\omega^m\}, \tag{27}$$

où ω^m désigne la m-ème puissance extérieure de ω et $1 \leq m \leq n$. Nous avons vu (proposition 2.1) que pour tout $m < n$ les rapports de similitudes sont nécessairement constants sur X.

Soit χ^m_ω les homomorphismes de $\mathcal{S}^m_\omega$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R} - \{0\}$, qui associe à toute similitude son rapport :

$$\chi^m_\omega(\varphi) = k \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*\omega^m = k\omega^m. \tag{28}$$

Nous noterons $\mathcal{R}^m_\omega$ les groupes des rapports de similitudes ainsi construits, c'est-à-dire les images de ces homomorphismes :

$$\mathcal{R}^m_\omega = \chi^m_\omega(\mathcal{S}^m_\omega). \tag{29}$$

Toute similitude de ω est en particulier une similitude de ω^m, autrement dit :

$$\mathcal{S}_\omega \subset \mathcal{S}^m_\omega \quad \text{et} \quad \chi^m_\omega \mid \mathcal{S}_\omega = (\chi_\omega)^m. \tag{30}$$

Nous avons donc une série d'homomorphismes de $\mathcal{R}_\omega$ dans $\mathcal{R}^m_\omega$, pour $1 \leq m \leq n$, qui restreints aux similitudes positives sont injectifs :

$$p^m : \mathcal{R}_\omega \to \mathcal{R}^m_\omega \quad \text{tel que} \quad p^m(k) = k^m. \tag{31}$$

Soit P^m_ω le groupe des périodes de ω^m :

$$P^m_\omega = \{\int_\sigma \omega^m \mid \sigma \in H_{2m}(X, \mathbf{Z})\}. \tag{32}$$

Notons A^m_ω l'anneau des stabilisateurs de P^m_ω et U^m_ω son groupe des unités. La proposition (4.1) se généralise facilement à la suivante :

Proposition **6.1** *Soit (X, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Supposons que les groupes des périodes des puissances extérieures m-ème de ω, $1 \leq m \leq n$, soient de type fini. Alors le groupe des rapports de similitudes positifs $\mathcal{R}^+_\omega$ s'injecte dans chacun des groupes des unités U^m_ω des ordre des stabilisateurs des groupes des périodes P^m_ω.*

Cela implique en particulier que si, pour un certain $m \in \{1, \ldots, n\}$, le groupe des périodes est entier : $P^m_\omega \simeq \mathbf{Z}$, alors le groupe des rapports de similitudes est trivial.

L'obstruction évidente : X compacte, est donc un cas particulier de cette série d'obstructions algébriques que l'on peut énoncer sous forme de proposition.

Proposition **6.2** *Pour que ω ait un groupe de rapports de similitudes non trivial, il est nécessaire (mais pas suffisant) qu'à partir d'un certain rang m, $2 \leq m \leq n$, le groupe des périodes de ω^m soit nul, c'est-à-dire ω^m exacte.*

C'est le cas, avec $m = 2$, dans l'exemple construit au paragraphe précédent.

7 Conclusion

On a exhibé une série d'obstructions algébriques à l'existence de similitudes d'une variété symplectique, en lisant leur action en homologie. C'est la partie la plus simple de l'analyse de ce groupe. On peut légitimement se demander, si les variétés ayant un groupe de rapports de similitudes donné, sont beaucoup plus compliquées que l'exemple que nous avons construit. Par exemple :

1. peut on trouver une variété symplectique dont l'homologie, en degré 2, soit engendrée par d'autres types de cycles que des tores, et qui admette un groupe de similitudes non trivial (avec un groupe de périodes de type fini) ?

2. En quoi les modèles que nous avons donnés sont ils mininmaux ? ou encore

3. trouver toutes les variétés symplectique de dimension 4 dont le groupe des rapports de similitudes est $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$.

Voilà certaines questions, peut-être difficiles, qui mériteraient d'être étudiées.

Remerciements Je suis heureux de remercier, pour leurs suggestions multiples et pertinentes : E. Ghys, E. Giroux, A. Givental et F. Laudenbach.

Bibliographie

[BC67] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch. *Théorie des nombres.* Monographies Internationales de mathématiques Modernes. Gauthier-Villars, Paris, 1967.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées[2]
École normale supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 9

[2]Unité Mixte de Recherche 128 du CNRS.