A propos de géodésiques

Patrick Iglesias

Introduction

Comme son titre l'indique cet article traite de géodésiques. Il en présente quelques aspects, de la définition à une application sur la courbure moyenne des courbes planes, en passant par l'exposé de quelques exemples simples. Il est difficile d'être original sur un sujet aussi fréquenté, le lecteur reconnaitra peut-être l'influence d'ouvrages classiques de géométrie riemannienne dont il peut toujours approfondir la lecture pour en savoir davantage [BG72] [Car76] [Hel62] [GHL90] [Sto69] [Car30] [Dar15] etc.

Les mouvements d'un point matériel libre

Nous avons tous appris, lycéens, que le mouvement d'un point matériel libre dans l'espace est *rectiligne* et *uniforme*. Je n'ai pas le souvenir que l'un de nous, potaches bien sages, n'ait eu le reflexe de demander au professeur quelle était cette étrange liberté qui obligeait ce point matériel à ne se mouvoir que le long de droites et qui plus est à vitesse constante. Moi, si j'étais point matériel libre je choisirais des cercles, des paraboles, toutes sortes d'hélices ou pourquoi pas une courbe de Péano. Mais il faut bien se rendre à l'évidence : le point matériel, même si le professeur le dit libre, est soumis à la loi, cette loi de Newton que l'on écrivait $F = m\gamma$. Faut il rappeler que γ désigne l'accélération d^2x/dt^2 du point x, que m est une constante propre au corps : sa masse (choisie le plus souvent égale à 1), et que le plus mystérieux ingrédient de cette formule, la *résultante des forces appliquées* F, est une fonction du temps t de la position x et de la vitesse v.

Quand notre professeur nous disait que le point matériel était libre, il ne voulait pas dire qu'il s'était libéré des lois de la mécanique, mais simplement qu'il n'était soumis à aucune force extérieure, autrement dit que F était nulle. Ce qu'il disait d'ailleurs aussi en ces termes : le point matériel libre n'est soumis qu'à le seule force de l'inertie ; la perversion des mots !

La situation du point matériel libre dans l'espace est donc bien simple, ses mouvement sont des droites $t \mapsto x + vt$, où x est un point de $\mathbf{R}^3$ considéré comme espace affine, et v un vecteur de $\mathbf{R}^3$ considéré comme l'espace tangent à x. L'espace de ses mouvements est donc équivalent à celui de ses conditions initiales à un instant donné ($t = 0$), c'est-à-dire à $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. Mais cette identification, bien qu'usuelle, n'a rien de naturel ou d'obligatoire ; nous aurions pu choisir les vecteurs $l = v \wedge r$ et v. Cet espace des mouvements que nous venons de décrire est l'*espace des droites paramétrées* de $\mathbf{R}^3$.

Après le point libre dans l'espace, vient l'étude du point libre sur une surface Σ. Là encore la liberté est illusoire, le point n'est plus seulement soumis aux lois de la mécanique mais il est en plus contraint à se mouvoir sur Σ, sans la quitter. S'il était libre à chaque instant il prendrait la tangente et, à moins que Σ ne soit un plan, aurait toute les chances de s'échapper. Mais une force le maintient sur la surface, encore plus mystérieuse que la précédente, la force de liaison. Pour comprendre la nature de cette force décomposons la résultante F des forces en présence tangentiellement et normalement à la surface Σ : $F = F_T + F_N$. Les lois de la mécanique s'écrivent toujours $F = m\gamma$, qui devient $F_N + F_T = m\gamma_N + m\gamma_T$. Si le point matériel est libre, c'est-à-dire soumis aux seules forces d'inertie et de liaison, c'est que $F_T = 0$ et donc $\gamma_T = 0$. Autrement dit, l'équation d'un point matériel libre sur une surface se résume à

$$\gamma_T = 0.$$

Pour comprendre cette équation et éventuellement la résoudre, introduisons le projecteur P, orthogonal au plan tangent à la surface au point x. L'application $x \mapsto P$, définie sur Σ et à valeurs dans $\mathrm{L}(\mathbf{R}^3)$, est différentiable. Si v représente la vitesse du point matériel x alors $Pv = v$, d'où l'on déduit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dP}{dt}(v).$$

Ce sont les équations cherchées du mouvement, et comme on aurait pu le constater immédiatement il a lieu à vitesse constante (en norme bien sûr).

Détaillons davantage cette dernière expression. Nous pouvons, en orientant localement la surface par un vecteur normal unitaire n, écrire $P = \mathrm{Id} - n\bar{n}$ (où $\bar{n}$ représente le vecteur transposé de n). Comme chacun le sait, il n'est pas toujours possible d'orienter globalement une surface (il n'y a qu'a penser au ruban de Möbius), mais P est bien défini par cette écriture locale. Soit dn l'application linéaire tangente de l'application de Gauss $x \mapsto n$ et

$$\Phi : (v, w) \mapsto \langle dn(v), w\rangle,$$

la *seconde forme fondamentale* de la surface Σ. En décrivant localement Σ comme la surface de niveau d'une fonction différentiable régulière φ, le lecteur peut vérifier que Φ est symétrique (n est choisi comme le vecteur unitaire $\operatorname{grad}\varphi/\|\operatorname{grad}\varphi\|$). Les équations du point matériel deviennent alors :

$$\frac{dv}{dt} + \Phi(v,v)n = 0.$$

Pour comprendre le rôle de la deuxième forme fondamentale dans cette équation, introduisons Π, le plan osculateur à la trajectoire au point x, et k la courbure en ce point de la courbe $\Pi \cap \Sigma$. Alors $\Phi(v,v) = \|v\|^2 k$: un point qui décrirait la courbe planaire $\Sigma \cap \Pi$ à vitesse constante $\|v\|$ aurait la même accélération $\gamma = -\|v\|^2 kn$ au point x, ce qui nous donne par la même occasion, l'expression de la force de liaison évoquée plus haut.

Les équations que nous venons de décrire s'appellent *équations des géodésiques* et leurs solutions les *géodésiques* de la surface Σ.

Remarque. Commentons à la manière des mécaniciens l'équation des géodésiques de la surface Σ : le point libre a naturellement tendance à aller tout droit ; pour le contraindre à suivre Σ il faut lui appliquer une force orthogonale à la surface d'autant plus intense que la courbure est grande, puisque c'est aux points de grande courbure que la tangente s'éloigne le plus vite de la surface.

Exemple. Ces équations des géodésiques sont généralement compliquées sauf si la surface est suffisamment simple comme un plan ou la sphère unité par exemple. Dans le premier cas la courbure est nulle et les géodésiques sont les droites du plan. Dans le deuxième cas on peut choisir $n = x$ et donc les équations se réduisent à $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$, où $\omega = \|v\|$, qui s'intègre par $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + u_0 \sin(\omega t)$ où $\|u_0\| = 1$ et $\langle x_0, u_0\rangle = 0$. Les géodésiques de la sphère sont donc les grands cercles parcourus à vitesse constante. Il est dommage de résoudre ces équations par des méthodes aussi brutales alors que les symétries abondantes dans ces deux exemples nous permettraient de les obtenir de façon plus élégante, comme nous le verrons plus loin.

Les points critiques de la longueur

La propriété la plus remarquable des courbes géodésiques est qu'elles sont critiques pour la longueur d'arc. J'ignore qui le premier a remarqué ce fait mais on peut en trouver un exposé détaillé dans le traité de *Mécanique Analytique* de Lagrange [Lag65, tome II] publié en 1811.

Considérons une courbe c de la surface Σ. La longueur de cette courbe entre deux points a et b est donnée par

$$l = \int_a^b ds,$$

où s est le paramètre naturel de c (sa longueur d'arc).

Définition. *La courbe c est dite* critique *ou* stationnaire *pour la longueur si pour tout couple de points a et b sur c et toute famille à un paramètre différentiable d'arcs c_α joignant a à b telle que $c_0 = c$, on a :*

$$\delta l = 0 \quad \textit{avec} \quad \delta l = \left.\frac{\partial l_\alpha}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0},$$

où l_α est la longueur de c_α entre a et b.

Soit $t \mapsto x_\alpha$ un paramétrage de la courbe c_α passant par a et b aux temps 0 et 1, alors $l_\alpha = \int_0^1 \|v_\alpha\|\, dt$ où v_α désigne la vitesse de la courbe paramétrée au point x_α. En dérivant sous le signe somme, en utilisant la commutativité des dérivées partielles par rapport à t et α, et après une intégration par partie il vient :

$$\delta l = -\int_0^1 \langle \frac{du}{dt}, \delta x\rangle\, dt \text{ où } \delta x = \left.\frac{\partial x_\alpha}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \text{ et } u = \frac{v}{\|v\|}.$$

Notons que l'application δx définie sur le segment $[0,1]$ prend ses valeurs dans l'espace tangent à la surface Σ, considéré comme une sous-variété de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$.

D'après le lemme fondamental du calcul des variations cette dernière équation signifie que pour tout vecteur δx tangent en $x \in c$ à la surface Σ, $\langle du/dt, \delta x\rangle = 0$. Si on traduit $\delta x \in T_x\Sigma$ par : $\langle n, \delta x\rangle = 0$, où n est le vecteur normal à la surface au point x, cette condition devient :

$$\forall \delta x, \quad \langle n, \delta x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \frac{du}{dt}, \delta x\rangle = 0.$$

En utilisant le multiplicateur de Lagrange associé à cette condition[1] on obtient en définitive :

$$\frac{du}{dt} = -kn, \quad k = \langle \frac{dn}{dt}, u\rangle.$$

Autrement dit, l'accélération est normale à la surface, c'est l'équation d'une géodésique comme nous l'avons introduite dans le paragraphe précédent. On obtient ainsi le théorème bien connu :

[1] $\ker C \subset \ker A \Rightarrow \exists B : A = BC$; A, B et C sont des opérateurs linéaires et B est appelé un multiplicateur de Lagrange.

Théorème. *Une courbe c d'une surface $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ est géodésique si et seulement si elle est critique pour la longueur entre deux quelconques de ses points.*

Exemple. Revenons sur l'exemple de la sphère, on peut remarquer que le vecteur $J = u \wedge x$ est conservé le long de la géodésique, c'est-à-dire $dJ/dt = 0$. En effet l'équation des géodésiques est $du/dt = -x$, ici $k = 1$, d'où on déduit que $dJ/dt = du/dt \wedge x + u \wedge dx/dt = -x \wedge x + u \wedge u = 0$. La géodésique est donc contenue entièrement dans le plan orthogonal à J, qui peut être déterminé par une condition initiale (x_0, u_0). Les géodésiques de la sphère sont donc les grands cercles parcourus à vitesse constante.

Les géodésiques d'une variété

Grâce au théorème précédent, il est possible de généraliser la notion de géodésique aux espaces (variétés) sur lesquelles nous savons définir une longueur, en particulier sur les variétés riemanniennes. Sans vouloir détailler la définition d'une variété disons seulement qu'une structure de variété sur un ensemble X est donnée par une famille de *cartes locales* (des injections) qui permettent de repérer tous les points de X par des nombres, leurs coordonnées, de telle sorte que le changement de coordonnées (entre deux cartes) soit différentiable. Nous renvoyons aux ouvrages classiques pour ce qui est de la définition des vecteurs tangents, espace tangents, application tangentes etc. Mais le lecteur effrayé par ce vocabulaire peut imaginer sans dommage un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Comme pour les surfaces (voir l'article de S. Grognet dans ce journal), une métrique riemannienne sur X est la donnée en chaque point $x \in X$ d'un produit scalaire g (forme bilinéaire, symétrique, non dégénéré), défini sur l'espace tangent, dont les composantes sont des fonctions différentiables de x. La longueur d'une courbe c de X entre deux points a et b est définie par l'intégrale :

$$l = \int_0^1 \sqrt{g(v,v)}\; dt,$$

où $t \mapsto x$ est un paramétrage de la courbe c passant par a et b en $t = 0$ et $t = 1$, et $v \in T_xX$ est la vitesse du point x c'est-à-dire dx/dt. Si on cherche, comme précédemment, les courbes c critiques pour la longueur on est conduit à différentier la longueur l relativement à un paramètre de variation α. On choisit une carte locale définie sur un voisinage d'un point x de la courbe c. Soit x^i les coordonnées de x dans cette carte et g_{ij} celles de la métrique g. Les g_{ij} sont, par hypothèse, des fonctions différentiables des coordonnées x^i, l'indice i variant de 1 à la dimension n de X. Toujours par hypothèse, la matrice (g_{ij}) (appelée *matrice de Gramm* de g) est symétrique et non dégénérée. La longueur du morceau de courbe entre t_0 et t_1 peut s'écrire en termes de ces coordonnées :

$$l[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} [\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i v^j]^{1/2} dt,$$

où les v^i sont les coordonnées de la vitesse c'est-à-dire dx^i/dt. On omet le plus souvent le signe de sommation des indices lorsque ils sont répétés (convention d'Einstein).

Le calcul de la *variation première* de la longueur est pénible (surtout lorsqu'on le fait pour la première fois) car il ne faut oublier aucun terme, en particulier les dérivées des coefficients g_{ij} qui sont, rappelons le, fonctions des coordonnées x^i (faut-il louer ou honnir Descartes ?). Mais ce calcul peut nous aider à comprendre la notion de *dérivée covariante* importante dans l'étude des géodésiques (et plus généralement des variétés riemanniennes).

En utilisant les mêmes méthodes que pour le cas d'une surface plongée (intégration par partie, commutation des dérivées partielles etc.), et en supposant que les arcs c_α restent dans le domaine de la carte au moins sur un petit voisinage de $\alpha = 0$, on obtient l'expression suivante de la variation δl de la longueur :

$$\int_0^1 g_{nk} \delta x^n \left[\frac{du^k}{dt} - \frac{1}{2} g^{km} (\partial_m g_{ij} - 2\partial_i g_{mj}) u^i v^j \right] dt.$$

La lettre u désigne le vecteur unitaire tangent à la courbe et v la vitesse du paramétrage.

Quelle expression horrible ! Et comment reconnaître quoi que ce soit de géométrique la dessous ? En introduisant les *symboles de Christoffel*[2] :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} [\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}],$$

le lecteur pourra vérifier que les fonctions

$$\nabla_v u^k = \frac{du^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} u^i v^j,$$

sont les coordonnées d'un vecteur bien défini dans l'espace tangent au point x, c'est-à-dire qu'il se tranforme comme il sied à un vecteur sous un changement de

[2] Ce sont les formes polaires, par rapport aux indices i, j, des expressions $g^{km}(2\partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij})/2$ intervenant dans l'expression de δl.

coordonnées. Pour tout ce qui concerne cet art calculatoire, consulter par exemple le livre de Denis-Papin et Kaufmann [DPK66], ou pour les aspects plus fondamentaux le bel ouvrage de E. Cartan [Car30] sur la géométrie des espaces de Riemann.

De façon générale, si u et v désignent deux vecteurs quelconques tangents en x, l'expression ci-dessus définit bien un nouveau vecteur noté $\nabla_v u$, appelé *dérivée covariante* de u par v. L'application $(u, v) \mapsto \nabla_u v$ est bilinéaire en u et v. Cela nous permet de donner enfin une expression plus géométrique et plus agréable de la variation première de la longueur :

$$\delta l = -\int_0^1 g(\nabla_v u, \delta x)\ dt.$$

Les équations des géodésiques s'écrivent ainsi :

$$\nabla_u u = 0.$$

Le vecteur $\nabla_u u$ est appelé *accélération géodésique* de la courbe c au point x, les géodésiques (points critiques de la longueur) sont donc les courbes d'accélération géodésique nulle, parcourues à vitesse constante. Ce que nous pouvons énoncer sous la forme du théorème classique suivant :

Théorème. *Une courbe c d'une variété riemannienne est critique pour la longueur si et seulement si son accélération géodésique est nulle en tout point.*

Nous allons voir maintenant que ce théorème n'est pas vide, de telles courbes existent.

Le flot géodésique

Revenons au cas d'une surface Σ plongée dans $\mathbf{R}^3$, et munie de la métrique induite. Nous avons vu que les géodésiques de Σ sont les solutions d'un système différentiel du second ordre sur Σ. Mais tout système différentiel du second ordre sur Σ se traduit par un système différentiel du premier ordre sur son espace tangent, en l'occurence :

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} + \Phi(v, v)n = 0.$$

L'espace tangent $T\Sigma$ est la sous-variété de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ définie par :

$$T\Sigma = \{(x, v) \mid x \in \Sigma \text{ et } \langle v, n\rangle = 0\}.$$

La recherche de géodésiques sur Σ se ramène donc à la recherche des courbes intégrales du champ de vecteurs :

$$\xi(x, v) = (v, -\Phi(v, v)n).$$

En appliquant alors le théorème de Cauchy d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle ordinaire, on constate que toute condition initiale (t_0, x_0, v_0) définit une solution unique $t \mapsto (x, v)$ passant par (x_0, v_0) à l'instant t_0. Ces solutions sont appelées *géodésiques paramétrées* par opposition aux *géodésiques non paramétrées* ou *trajectoires géodésiques* qui en sont les images (courbes immergées) sur la surface Σ. Les géodésiques existent, et il y en a beaucoup.

Essayons de mettre un peu d'ordre dans le vocabulaire utilisé, car nous voulons parler de l'espace des géodésiques.

Proposition. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{G}}_\Sigma$ des géodésiques paramétrées de la surface Σ est naturellement une variété différentiable de dimension* 4.

Démonstration. En effet, soit F_t l'application qui associe à toute condition initiale (x, v) l'unique géodésique c passant par x à l'instant t avec la vitesse v, c'est une injection de $T\Sigma$ dans $\tilde{\mathcal{G}}_\Sigma$. Soient t et t' deux instants, l'application $F_{t'}^{-1} \circ F_t$ est définie sur un ouvert de $T\Sigma$ dans lui-même et associe au couple (x, v) le couple (x', v') position et vitesse de la géodésique c à l'instant t'. Cette application (ainsi que son inverse) est différentiable en vertu du théorème de différentiabilité des solutions d'équations différentielles par rapport aux conditions initiales. Les géodésiques paramétrées constituent donc bien une variété différentiable de dimension 4. ∎

Cette construction relativement formelle traduit l'affirmation usuelle selon laquelle toute solution d'une équation différentielle de degré n sur une variété de dimension m est entièrement définie par $n \times m$ constantes arbitraires, les constantes d'intégration (ici $n = m = 2$). Il faut noter que $\tilde{\mathcal{G}}_\Sigma$ peut ne pas être séparée, c'est le cas en particulier pour certaines variétés riemanniennes non complètes (*i.e.* lorsque le champ de vecteurs ξ évoqué plus haut n'est pas complet[3]). Par exemple, pour le plan privé d'un point les géodésiques qui aboutissent et qui emmergent de l'origine avec la même direction ont toujours dans leurs voisinages une droite parallèle qui évite l'origine.

Rappelons que nous nous avons appelé *trajectoire géodésique* l'arc géométrique de Σ associé à une géodésique paramétrée. C'est une sous-variété immergée de

[3] Rappelons qu'un champ de vecteurs est dit *complet* si son flot est défini pour tout t.

dimension 1, c'est à dire l'image, dans Σ, du cercle ou de la droite par une immersion. Nous introduirons maintenant l'espace $\mathcal{G}_\Sigma$ des géodésiques non paramétrées comme le quotient de la variété $\tilde{\mathcal{G}}_\Sigma$ par la relation d'équivalence suivante :

- deux géodésiques paramétrées c et c' sont équivalentes si elles ont la même trajectoire.

Pour construire ce quotient, nous procèderons en plusieurs étapes. Considérons l'instant $t = 0$, l'application de $T\Sigma$ dans $\mathcal{G}_\Sigma$ obtenue en composant F_0 avec la projection de $\tilde{\mathcal{G}}_\Sigma$ sur $\mathcal{G}_\Sigma$ est surjective, cela revient à décaler l'origine du temps. D'autre part, toute trajectoire géodésique parcourue à vitesse $\|v\|$ peut être parcourue à vitesse unité, il suffit de la reparamétrer par l'abscisse curviligne (la longueur d'arc). On est donc ramené au quotient du fibré unitaire tangent à Σ, noté $U\Sigma$:

$$U\Sigma = \{(x,u) \in T\Sigma \mid \|u\| = 1\},$$

par ce qu'il reste de la relation d'équivalence, c'est à dire :

- $(x,u) \sim (x',u')$ s'il existe un instant s tel que x' et u' soient la position et la vitesse, à l'instant s de l'unique géodésique passant par x en l'instant zéro avec la vitesse u.

Autrement dit : si (x,u) et (x',u') sont sur la même courbe intégrale de la restriction à $U\Sigma$ du champ de vecteur ξ. Le flot associé au champ de vecteurs ξ, défini sur $U\Sigma$ par $\xi(x,u) = (u, -kn)$, est appelé *flot géodésique* de la surface Σ. L'espace des géodésiques non paramétrées $\mathcal{G}_\Sigma$ est donc le quotient :

$$\mathcal{G}_\Sigma = U\Sigma/\xi.$$

Il faut préciser que cet espace n'est généralement pas une variété, ce n'est même pas un bon espace topologique, il hérite le plus souvent de la topologie grossière.

Le flot géodésique se généralise aux variétés riemanniennes (X,g), c'est un outil fondamental pour l'étude de leurs propriétés. Sa nature est complexe et son étude souvent difficile. Il est est défini sur le fibré tangent au fibré unitaire UX par un champ de vecteurs ξ analogue à celui des surfaces. On peut en donner une construction à partir de la *forme de Liouville* définie sur UX.

Soit c une courbe de X paramétrée par t et l sa longueur. Désignons par u le vecteur unitaire tangent orientant la courbe c, on a :

$$l = \int \bar{u}\frac{dx}{dt}\ dt,$$

où $\bar{u}$ désigne le transposé de u par la métrique g. En définissant la 1-forme différentielle λ sur le fibré unitaire tangent UX :

$$\lambda = \bar{u}dx,$$

c'est-à-dire $\lambda = \sum_{i=1}^n u_i dx^i$ dans une carte locale quelconque, la longueur l devient :

$$l = \int_c \lambda,$$

où c désigne maintenant le relevé $t \mapsto (x,u)$ de la courbe c dans UX. En appliquant la formule de Stokes, pour toute variation de la courbe c, on obtient :

$$\delta l = \int_c d\lambda(\delta x) + \lambda(\delta x)\ |_{\partial c}\ .$$

En particulier, si la variation $t \mapsto \delta x$ est nulle au bord de c (c'est l'hypothèse en calcul des variations) la courbe est géodésique si et seulement si son relevé dans UX est tangente, en tout point, au noyau de la 2-forme $d\lambda$. On peut montrer la proposition suivante :

Proposition. *Il existe un champ de vecteur ξ sur UX défini entièrement par les équations :*

$$\lambda(\xi) = 1 \quad \textit{et} \quad \xi \in \ker d\lambda.$$

Le flot qui lui est associé est appelé flot géodésique *de la variété riemannienne (X,g).*

On peut vérifier facilement que le noyau de $d\lambda$ est engendré par ξ, et donc que les géodésiques non paramétrées orientées s'identifie avec les courbes intégrales de ξ. Nous verrons une application de cette définition du flot géodésique au dernier paragraphe.

Remarque. Puisque $\ker\lambda \cap \ker d\lambda = \{0\}$ le fibré unitaire se trouve naturellement orienté. Si X est une surface, le volume est simplement le produit extérieur $\lambda \wedge d\lambda$. Notons au pasage que si l'espace des géodésiques $\mathcal{G}_X$ est une variété, la 2-forme $d\lambda$ se projette sur $\mathcal{G}_X$ en une 2-forme fermée non dégénérée ω, on dit que $\mathcal{G}_X$ est une *variété symplectique* (ω permet de définir un volume canonique).

Une dernière remarque avant de donner quelques exemples. L'espace des géodésiques non paramétrées que nous avons construit est celui des géodésiques orientées, en effet la condition initiale $(x,-u)$ et (x,u) définissent la même trajectoire géodésique parcourues suivant les deux orientaions différentes. Pour obtenir l'espace des géodésiques non orientées il convient de prendre encore le quotient par l'involution $(x,u) \mapsto (x,-u)$.

Quelques exemples

Comme nous l'avons dit, l'étude du flot géodésique est généralement difficile, mais comme nous allons le constater dans les quelques exemples qui suivent, elle se simplifie notablement en présence de symétries.

EXEMPLE. Le fibré unitaire tangent à la sphère S^2 est la sous variété de $S^2 \times S^2$ définie par :

$$US^2 = \{(x,u) \in S^2 \times S^2 \mid \langle x,u \rangle = 0\}.$$

Notons au passage que $US^2 \simeq SO(3)$, il suffit d'associer à (x,u) la matrice $A = [x\ u\ x \wedge u]$.

Le troisième vecteur de cette matrice est justement le moment cinétique J dont on sait qu'il est conservé le long de chaque géodésique. Comme x et u sont orthogonaux à J la géodésiques est contenue dans le plan orthogonal à J, c'est donc l'intersection de ce plan avec la sphère, les géodésiques de S^2 sont donc les grands cercles. Grâce au moment cinétique J, l'espace des géodésiques non paramétrées orientées de S^2 s'identifie à la sphère S^2 elle-même. L'espace des géodésiques non paramétrées et non orientées s'identifie au plan projectif réel P^2. Le lecteur pourra essayer de montrer que l'espace des géodésiques de la sphère $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ s'identifie avec le produit $S^2 \times S^2$ (il faut utiliser l'identification de S^3 avec le groupe spécial unitaire $SU(2)$). De façon générale l'espace des géodésiques de la sphère S^n est isomorphe à l'espace des 2-plans orientés de $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est une variété (de dimension $2n-2$) qui est appelée Grassmannienne des 2-plans.

EXEMPLE. Les géodésiques de l'espace $\mathbf{R}^2$ sont des droites, l'espace des droites orientées de $\mathbf{R}^2$ s'identifie à l'espace tangent au cercle S^1, c'est-à-dire au cylindre $S^1 \times \mathbf{R}$. En effet, le fibré unitaire de $\mathbf{R}^2$ est simplement le produit $\mathbf{R}^2 \times S^1$. Le flot géodésique s'écrit $\xi(x,u) = (u,0)$, deux conditions initiales (x,u) et (x',u') sont sur la même orbite du flot géodésique si $u' = u$ et si $x' = x + su$. Le vecteur u ainsi que la projection ortogonale $r = [\mathrm{Id} - u\bar{u}]x$ de x par rapport à u sont conservés ($\bar{u}$ désigne le transposé de u). Il est clair que (u,r) caractérisent complètement la géodésique de condition initiale (x,u). Si l'on s'interesse aux géodésiques non paramétrées, c'est à dire aux droites non orientées, il faut encore prendre le quotient de TS^1 par $(u,r) \mapsto (-u,r)$, on obtient alors le ruban de Möbius. L'identification de TS^1 avec $S^1 \times \mathbf{R}$ se fait de la façon suivante, considérons la matrice de rotation d'angle $\pi/2$, soit I, et posons $\rho = \langle r, Iu \rangle$. L'aplica-

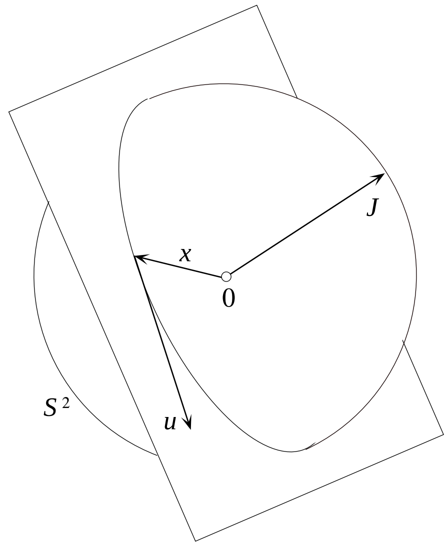

Figure 1: Les géodésiques de la sphère S^2

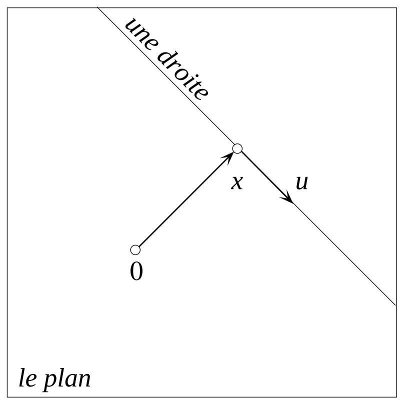

Figure 2: Les géodésiques du plan $\mathbf{R}^2$.

tion $(u,r) \mapsto (u,\rho)$ est l'identification recherchée. Le changement d'orientation devient $(u,\rho) \mapsto (-u,-\rho)$, on peut reconnaître comme ça le ruban de Möbius. Cet exemple s'étend facilement aux géodésiques de l'espace $\mathbf{R}^n$ qui se trouve identifié de cette manière à TS^{n-1}, l'espace tangent à la sphère S^{n-1}.

Dans les deux cas précédents l'espace des géodésiques est une variété. Mais il existe des exemples aussi simples que ceux-là pour lesquels l'espace des géodésiques n'est pas une variété.

Exemple. Considérons le tore plat $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Son fibré unitaire tangent est naturellement identifié à $T^2 \times S^1$ que l'on peut identifier au quotient du fibré unitaire tangent à $\mathbf{R}^2$ par $\mathbf{Z}^2$, ce groupe n'agissant que sur le premier facteur. L'espace des géodésiques du tore se trouve donc identifié, de la même façon, au quotient de l'espace des droites de $\mathbf{R}^2$ par $\mathbf{Z}^2$, agissant par translations. C'est cette action qu'il nous faut préciser. Paramétrons u par un angle θ entre 0 et 2π. L'action d'un élément (m,n) de $\mathbf{Z}^2$ se traduit sur le cylindre $S^1 \times \mathbf{R}$ par $(m,n) : (\theta,\rho) \mapsto (\theta, \rho + m\sin\theta - n\cos\theta)$. L'espace des géodésiques non paramétrées de T^2 n'est visiblement pas une variété, elle se ¡¡ fibre ¿¿ sur le cercle (le vecteur u, ou l'angle θ) mais la fibre au dessus de chaque angle est équivalent au quotient du cercle S^1 par la rotation d'angle θ qui n'est une variété (en l'occurence isomorphe au cercle lui-même) que si θ est rationnel, sinon c'est un espace topologique grossier. Par curiosité, le lecteur peut regarder ce qui se passe pour les tores T^{n+1}.

Nous n'avons abordé dans ces exemples que des variétés à courbure (constante) positive (les sphères) ou nulle (les espaces vectoriels ou les tores), il est bon de donner des exemples en courbure négative.

Exemple. Nous allons donner maintenant un des innombrables modèles de l'espace hyperbolique de dimension 2, et la construction de ses géodésiques. Cet espace a $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ comme groupe d'isométries directes. C'est le groupe des matrices réelles 2×2 de déterminant $+1$ modulo $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tel que } ad - bc = +1 \text{ et } A \sim -A.$$

Nous allons partir directement de ce groupe pour reconstruire à la fois l'espace hyperbolique et sa variété des géodésiques.

L'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, c'est-à-dire son espace tangent en l'identité (dans l'espace vectoriel des matrices 2×2), est le sous-espace vectoriel des matrices 2×2 de trace nulle, noté $\mathrm{sl}(2,\mathbf{R})$. Tout élément X de $\mathrm{sl}(2,\mathbf{R})$ s'écrit donc :

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}.$$

On définit sur $\mathrm{sl}(2,\mathbf{R})$ la forme bilinéaire suivante :

$$\langle X, X'\rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(XX').$$

Il est facile de vérifier qu'elle est non dégénérée et de signature $++-$. Il suffit par exemple d'identifier la matrice X avec le vecteur, noté par la même lettre, $X = (x,y,z)$ défini par :

$$x = \alpha \quad y = \frac{\beta+\gamma}{2} \quad z = \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

La forme bilinéaire devient :

$$\langle X, X'\rangle = xx' + yy' - zz'.$$

On dit que c'est un pseudo-produit scalaire, ou encore produit scalaire lorentzien. Par analogie avec avec le cas euclidien, on note encore $\|X\|^2 = \langle X, X\rangle$ bien que cette forme ne soit pas définie positive.

La sous-variété de $\mathrm{sl}(2,\mathbf{R})$ d'équation $\|X\|^2 = -1$, c'est-à-dire $x^2+y^2-z^2 = -1$, est un hyperboloïde de révolution (autour de oz) à deux nappes, asymptote au cône C d'équation $z^2 = x^2+y^2$. Nous noterons H^2 la nappe contenant la matrice

$$X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

représentée par le vecteur $(0,0,1)$.

La forme bilinéaire restreinte à H^2 est alors définie positive. On peut le vérifier directement ou encore utiliser l'action adjointe de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, c'est-à-dire

$$(A,X) \mapsto AXA^{-1}.$$

Il est clair que le produit pseudo-scalaire est invariant par cette action et donc que H^2 est stable. Par un argument de dimension il est possible de montrer que H^2 est homogène sous l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, autrement dit que pour tout couple de point X, X' dans H^2 il existe une matrice $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ telle que $AX = X'$. Il suffit alors de vérifier que le produit pseudo-scalaire est positif sur l'espace tangent à H^2 au point X_0.

Soit UH^2 le fibré unitaire tangent à H^2 :

$$UH^2 = \{(X,U) \mid X \in H^2 \text{ et } \langle X, U\rangle = 0\}.$$

Les équations des géodésiques de cette métrique riemannienne sur H^2 deviennent :

$$\frac{dX}{dt} = U \quad \text{et} \quad \frac{dU}{dt} = X.$$

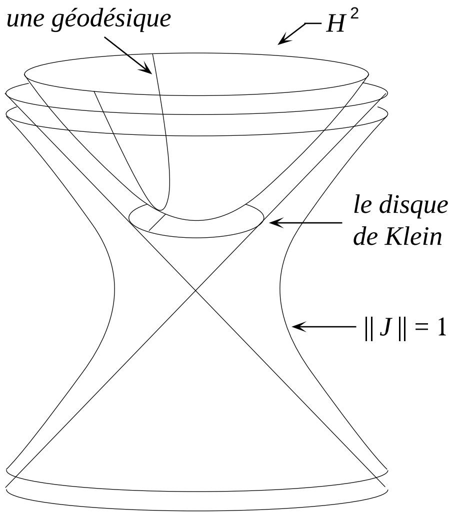

Figure 3: Les géodésiques de l'espace hyperbolique H^2.

On peut remarquer sur ces équations que la courbure de H^2 est égale à -1.

Considérons alors la matrice $J \in \mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$ définie par :

$$J = [U, X] = UX - XU,$$

elle est conservée le long des géodésiques, en effet

$$\begin{aligned} dJ/dt &= [dU/dt, X] + [U, dX/dt] \\ &= [X, X] + [U, U] \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part J est à la fois orthogonal (pour le produit pseudo-scalaire) à X et U (utiliser les propriétés de la trace), donc la trajectoire géodésique appartient à l'intersection de H^2 et du plan orthogonal à J, et comme cette intersection est une courbe, c'est donc la géodésique elle-même. Ainsi les géodésiques de H^2 sont obtenues commes les intersections de H^2 avec les plans passant par l'origine.

Notons que l'application $(X, U) \mapsto J$ nous donnne un moyen de réaliser l'espace des géodésiques de H^2 comme une sous-variété de $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$. En effet, on peut facilement vérifier que $\|J\|^2 = 1$, il suffit de se placer au point X_0. D'autre part tout plan orthogonal à un J tel que $\|J\|^2 = 1$ coupe H^2 (on résout l'équation $J = [U, X]$). L'espace des géodésiques de H^2 s'identifie donc avec la sous-variété des matrices J de $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$ d'équation $\|J\|^2 = 1$, c'est à dire $x^2+y^2-z^2 = 1$. C'est un hyperboloïde de révolution à une nappe, asymptote au cône C, dont les traces avec les plans d'équation $z = c$ sont des cercles de rayon $\sqrt{1 + c^2}$. C'est un autre espace homogène (orbite adjointe) de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. La variété des géodésiques de H^2 est donc difféomorphe au cylindre $S^1 \times \mathbf{R}$.

On peut retrouver cette identification avec le cylindre en considérant la représentation de Klein qui consiste à projeter H^2 sur le disque K^2 d'équations : $z = 1$ et $x^2 + y^2 < 1$, suivant les droites passant par l'origine et intérieures au cône C. Les géodésique sont alors des segments de droites, traces sur K^2 des plans passant par l'origine. L'espace des géodésiques est donc difféomorphe à la variété des droites, c'est-à-dire au cylindre.

Le lecteur perspicace aura remarqué sans doute l'analogie entre cette construction et celle de la variété des géodésiques de la sphère S^2, notamment dans l'introduction du vecteur J. En effet dans les deux cas la fonction $(X, U) \mapsto J$ est le *moment cinétique* relatif au groupe des isométries, $\mathrm{SO}(3)$ pour la sphère S^2, et $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ pour H^2. Dans ces deux cas c'est l'abondance de symétries qui rend la construction de l'espace des géodésiques aussi simple (et algébrique).

Mais il n'est pas nécessaire d'avoir autant de symétries pour que l'espace des géodésiques soit une variété comme nous allons le voir dans l'exemple suivant

Exemple. Nous allons considérer, dans cet exemple, le cas d'une variété riemannienne à courbure négative (*i.e.* négative ou nulle) complète et simplement connexe. Ces variétés sont connues sous le nom de *variétés de Hadamard* grâce au théorème suivant, dont on peut trouver une démonstratation dans le livre de Do Carmo [Car76].

Théorème (J. Hadamard). *Toute variété, de dimension n, riemannienne à courbure négative, complète et simplement connexe est difféomorphe à l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$. De plus, par deux points distincts passe une et une seule géodésique.*

Nous allons montrer que dans le cas des variétés de Hadamard de dimension 2, c'est-à-dire le plan $\mathbf{R}^2$ munie d'une métrique à courbure négative ou nulle, l'espace des géodésiques est une variété encore difféomorphe au cylindre. En fait, se résultat se généralise à toutes les variétés de Hadamard de dimension n, leurs espaces de géodésiques sont difféomorphes aux espaces tangents TS^{n-1}.

L'ingrédient essentiel de cette construction sera la *fonction distance à un point.* Considérons de façon

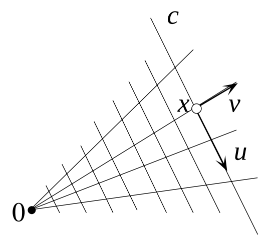

Figure 4: La variation de la longueur.

générale une variété riemannienne (X, g), une origine $o \in X$ et un arc de géodésique c contenu dans un voisinage suffisamment petit de o pour que de o à tout point $x \in c$ ne passe qu'une seule géodésique, c'est possible en vertu de l'unicité locale des solutions d'équations différentielles. Soit $\hat{x}$ l'unique (arc de) géodésique joignant o à $x \in c$, paramétrons $\hat{x}$ par t de telle sorte que $\hat{x}(0) = 0$ et $\hat{x}(1) = x$. Soit l la distance de o à x :

$$l = \int_0^1 \left\| \frac{d\hat{x}(t)}{dt} \right\| \, dt.$$

Soit s l'abcisse curviligne de l'arc c, et x_s un point courant. la dérivée de l par rapport à s est donnée par la formule de la variation première, compte tenu de ce que l'arc $\hat{x}$ est géodésique :

$$\frac{dl}{ds} = g(u_s, v_s),$$

où v_s est le vecteur unitaire tangent à la géodésique $\hat{x}_s$ au point x_s et u_s le vecteur unitaire tangent à la géodésique c au même point. Ainsi, le point x est critique pour la fonction distance lorsque la géodésique $\hat{x}$ est orthogonale à c, ce qui est naturel. Pour savoir si x est minimal, maximal ou si c'est un point d'inflexion il faut calculer la dérivée seconde d^2l/ds^2, c'est à dire faire appel à *la formule de la variation seconde*. Considérons la fonction à deux variables $(s, t) \mapsto \hat{x}_s(t)$ à valeur dans X, et soit u et v les vecteurs :

$$u_s(t) = \frac{\partial \hat{x}_s(t)}{\partial s} \quad \text{et} \quad v_s(t) = \frac{\partial \hat{x}_s(t)}{\partial t}.$$

En utilisant la dérivation covariante introduite plus haut, on obtient :

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = g(u_s, \nabla_{u_s} v_s).$$

En utilisant la commutativité des dérivées partielles par raport à s et t, et en écrivant

$$g(u_s, \nabla_{u_s} v_s) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[g(u_s, \nabla_{u_s} v_s)] \, dt,$$

on aboutit à l'expression suivante :

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = \int_0^1 \|\nabla_{u_s} v_s\|^2 \, dt - \int_0^1 K(u_s, v_s) \, dt,$$

où K est la courbure sectionnelle (nous renvoyons aux article de S. Barré et F. Bosio dans ce même journal, pour les diverse notions de courbures). Donc, si la courbure est négative ou nulle cette expression est strictement positive (à cause du premier terme). La fonction distance d'une géodésique à un point est alors strictement convexe (même pour les géodésiques passant par o).

Revenons maintenant à notre variété de Hadamard de dimension 2. Soit UX son fibré unitaire tangent et (x, u) un point de ce fibré. Soit v le vecteur tangent à x, vitesse au point x de l'unique (théorème de Hadamard) géodésique qui part de o et passe par x au temps 1, c'est une fonction différentiable de X, même si elle s'annule pour $x = o$. Définissons sur UX la fonction réelle :

$$\tau(x, u) \mapsto g(u, v).$$

Nous venons de calculer sa dérivée le long du flot géodésique ξ, en effet :

$$d\tau(\xi(x, u)) = \frac{d^2 l}{ds^2},$$

où s est le paramètre naturel de la géodésique qui passe par x avec la vitesse u. Les surfaces de niveau de cette fonction sont donc toujours transverses au flot géodésique. Comme le flot géodésique est complet par hypothèse, toute géodésique (au sens de courbe intégrale du champ de vecteurs ξ) coupe chacune des surfaces de niveau en un point et un seul. Ainsi chaque surface de niveau de τ est une réalisation de l'espace des géodésiques de X, $\mathcal{G}_X$ est donc une variété. Parmi toute les surfaces de niveau de τ il en est une plus jolie que les autres $\tau^{-1}(0)$. C'est l'ensemble des conditions initiales au point le plus près de l'origine o. Cette sous-variété de UX est évidemment difféomorphe au cylindre.

En généralisant cette construction aux espace de Hadamard de dimension quelconque on peut montrer la proposition suivante :

Proposition. *L'espace des géodésiques non paramétrées orientées d'une variété de Hadamard de dimension n est une variété difféomorphe à TS^{n-1}.*

Dans le cas que nous venons de présenter, il peut n'exister aucune isométrie (il suffit de perturber un

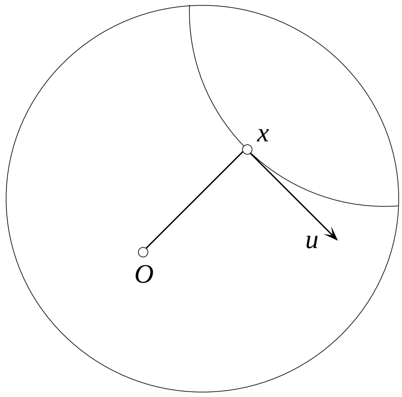

Figure 5: Un espace à courbure négative.

peu la métrique hyperbolique par exemple) mais l'espace des géodésiques est encore une variété différentiable. C'est la courbure négative qui est ici reponsable de cette propriété.

Une inégalité amusante

Nous allons, pour achever cet article, montrer comment on peut utiliser la construction de la variété des droites (géodésiques du plan) pour obtenir une inégalité amusante sur la courbure moyenne d'une courbe fermée.

Considérons la variété des droites orientées du plan $\mathbf{R}^2$, identifié à $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbf{R}$ comme nous l'avons vu dans un exemple plus haut. Reprenons les notations de cet exemple : x désigne un point de $\mathbf{R}^2$, u un vecteur unitaire, r la projection orthogonale de x relativement à u. Nous avons vu plus haut que la longueur d'une courbe Γ peut s'écrire :

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma \lambda = \int_\Gamma \langle u, \frac{dr}{dt} \rangle \, dt + \langle u, x \rangle \, |_{\partial\Gamma},$$

où λ désigne la forme de Liouville sur le fibré unitaire tangent $U\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^2 \times S^1$.

Soit n le vecteur tangent à S^1 au point u tel que la base (n, u) soit directe, et ϵ la 1-forme angulaire S^1 : $\epsilon = -\bar{n}du$. Notons $du = -kn$, en tenant compte de ce que sur TS^1, $\langle u, r \rangle = 0$ implique $\bar{u}dr = -\bar{r}du$, on obtient :

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma \rho k + \langle u, x \rangle \, |_{\partial\Gamma} \quad \text{avec} \quad \rho = \langle n, r \rangle.$$

La variable ρ s'interprète comme la distance algébrique, à l'origine, de la droite repérée par (u, r).

Nous supposerons maintenant que la courbe est fermée, alors :

$$\partial\Gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad L(\Gamma) = \int_\Gamma \rho k.$$

La longueur de la courbe étant positive on a :

$$L(\Gamma) = \left| \int_\Gamma \rho k \right| \leq \max_\Gamma |\rho| \int_\Gamma |k| \, .$$

Le nombre $\max_\Gamma |\rho|$ est le maximum de la distance, à l'origine, des tangentes à la courbe Γ. Le nombre

$$K(\Gamma) = \int_\Gamma |k|$$

est appelée la *courbure totale* de Γ[4]. On a donc l'inégalité sur la *courbure moyenne* de la courbe Γ :

$$\frac{K(\Gamma)}{L(\Gamma)} \geq \frac{1}{\max_\Gamma |\rho|}$$

Nous pouvons l'améliorer en ajustant l'origine (arbitraire) du plan $\mathbf{R}^2$, posons

$$R(\Gamma) = \min_{\mathbf{R}^2} \max_\Gamma |\rho| \, ,$$

que nous pourrions appeler le *grand rayon de la courbe*, on a alors :

$$\frac{K(\Gamma)}{L(\Gamma)} \geq \frac{1}{R(\Gamma)}.$$

Les cercles réalisent l'égalité. Autrement dit,

PROPOSITION. *La courbure moyenne d'une courbe fermée, simple, du plan est toujours supérieure à la courbure d'un cercle dans lequel elle s'incrit.*

Une conjecture de Serge Tabashnikov[5], veut que cette inégalité soit encore vérifiée en remplacant la courbure du cercle par la courbure moyenne de toute courbe convexe dans laquelle peut s'inscrire Γ. A vos crayons...

[4] Rappelons que l'intégrale de la courbure est toujours égale à 2π lorsque la courbe Γ est sans point double (formule de Gauss-Bonnet), en effet elle est égale à l'intégrale de la forme angulaire sur S^1. La courbure totale est donc supérieure ou égale à 2π puisqu'elle s'interprête comme la longueur de l'image de l'application de Gauss, plus précisemment $K(\Gamma) = 2\pi$ si et seulement si Γ est convexe.

[5] Professeur à l'Université de Fayetteville, Arkansas

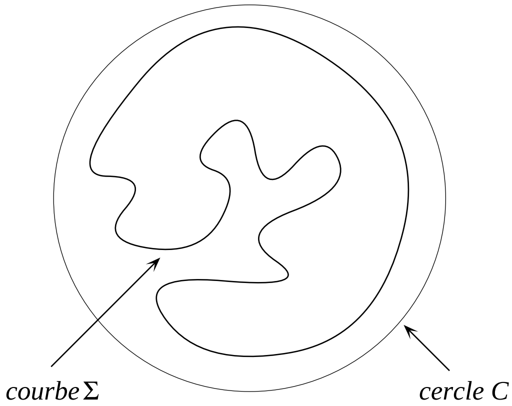

Figure 6: Une courbe inscrite dans un cercle.

Bibliographie

[BG72] M. Berger et B. Gostiaux. *Cours de géométrie.* Armand Colin, Paris, 1972.

[Car30] E. Cartan. *La géométrie des espaces de Riemann.* Hermann,Paris, 1930.

[Car76] M. P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall inc., 1976.

[Dar15] G. Darboux. *Leçon sur la théorie générales des surfaces.* Gauthier-Villars, Paris, 1915.

[DPK66] M. Denis-Papin et A. Kaufmann. *Cours de calcul tensoriel appliqué.* Albin Michel, Paris, 1966.

[GHL90] S. Gallot, D. Hulin, et J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Universitext. Springer Verlag, New York, 1990.

[Hel62] S. Helgason. *Differential geometry and symetric spaces.* Academic Press, New York, 1962.

[Lag65] J.-L. Lagrange. *Mécanique analytique.* Librairie Albert Blanchard, Paris, 1965. Facsimilé de la troisième édition.

[Sto69] J. Stoker. *Differential geometry*, volume XX of *Pure and applied mathematics.* Wiley-Interscience, New York, 1969.

◇ Patrick Iglesias
UMPA ENS–Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
`piglesia@umpa.ens-lyon.fr`