הסתברות

"הטלת מטבע (הוגן) נותנת עץ או פלי, בסיכוי $\frac{1}{2}$ כ"א"

"חתול נולד לבן בסיכוי $\frac{1}{1000}$"

ניסוי - הפעולה שנותנת תוצאה "מקרית" (הטלת מטבע, לידת חתול..)

מרחב המדגם - התוצאות האפשריות של הניסוי

פורמלית: ניסוי - לא קיים. $\boxed{\text{מרחב מדגם - קבוצה לא ריקה.}}$

לרוב נסמן את מרחב המדגם ב- Ω

$\boxed{\text{פונקצית הסתברות נקודתית (על מרחב מדגם } \Omega \text{) היא פונקציה } p:\Omega\to\mathbb{R}_+ \text{ כך ש: } \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)=1 .}$

לדוגמא: $\Omega=\{H,T\}$ $\quad p(H)=p(T)=\frac{1}{2}$ ("מטבע הוגן")

(גם $\Omega=\{H,T,\text{☺}\}$ עם $p(H)=p(T)=\frac{1}{2}$, $p(\text{☺})=0$)

$\Omega=[6]=\{1,2,\dots,6\}$ $\quad p(j)=\frac{1}{6}\ \forall j$ $\leftarrow$ "קוביה הוגנת"

איך נתאר ניסוי שבו אני מטילים מטבע (הוגן) עד שיוצא H, ותוצאת הניסוי היא מס' ההטלות שביצענו, ו-"∞" אם לא יוצא H בכלל.

$$\Omega=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

$p(1)=\frac{1}{2}$ $\quad p(2)=\frac{1}{4}$

הטלה 1	הטלה 2	תוצאה
H	H	1
H	T	1
T	H	2
T	T	? ≥ 3

$$p(m)=\frac{1}{2^m}$$

$$p(\infty)=0$$

ואכן: $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)=\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}=1$

נניח שאנחנו רוצים להגריל מס' ממשי "אקראי" בין (הוגן) [0,1].

איך לעשות זאת? ← תכלס
← פורמלית (Ω, p)

$\boxed{22/10}$

מרחב מדגם Ω, פ' הסתברות נקודתית p

<u>הטלת 2 קוביות בב-ee</u> (הוגנות, לא "מתואמות")

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots (1,6), (2,1), \dots, (2,6) \dots (6,6)\}$$

$$p((i,j)) = \frac{1}{36} \quad \forall i,j$$

מה עם האפשרות הבאה:

$$\Omega = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,6\}, \{2,2\}, \dots, \{2,6\}, \dots, \{6,6\}\}$$

(21 אפשרויות)

$$p(\{i,j\}) = \begin{cases} \frac{1}{36} & i=j \\ \frac{1}{18} & i \neq j \end{cases}$$

שתיהן אותה. לראשונה קוראים "קוביות שונות" ולשניה "קוביות זהות".

מודל שבו p קבועה נקרא מודל של <u>התפלגות אחידה</u>, והוא נוח עבור חישובים.

<u>בעיית ההגרלה האחידה ב-[0,1]</u>

$\Omega = [0,1]$ (אין מקום למחוק). אנחנו צריכים $p: \Omega \to \mathbb{R}_+$

ונרצה ש- $\sum_{\alpha \in \Omega} p(\alpha) = 1$ ו- $p(\alpha) = p(\beta)$ לכל $\alpha, \beta \in \Omega$

אין כזו p. ☹ (עבור $p \equiv 0$ מתקבל $\sum p(\omega) = 0$

($\sum p(\omega) = \infty$ " $p \equiv c > 0$ עבור

(לכל קבוצה X ופונקציה $f:X\to\mathbb{R}_+$
מגדירים $\sum_{x\in X} f(x)=\sup_{\substack{A\subseteq X\\ \text{סופית}}} \sum_{x\in A} f(x)$)

פתרון תכלס: מלילים קוביה הוגנת עם 10 פאות, ורושמים את הספרות מימין לנקודה העשרונית: $0.27056...$

עבור מהנדס/פיזיקאי/... זה מספיק לו - מלילים עד הדיוק שחפצים בו. עבור מתמטיקאי - לא, אי אפשר לענות על שאלות כמו האם $\alpha\in\mathbb{Q}$?

בכל זאת נלך עם המודל הזה ונתפס לפרמל אותו.

שימו לב: לכל $\alpha\in[0,1]$ אכן $p(\alpha)=0$ (כמו לקבל רק T בהטלות מטבע)

אבל כן קיבלנו הסתברות נכונה עבור
קלטים: $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$ אמ"מ הספרה הראשונה היא $0,1,2,3,4$
או שהספרה הראשונה היא 5 וכל השאר הן 0

זה קורה בסיכוי $\frac{1}{2}=5\cdot\frac{1}{10}+0$.

תרגיל: כל $c\le\alpha\le d$ מתקבל בסיכוי $d-c$.

הגדרה: מאורע היא תת קבוצה של Ω

למשל עבור $\Omega=[0,1]$: $[0,\frac{1}{2}]$, $\mathbb{Q}\cap[0,1]$, $C:=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{10^i} \,\middle|\, \begin{matrix}0\le a_i\le 9\\ a_i\ne 3\end{matrix}\right\}$

עבור $\Omega=[6]$: $\{1,3,5\}$ (תוצאה אי-זוגית), $\{1,...,4\}$, ...
עבור $\omega\in\Omega$, גם $\{\omega\}$ היא מאורע.

$$\boxed{\text{אוסף כל המאורעות ב-}\Omega\text{ מסומן } \mathcal{F}:\quad \mathcal{F}=2^{\Omega}=\mathcal{P}(\Omega)=\{A\mid A\subseteq\Omega\}}$$

הגדרה: פ' הסתברות (על מרחב מדגם Ω) היא פונקציה $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ שמקיימת: $P(\Omega)=1$

רעיון: אם $A,B\in\mathcal{F}$ זרים, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

(נובע: $P(\emptyset)=P(\emptyset\cup\emptyset)=P(\emptyset)+P(\emptyset) \Leftarrow P(\emptyset)=0$).

מסתבר שזה לא מספיק - אפשר להגדיר דברים מוזרים שמקיימים את זה.

אנחנו דורשים משהו חזק יותר: אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות זרים בזוגות ($\forall i\neq j\ A_i\cap A_j=\emptyset$) אז: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

> לא נרצה לדרוש יותר מזה (אם $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של מאורעות זרים בזוגות אז $P\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\sum_{i\in I}P(A_i)$, כי אז $P(\{\omega\})=0$ לכל ω גורר $P(\Omega)=0$ ☹)

פ' הסתברות נק' על Ω משרה פ' הסתברות על $\mathcal{F}$ של Ω:

$$P_p(A):=\sum_{\omega\in A}p(\omega)$$

דוגמא: קוביה הוגנת: $\Omega=\{H,T\}$, $p\equiv\frac{1}{2}$, $\mathcal{F}=\{\{\},\{H\},\{T\},\{H,T\}\}$

$$P(\{\})=0 \qquad P(\{H\})=P(\{T\})=\frac{1}{2} \qquad P(\{H,T\})=1$$

מסקנות מההגדרה: (א) אם $A_1,\dots,A_k\in\mathcal{F}$ מאורעות זרים בזוגות אז $P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)$.

(ב) $P(\emptyset)=0$.

(ג) $P(A^c)=1-P(A)$ כש: $A^c:=\Omega\setminus A$.

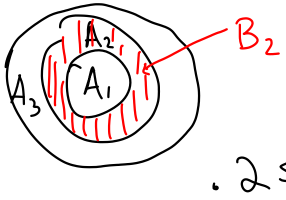
(ד) לכל $A\in\mathcal{F}$ $P(A)\leq 1$.

(ה) אם $A\subseteq B\in\mathcal{F}$ אז $P(A)\leq P(B)$.

למשל (ב): $A_i=\emptyset$ לכל $i\in\mathbb{N}$ נותן סדרה של מאורעות זרים בזוגות ולכן $P(\emptyset)=P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\emptyset\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset)=0$.

תרגיל: א, ג, ד, ה.

טענה: אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה עולה של מאורעות (כלומר $A_i\subseteq A_j$ עבור $i\leq j$)



אז $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$,

__הוכחה:__ נגדיר $B_1 = A_1$, $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ לכל $2 \le j$.

נשים לב ש: $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \overset{\star}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, ו- $\{B_i\}$ זרים בזוגות.

לכן $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{\star}{=} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{\text{הגדרה}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \underset{\text{הגדרת סכום טור}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$

$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ $\square$

תכונה (א)

$\boxed{27/10/20}$

__הגדרה:__ מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

כש- Ω קבוצה לא ריקה ("מרחב המדגם")

$\mathcal{F} = 2^{\Omega} := \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ [אבל! יותר מאוחר נרשה ש- $\mathcal{F}$ תכלול רק חלק מתתי הקבוצות של Ω, מסיבות טכניות]

$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ מקיימת: (א) $P(\Omega) = 1$

(ב) אם $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ זרים בזוגות $(A_i \in \mathcal{F})$ אז $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

סיגמא אדיטיביות

איברי $\mathcal{F}$ נקראים מאורעות, P שמקיימת (א) ו-(ב) נקראת "פונקצית הסתברות"!

__דוגמא:__ אם p פ' הסתברות נקודתית על Ω כלשהי: אז

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ מרחב הסתברות, כש-

ו- $\boxed{P_p(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)}$ $\forall A \subseteq \Omega$.

__אינדוקציה:__ סכום של מס' אי-שליליים על קבוצה כלשהי: אם $\{a_i\}_{i\in I}$

$a_i \ge 0$, ו- I קבוצה כלשהי, מגדירים:

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i := \sup_{\substack{J\subseteq I \\ \text{סופית } J}} \left\{ \sum_{i\in J} a_i \right\}} \quad (\in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

(כש- $I=\mathbb{N}$ מקבלים את הגדרת סכום לפי מאינפי - בדקו!)

<u>טענה</u>: אם $\aleph_0<|I|$ ו- $a_i>0$ לכל i, אזי $\sum_{i\in I} a_i=\infty$

<u>הוכחה</u>: נגדיר $X_n=\{i\in I \mid a_i>\frac{1}{n}\}$. אזי $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n=I$

ולכן <u>ישנו</u> n_0 כך ש- $\aleph_0<|X_{n_0}|$ [איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא עדיין בן מניה]

בפרט X_{n_0} אינסופי. לכל $m\in\mathbb{N}$ ישנו $J\subseteq X_{n_0}$ בגודל m, ולכן

$\sum_{i\in I} a_i \geq \sum_{i\in J} a_i \geq \frac{m}{n_0}$. לכן, $\sum a_i=\infty$.

לעניננו, זה אומר שאם p היא פ' הסתי' נקודתית על Ω, אזי $\operatorname{supp}(p)=\{\omega\in\Omega \mid p(\omega)\neq 0\}$ סופית או בת-מניה.

<u>הגדרה</u>: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ נקרא מרחב הסתברות בדיד אם הוא מתקבל מ-פ' הסתי' נקודתית כמו בדוגמא.

<u>טענה</u>: הבאים שקולים (כש- $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות)

א) $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות בדיד (יש p כך ש- $\mathbb{P}=\mathbb{P}_p$)

$\mathbb{P}_p(A)=\sum_{\omega\in A} p(\omega)$

ב) יש $A\subseteq\Omega$ עם $\mathbb{P}(A)=1$ ו- $|A|\leq\aleph_0$.

ג) $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})=1$

ד) לכל $B\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(B)=\sum_{\omega\in B}\mathbb{P}(\{\omega\})$.

בחצי הראשון של הקורס נעסוק במרחבי הסתברות בדידים.

29/10/20

<u>הוכחה</u>: א$\Leftrightarrow$ד: כאלו לדוגמא. ד$\Rightarrow$ג: ברור: ניקח $B=\Omega$

אזי $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\}) \underset{(ד)}{=} \mathbb{P}(\Omega)=1$.

<u>א$\Rightarrow$ב</u>: ניקח $A=\operatorname{supp}(p)$. אזי $|A|\leq\aleph_0$ כי אחרת ראינו ש- $\sum_{\omega\in A}p(\omega)=\infty$. עכשיו גם מתקבל

איחוד של לכל היותר $\aleph_0$ קבוצות זרות

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}\Big) \underset{\sigma\text{-אדיטיביות}}{=} \sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\{\omega\}) \underset{(א)}{=} \sum_{\omega\in A}p(\omega) \underset{A=\operatorname{supp}(p)}{=} \sum_{\omega\in\Omega}p(\omega) \underset{p \text{ פ' הסתי' נקודתית}}{=} 1$$

ב ⇐ ד: נשים לב ש- $B=(B\cap A)\dot\cup(B\cap A^c)$, ולכן

$$P(B)=P(B\cap A)+\underbrace{P(B\cap A^c)}_{\le P(A^c)=1-P(A)\overset{ד}{=}1-1=0}=P(B\cap A)$$

מכיוון ש- $|B\cap A|\le|A|\overset{ב}{\le}\aleph_0$, מתקבל

$$P(B)=P(B\cap A)\overset{\sigma\text{-אדיטיביות}}{=}\sum_{\omega\in B\cap A}P(\{\omega\})=\sum_{\omega\in B}P(\{\omega\})$$

$\square$

$\omega\notin A\to P(\{\omega\})\le P(A^c)=0$

ג ⇐ ב: ניקח $A=\{\omega\in\Omega\mid P(\{\omega\})>0\}$ אז מ-ג' נובע $|A|\le\aleph_0$, ולכן

גם
$$P(A)\overset{\sigma\text{-אדיטיביות}}{=}\sum_{\omega\in A}P(\{\omega\})=\sum_{\omega\in\Omega}P(\{\omega\})\overset{ג}{=}1$$
$\square$

$$\left[\operatorname{supp}(P)=\{A\in\mathcal{F}\mid P(A)\neq0\}\right]$$

דוגמא למרחב הסתברות לא בדיד - הגרלת מס' אחיד בין 0 ל-1. $\Omega=[0,1]$. מהי $\mathcal{F}$? אם ניקח $\mathcal{F}=2^\Omega$ נצטרך להגדיר לכל $A\subseteq[0,1]$ מהו $P(A)$. ברור לנו שאנחנו רוצים לכל $A=[\alpha,\beta]$ $(0\le\alpha\le\beta\le1)$ לקבל $P(A)=\beta-\alpha$.

מזה ינבע שלסדרת קטעים זרים $A_i=[\alpha_i,\beta_i]$ צריך לקבל $P\left(\dot\bigcup_{i=1}^\infty[\alpha_i,\beta_i]\right)=\sum_{i=1}^\infty\beta_i-\alpha_i$. הבעיה היא שב-$2^{[0,1]}$ יש עוד המון קבוצות.

התשובה המלאה לבעיה הזו ניתנת בקורס "תורת המידה".

כבר אנחנו רואים ש- $P(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0$ (מ-σ-אדיטיביות).

ולכן $P((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1])=1$ (זה המשלים של).

$$P\Bigg(\underbrace{\left\{\sum_{m=1}^\infty\frac{c_m}{10^m}\;\middle|\;\begin{matrix}0\le c_m\le9\\ c_m\neq7\end{matrix}\right\}}_{\text{לא בן-מניה (וגם המשלים).}}\Bigg)=?$$

(מצפים שיצא 0 בגלל מקרה הטלת הקוביה)

$$P(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = P\Big(\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbb{Q}\\ 0\le\alpha\le1}}\{\alpha\}\Big) \underset{\sigma\text{-אדיטיביות}}{=} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Q}\\ 0\le\alpha\le1}} P(\{\alpha\}) = 0$$

היינו רוצים למצוא פ' הסתברות P שמקיים שלכל $A\subseteq[0,1]$ ולכל $-1\le\gamma\le1$ כך שגם $A+\gamma=\{\alpha+\gamma \mid \alpha\in A\}\subseteq[0,1]$ מתקיים $P(A)=P(A+\gamma)$ "אינווריאנטית להזזה". אין כזו! ☹ (אעלה לכם הוכחה).

> **משפט (תוכח בתורת המידה)**: ישנה $\mathcal{F}\subseteq 2^{[0,1]}$ שמכילה את כל הקטעים ב-$[0,1]$ וסגורה לאיחודים וחיתוכים בני מניה, ופ' $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ על $\mathcal{F}$ הנ"ל כך ש-$(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות ו-P אינווריאנטית להזזה. לזה קוראים התפלגות אחידה על $[0,1]$.

<u>הערה</u>: מרחב הסת' $(\Omega,\mathcal{F},P)$ נקרא רציף אם $P(\{\omega\})=0$ $\forall\omega\in\Omega$.

מעכשיו - כל מרחבי ההסתברות הם בדידים (מתקבלים מ-p).

<u>דוגמא</u>: במגירה זוג גרביים שחורים ושני זוגות גרביים לבנים. מוציאים 2 גרביים באקראי. מה הסיכוי שאמי תרשה לי לצאת איתן מהבית.

תשובה: נמספר את הגרביים $1,\dots,6$, כש-$1,2$ שחורות. ואז

$$\Omega=\{(i,j) \mid i,j\in[6],\ i\ne j\}$$

ו-$p((i,j))=\frac{1}{|\Omega|}=\frac{1}{30}$. הייתי גם יכול לקחת זוגות לא סדורים:

$$\Omega'=\{\{i,j\} \mid 1\le i<j\le6\} \qquad p'(\{i,j\})=\frac{1}{|\Omega'|}=\frac{1}{15}$$ ו-

(כל זוג לא סדור ב-Ω' מתאים לשני זוגות מ-Ω).

$$A=\left\{\{i,j\}\in\Omega' \;\middle|\; \begin{matrix}1\le i<j\le2\\ \text{או}\\ 3\le i<j\le6\end{matrix}\right\}\subseteq\Omega'$$

ואז $P(A)=\sum_{\omega\in A}p(\omega)=\frac{|A|}{|\Omega'|}=\frac{7}{15}$.

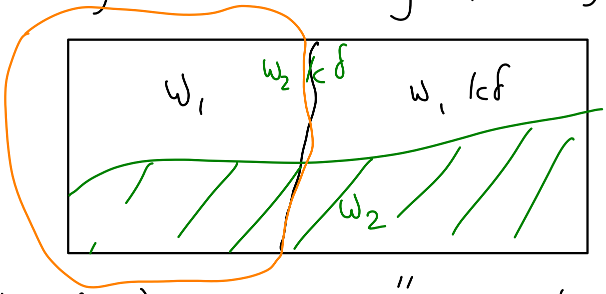
בדקו מה היה קורה במודל Ω!

מכפלת מרחבי הסתברות (בדידים)

אם p_1 , p_2 פ' הסתברות נקודתיות על מרחבי מדגם Ω_1 , Ω_2 בהתאמה, נגדיר פ' הסתברות נק' p על $\Omega_1 \times \Omega_2$:

$$p : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}_+$$

$$p((\omega_1,\omega_2)) := p_1(\omega_1)\cdot p_2(\omega_2)$$



צ"ל אכן פה"נ:

$$\sum_{\omega\in\Omega_1\times\Omega_2} p((\omega_1,\omega_2)) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1}\ \sum_{\omega_2\in\Omega_2} p_1(\omega_1)\, p_2(\omega_2)$$

$$= \sum_{\omega_1\in supp(p_1)}\ \sum_{\omega_2\in supp(p_2)} p_1(\omega_1)\, p_2(\omega_2)$$ (זה כבר סכום בן מניה)

$$= \sum_{\omega_1\in supp(p_1)} p_1(\omega_1) \sum_{\omega_2\in supp(p_2)} p_2(\omega_2) \underset{p_2\text{ פה"נ}}{=} \sum_{\omega_1\in supp(p_1)} p_1(\omega_1) \underset{p_1\text{ פה"נ}}{=} 1$$

קוראים ל-p הזו המכפלה של p_1 ו-p_2 ומסמנים $p = p_1 \times p_2$.

בדוגמא: הטלת מטבע הוגן וקוביה הוגנת $\Omega_1 = \{H,T\}$ $p_1 \equiv \frac{1}{2}$
$\Omega_2 = [6]$ $p_2 \equiv \frac{1}{6}$

מתקבל $(p_1\times p_2)((\underset{\{H,T\}}{\underset{\Uparrow}{s}}, \underset{[6]}{\underset{\Uparrow}{i}})) = p_1(s)\cdot p_2(i) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

ובאותו אופן תמיד כש- p_1 , p_2 הסתברויות אחידות על Ω_1 , Ω_2 אז $p_1 \times p_2$ יתן הסת' אחידה על $\Omega_1 \times \Omega_2$. האם ההיפך נכון?

$p_1 \times p_2$ משקפת ביצוע של הניסוי (Ω_1 , p_1) והניסוי (Ω_2 , p_2) באופן שאין השפעה בין הניסויים.

הגדרה: אם $(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1)$ ו- $(\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2)$ מרחבי הסתברות בדידים, נגדיר את מרחב המכפלה $(\Omega_1\times\Omega_2, 2^{\Omega_1\times\Omega_2}, P_1\times P_2)$

ע״ז $P_1\times P_2 = P_{p_1\times p_2}$ כש- p_1 ו- p_2 הפה"ן שמגדירות את P_1,P_2.

טענה: $\forall A\subseteq\Omega_1,\ B\subseteq\Omega_2:\ (P_1\times P_2)(A\times B) = P_1(A)\cdot P_2(B)$

3/11/20

הוכחה:

$$(P_1\times P_2)(A\times B) \overset{\text{הגדרה}}{=} P_{p_1\times p_2}(A\times B) \overset{\text{הגדרת } P_p}{=} \sum_{\omega\in A\times B}(p_1\times p_2)(\omega)$$

$$\overset{\text{הגדרת } p_1\times p_2}{=} \sum_{\omega\in A\times B} p_1(\omega_1)\,p_2(\omega_2) = \sum_{\substack{\omega_1\in A\\ \omega_2\in B}} p_1(\omega_1)\,p_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1\in A} p_1(\omega_1)\sum_{\omega_2\in B} p_2(\omega_2)$$

$$= \sum_{\omega_1\in A} p_1(\omega_1)\,P_2(B) = P_1(A)\,P_2(B) \quad \square$$

מסקנה: לכל $A\subseteq\Omega_1$, $B\subseteq\Omega_2$:

$(P_1\times P_2)(A\times\Omega_2) = P_1(A)$.

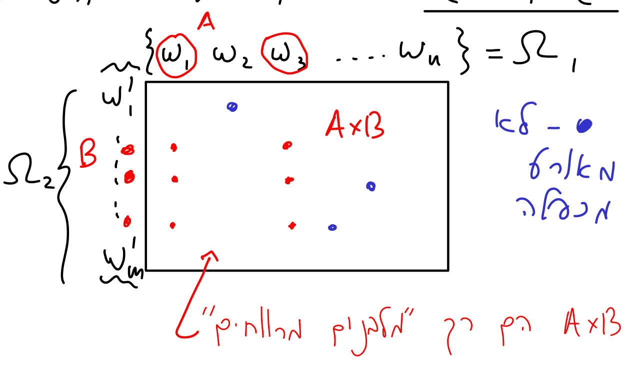
$(P_1\times P_2)(\Omega_1\times B) = P_2(B)$.

מאורעות כמו ה- $(A\times\Omega_2,\ \Omega_1\times B)$ נקראים מאורעות שוליים (marginal).

שימו ♡: לא כל מאורע ב- $\Omega_1\times\Omega_2$ הוא מהצורה $A\times B$.

$$\boxed{2^{\Omega_1}\times 2^{\Omega_2} \subsetneq 2^{\Omega_1\times\Omega_2}}$$

מאורעות מהצורה $A\times B$ נקראים מאורעות מכפלה.



למשל $\Omega_1=\Omega_2=\{1,2\}$, $\{(1,1),(2,2)\}$ אינו מאורע מכפלה.

$\Omega_1\times\Omega_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

הוכחה: אם $A\times B$ אז $1\in A$, וגם $2\in B$

אבל אז $(1,2)\in A\times B$!

מכפלה של הרבה מרחבי הסתברות:

אם $p_1,\dots,p_n$ פה"ן על $\Omega_1,\dots,\Omega_n$ נגדיר פה"ן $p_1\times\dots\times p_n$ על $\Omega_1\times\dots\times\Omega_n$ ע"י $(p_1\times\dots\times p_n)((\omega_1,\dots,\omega_n)) = p_1(\omega_1)\cdot\ldots\cdot p_n(\omega_n)$

תרגיל: הוכיחו שזו פה"ן.

ולכן $(\Omega_i, 2^{\Omega_i}, P_i)$ מרחבי הסתברות $(i=1,\dots,n)$ נגדיר את מרחב המכפלה $(\Omega_1\times\dots\times\Omega_n,\ 2^{\Omega_1\times\dots\times\Omega_n},\ P_1\times\dots\times P_n)$ כש- $P_1\times\dots\times P_n = P_{p_1\times\dots\times p_n}$.

מושרית ממכפלת הפה"ן:

ולכן בפרט מתקבל מרחב הס' בכ'ג

כלומר $(P_1\times\dots\times P_n)(A)=\sum_{w\in A} p_1(w_1)\cdot p_2(w_2)\cdot\ldots\cdot p_n(w_n)$.

$\boxed{\text{מעכשיו נסמן } P(\{w\})=P(w) \text{ (abuse of notation) ונקרא לו } p \text{ מ-}}$.

דוגמא: נקבע $0\leq\alpha\leq 1$.

ניקח $\Omega_1=\ldots=\Omega_n=\{H,T\}$, ולכל i, $P_i(H)=\alpha$ (ולכן $P(T)=1-\alpha$).

מרחב המכפלה מייצג n-הטלות שלא משפיעות זו על זו.

איברי $\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$ הם סדרות ב-$\{H,T\}^n$.

מה ההסתברות של סדרה כזו? $(P_1\times\ldots\times P_6)((H,H,H,T,H,T))=$

$$P_1(H)P_2(H)P_3(H)P_4(T)P_5(H)P_6(T)=\alpha^4(1-\alpha)^2$$

נסמן $\Omega=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$ $\quad P=P_1\times\ldots\times P_n$

אז נקבל:
$$\underset{\text{סדרת הטלות}}{P(w)}=\alpha^{\text{מס' H ב-}w}\cdot(1-\alpha)^{\text{מס' T ב-}w}$$

מה לגבי מאורעות? למשל $A=\{w\in\Omega \mid \text{יש H בדיוק k פעמים ב-}w\}$

למרות שהמרחב אינו אחיד:
$$P(A)=\sum_{w\in A}P(w)=\sum_{w\in A}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$$
$$=|A|\cdot\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}=\boxed{\binom{n}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}}$$

(ניסוי ברנולי: $\Omega=\{H,T\}$, $P(H)=\alpha$).

אם (Ω_1,P_1), (Ω_2,P_2) מרחבי הסתברות, הגדרנו מרחב הס' על מרחב המכפלה $\Omega_1\times\Omega_2$. יש עוד! למשל אם הטלנו מכפלה הוגן פעמיים, (Ω_1,P_1) - מייצג את מס' הראשים:

$\boxed{\Omega_1=\{0,1,2,3\},\ P_1:\ 0\mapsto 1/4,\ 1\mapsto 1/2,\ 2\mapsto 1/4}$. (Ω_2,P_2) - מייצג את מס'

הזנבות: $\boxed{\Omega_2=\{0,1,2,3\},\ P_2:\ 0\mapsto 1/4,\ 1\mapsto 1/2,\ 2\mapsto 1/4}$

אבל $P((0,0))=0\neq\frac{1}{16}=P_1(0)\cdot P_2(0)$ $\quad P((0,1))=P((2,2))=$

$P((1,1))=\frac{1}{2}$ $\quad P((0,2))=\frac{1}{4}$

זהו לא מרחב המכפלה!

5/11/20

שאלה: נתונה הסתברות P על $\Omega_1\times\Omega_2$.
האם P היא הסתברות מכפלה של הסתברויות כלשהן P_1,P_2 על Ω_1,Ω_2?

$\{A\}\times\Omega_2$

P:

$\Omega_1 \backslash \Omega_2$	1	2	3	4	
A	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{10}{24}$
B	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{10}{24}$
C	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{4}{24}$
$\Omega_1\times\{2\}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{6}{24}$	

תשובה 1: אמ"מ כל שתי שורות (ולכן כל שתי עמודות) הן ת"ל זו בזו. (colrk = rowrk)

תשובה 2: ננסה לשחזר מי היו P_1, P_2
ראינו שבמכפלה של 2 מרחבי הסתברות:
$$\frac{10}{24}=P(\{A\}\times\Omega_2)=P_1(A)$$
כלומר סכומי השורות/הטורים משחזרים את P_1,P_2 (מכאן השם מארגינלי / שוליים)
עכשיו אפשר לבדוק אם לכל (w_1,w_2) אכן מתקבל
$$P((w_1,w_2)) \overset{?}{=} P_1(w_1)P_2(w_2)=P(w_1\times\Omega_2)P(\Omega_1\times w_2)$$
אם כן (ורק אם), $(\Omega_1\times\Omega_2, P)$ הוא מרחב (הסת') מכפלה.

בדוגמא: $P(A,2)=\frac{2}{24}\neq\frac{10}{24}\cdot\frac{6}{24}=P_1(A)P_2(2)$

איך לתאר מקרה שבו שני ניסויים כן משפיעים זה על זה?

ניסוי דו שלבי (בריג')

ניסוי דו שלבי: מורכב ממרחב הסתברות (Ω_1,P) "הניסוי הראשון" מרחב מדגם Ω_2, ולכל $w_1\in\Omega_1$ פו' הסתברות P_{w_1} על Ω_2.
רעיון: P_{w_1} מתארת את ההתנהגות בניסוי השני אחרי שיצא w_1 בניסוי הראשון.

בדוגמא: אני בוחר קובית D&D אקראית ומטיל אותה. הניסוי הראשון: איזו קוביה בחרתי. הניסוי השני: מה יצא בהטלה.

$\Omega_1=\{D4,D6,D8,D10,D12,D20\}$, $P(Dm)=\frac{1}{6}$

$\Omega_2=\{1,\dots,20\}$

$$P_{D4}(i)=\begin{cases}1/4 & 1\le i\le 4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

ובאופן כללי:

$$P_{D_m}(i) = \begin{cases} 1/m & 1 \le i \le m \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>הגדרה</u>: ניסוי דו-שלבי מגדיר הסתברות P_x על $\Omega_1 \times \Omega_2$ ע"י

$$P_x((w_1, w_2)) = P(w_1) \cdot P_{w_1}(w_2)$$

וקראו פונ' הסתברות (נקודתית)

בדוגמא:

$$\boxed{P_x((D8, 5)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}}$$

$$P_x((D8, 17)) = 0$$

$$P_x((D_m, i)) = \begin{cases} \frac{1}{6m} & 1 \le i \le m \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

שבנו את עצמכם אינטואיטיבית

$$P(\underbrace{\Omega_1 \times \{i\}}_{= \{(D_m, i) \mid m\}}) = \sum_m P((D_m, i))$$

<u>הערה</u>: שימו ♡ שאם $p_{w_1} = p_{w_1'}$ לכל $w_1, w_1' \in \Omega_1$ אזי ההסתברות המושרית ע"י הניסוי הדו שלבי היא הסתברות מכפלה. "הניסוי הראשון לא משפיע על השני".

<u>שאלה</u>: נתונה הסתברות P על $\Omega_1 \times \Omega_2$. איך להכריע האם היא ניתנת להצגה כניסוי דו שלבי?

אפשר להכליל לניסוי רב-שלבי

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_m$$

p - פ' הסתברות על Ω_1

$\forall w_1 \in \Omega_1$, P_{w_1} - פ' הסת' על Ω_2

$\forall (w_1, w_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, P_{w_1, w_2} - פ' הסת' על Ω_3

$\vdots$

$\forall (w_1, \dots, w_{m-1}) \in \dots$, $P_{w_1, \dots, w_{m-1}}$ - פ' הסת' על Ω_m

ניסוי רב שלבי מגדיר פ' הסתברות על $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_m$ ע"י:

$$P_x((w_1, \dots, w_m)) = P(w_1) P_{w_1}(w_2) P_{w_1, w_2}(w_3) \cdot \dots \cdot P_{w_1, \dots, w_{m-1}}(w_m)$$

(וזוהי פונ' הסתברות נק')

<u>נוסחת ההסתברות השלמה</u>

<u>טענה</u>: אם נתון מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ומאורע $A \in \mathcal{F}$

אזי לכל מאורע B מתקיים $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)$

<u>הוכחה</u>: הם זרים ואיחודם הוא B.

<u>הכללה</u>: אם $A_1,\dots,A_m$ זרים בזוגות ו-$\bigcup_{i=1}^m A_i=\Omega$ אזי לכל B
$P(B)=\sum_{i=1}^m P(B\cap A_i)$.

<u>טענה</u>: עבור $(\Omega,\mathcal{F},P)$, אם $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ סדרה של מאורעות זרים בזוגות $A_i\in\mathcal{F}$
ו-$\bigcup_{i=1}^\infty A_i=\Omega$ ["$\{A_i\}$ היא חלוקה של Ω"], אזי לכל $B\in\mathcal{F}$
$P(B)=\sum_{i=1}^\infty P(B\cap A_i)$.

<u>הוכחה</u>: $\{B\cap A_i\}_{i=1}^\infty$ הם זרים בזוגות ואיחודם הוא B. לכן הטענה
נובעת מ-σ-אדיטיביות.

הטענות הללו נקראות "נוסחת ההסתברות השלמה".

<u>דוגמא</u>: הטלה של קובית D&D אקראית: $\Omega=\{1,\dots,20\}$

מה ההסתברות לתוצאה שמתחלקת ב-3? קשה לחשב. ניקח מרחב מדגם גדול יותר, שבו
אני גם מציין איזו קוביה בחרתי: $\Omega=\{D4,\dots,D20\}\times[20]$.

לכל $m\in\{4,6,8,10,12,20\}$ נגדיר $A_m=\{Dm\}\times[20]$. זו חלוקה: $A_4\,\dot\cup\dots\dot\cup\, A_{20}=\Omega$

$$\underbrace{P(B)}_{\text{תוצאה מתחלקת ב-3}}=P(B\cap A_4)+P(B\cap A_6)+P(B\cap A_8)+P(B\cap A_{10})+\dots$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{20}$$

<u>שאלה</u>: מה אם נתונה חלוקה לא סופית: $\Omega=\dot\bigcup_{i\in I}A_i$. האם לכל B
מתקיים $P(B)=\sum_{i\in I}P(B\cap A_i)$?

10/11/20

<u>תשובה</u>: לא. אם (Ω,P) הוא מ"ה רציף ($P(\{\omega\})=0$)
אזי: $I=\Omega$, $A_i=\{i\}$ ואז לכל B $\sum_{i\in I}P(B\cap A_i)=0$
(כי $B\cap A_i$ יחידון או ריק). אבל $P(\Omega)=1$.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שזה <u>כן</u> נכון אם (Ω,P) מ"ה בדיד.

חסם האיחוד

טענה: יהי $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות במ"ה אז $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

הוכחה: נגדיר $B_1 = A_1$, $B_j = A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$ לכל $j \ge 2$.

אז $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות זרים, וכמו כן $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

לכן $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \underset{\text{מונוטוניות}}{\le} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ $\square$

(יתכן ש $1 \le \sum P(A_i)$ ואז לא לומדים כלום...)

תרגיל: הסיקו חסם איחוד עבור סדרה סופית של מאורעות.

הסתברות מותנית

"הטלתי קוביה ויצא מס' זוגי. מה הסיכוי שהוא 4?" $\frac{1}{3}$.

הגדרה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מ"ה (לאו דווקא בדיד), ויהי $B \in \mathcal{F}$ מאורע עם $P(B) > 0$. אז, לכל $A \in \mathcal{F}$, ההסתברות של A בהינתן B היא

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

בדוגמא: $B - \{2,4,6\}$ $A - \{4\}$ $\Leftarrow$ $P(A|B) = \frac{P(\{4\})}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

הרעיון: תמיד יתקיים $\boxed{P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)}$ (למשל) גם אם $P(A|B)$ לא מוגדר עם $P(B) = 0$, ואז מתקבל ($0 = 0 \cdot \text{לא מוגדר}$)

דוגמאות

- מה ההסתברות לקבל מס' זוגי בקוביה בהינתן שיצא קטן מ-4?

$$P(\{2,4,6\} \mid \{1,2,3\}) = \frac{P(\{2\})}{P(\{1,2,3\})} = \frac{1}{3}.$$

- אם P הסתברות אחידה על Ω (Ω סופי), אז

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

קיבלנו ש-P_B היא הס' אחידה על B "מורחבת" ל-Ω

לאו דווקא בדיד

<u>הגדרה</u>: אם $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מ"ה ו- $B \in \mathcal{F}$ עם $P(B)>0$, נגדיר פ' הסתברות מותנית ע"י B (על $\mathcal{F}$):

$$\underset{\overset{\Uparrow}{\mathcal{F}}}{P_B(A)} = P(A|B)$$

למשל: (Ω, P) - הטלת קוביה, B - תוצאה זוגית, אזי $P_B(\{i\}) = \begin{cases} 0 & \text{אי זוגי } i \\ 1/3 & \text{זוגי } i \end{cases}$

<u>טענה</u>: P_B היא פ' הסתברות.

<u>הוכחה</u>:
$$P_B(\Omega) = \frac{P(B\cap\Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ זרים בזוגות אזי

$$P_B\left(\bigcup A_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B)\right)}{P(B)} \underset{\text{ס-אדיטיביות}}{=} \frac{\sum P(A_i\cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i) \qquad \square$$

מה הקשר לניסוי דו שלבי?

$$P_\times((\omega_1,\omega_2)) = P_1(\omega_1)\cdot P_{\omega_1}(\omega_2)$$

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B)$$

הגדרנו!

12/11/20

יותר פורמלית:

נסמן מאורעות שוליים ע"י $(\cdot, \omega_2) := \Omega_1 \times \{\omega_2\}$ $(\omega_1, \cdot) := \{\omega_1\} \times \Omega_2$
ואפילו: $P(\Omega_1 \times \{\omega_2\}) = P((\cdot, \omega_2)) = P(\cdot, \omega_1)$

אם נתון ניסוי דו שלבי: $(\Omega_1, P), \{(\Omega_2, P_{\omega_1})\}_{\omega_1\in\Omega_1}$

ו- $P_\times(\omega_1,\omega_2) = P(\omega_1)\cdot P_{\omega_1}(\omega_2)$

מתאים להסתברות מותנה במאורעות שלמים:

$$P_X((\cdot,\omega_2)\mid(\omega_1,\cdot)) = \frac{P_X((\cdot,\omega_2)\cap(\omega_1,\cdot))}{P_X(\omega_1,\cdot)}$$

$$= \frac{P_X(\omega_1,\omega_2)}{P_X(\omega_1,\cdot)} = \frac{P(\omega_1)\cdot P_{\omega_1}(\omega_2)}{\sum\limits_{\omega_2'\in\Omega_2} P_X(\omega_1,\omega_2')} = \frac{P(\omega_1)\cdot P_{\omega_1}(\omega_2)}{\sum\limits_{\omega_2'} P(\omega_1)P_{\omega_1}(\omega_2')}$$

כי P_{ω_1} הסתברות

$$= \frac{P(\omega_1)P_{\omega_1}(\omega_2)}{P(\omega_1)} = P_{\omega_1}(\omega_2)$$

חיתוך של 3 מאורעות:

$$P(A\cap \underbrace{B\cap C}_{X}) = P(\overbrace{B\cap C}^{X})\, P(A\mid \overbrace{B\cap C}^{X})$$

$$= P(C)P(B|C)P(A|B\cap C)$$

דוגמא: בוחרים אדם אקראי. מה ההסתברות שהוא קרח, מכריס ושעיר?

$P(\quad) = P($קרח$)\cdot P($מכריס | קרח$)\cdot P($שעיר | קרח ומכריס$)$

תרגיל: הכלילו ל- $P(A_1\cap\ldots\cap A_n)$. **שאלה:** מה לגבי $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$?

התנייה כפולה: נזכיר ש- $P_B(A)=P(A|B)$. מיהו $(P_B)_{B'}$?

$$(P_B)_{B'}(A) = P_B(A|B') = \frac{P_B(A\cap B')}{P_B(B')} = \frac{\frac{P(A\cap B'\cap B)}{P(B)}}{\frac{P(B'\cap B)}{P(B)}}$$

(ובפרט)

$$= \frac{P(A\cap B'\cap B)}{P(B'\cap B)} = P(A|B\cap B') \quad \boxed{=(P_{B'})_B(A)}$$

כל זה עד כדי זה שדברים עשויים להיות לא מוגדרים אם חילקנו באפס (ואם $P(B\cap B')>0$ אין חלוקות ב-0).

חוק בייס הראשון:

$$P(A)P(B|A) = P(A\cap B) = P(B)P(A|B)$$

. לכן אם $P(A)>0$ אזי

חוק בייס: $P(B|A) = P(A|B)\cdot\frac{P(B)}{P(A)}$.

דוגמא: הטלתי קובית D&D אקראית וקבלתי 11. מה ההסתברות שבחרתי את D_{12}?

$$\overbrace{P(\text{בחרתי } D_{12} \mid \text{הטלתי } 11)}^{\text{קשה}} = \overbrace{P(\text{הטלתי } 11 \mid \text{בחרתי } D_{12})}^{\text{קל}} \cdot \frac{P(\text{בחרתי } D_{12})}{P(\text{הטלתי } 11)} = \frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{45}}$$

$$P(\text{הטלתי } 11) \overset{\text{הסתברות שלמה}}{=} \sum_{m=4,6,\dots,20} P(\text{הטלתי } 11 \cap \text{בחרתי } D_m) = 0+0+0+0+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{20}$$

נוסחת הסתברות שלמה נוספת:

יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה (לאו דווקא בדיד) ו- $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ או $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של Ω.

$i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$

$\bigcup_i A_i=\Omega$

אזי לכל $B\in\mathcal{F}$, $P(B)=\sum_i P(B|A_i)P(A_i)$

הוכחה: $P(B) \overset{\text{נה"ש}}{\underset{\text{ישנה}}{=}} \sum_i P(B\cap A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$ □

דוגמא:

$$P(\text{תוצאה } j \text{ בהטלת קובית D\&D אקראית}) = \sum_{m\in\{4,6,8,10,12,20\}} P(\text{הטלתי } j \mid \text{בחרתי את } D_m)\, P(\text{בחרתי את } D_m)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_m P(\text{הטלתי } j \mid \text{בחרתי } D_m) = \frac{1}{6}\sum_{\substack{m\in\{4,6,\dots,20\}\\ j\le m}} \frac{1}{m}.$$

שימו ♡: דילגנו על בחירת Ω, P. זה בסדר כל זמן שעושים חישובים נכונים. אנשים שונים גם יבחרו Ω, P שונים. למשל:

$$P(\text{בהטלת זוג קוביות מכפלת התוצאות זוגית} \mid \text{סכום התוצאות זוגי}) = P(\text{סכום זוגי} \mid \text{מכפלה זוגית})\cdot\frac{P(\text{מכפלה זוגית})}{P(\text{סכום זוגי})}$$

ויש בחירות שונות הגיוניות ל-(Ω,P) (זוגות סדורים/לא סדורים).

פעמים רבות מנסחים את בייס כך: בהינתן חלוקה $\{A_i\}_i$ (חלוקה סופית
או בת מנייה, או מלכתחילה מ"מ בדיד), לכל מאורע B

$$\underset{\text{בייס}}{P(A_i \mid B) =} \frac{\overbrace{P(B \mid A_i)\, P(A_i)}^{P(B\cap A_i)}}{\underbrace{\sum_j P(B \mid A_j)\, P(A_j)}_{\text{נה"ש}\ = P(B)}}$$

כמה מתוך $P(B)$ נופל $j=i$

17/11/20

הסקה בייסיאנית

$$\boxed{P\left(\text{דני חולה קורונה} \mid \text{דני קבל תוצאה חיובית בבדיקה}\right)} = \frac{P\left(\text{דני קבל תוצאה חיובית בבדיקה} \mid \text{דני חולה קורונה}\right) P\left(\text{דני חולה קורונה}\right)}{P\left(\text{דני קבל תוצאה חיובית בבדיקה}\right)}$$

0.9 "מהימנות הבדיקה"

$$= \frac{P\left(\text{תוצאה חיובית} \mid \text{אדם חולה}\right) \cdot P\left(\text{אדם חולה}\right)}{P\left(\text{תוצאה חיובית}\right)}$$

שיעור החולים באוכלוסיה ≈ 0.01

נה"ש

$$= \frac{P(\text{חיובי} \mid \text{חולה})\, P(\text{חולה})}{P(\text{חיובי} \mid \text{חולה})\, P(\text{חולה}) + P(\text{חיובי} \mid \text{בריא})\, P(\text{בריא})}$$

false positive נניח 0.05

שיעור הבריאים = 0.99

$$= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.9 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} = 0.15$$

דני לא מרוצה מהתוצאה שלו והולך לבדיקה נוספת. עכשיו ב- $P(\text{דני חולה})$ כבר לא נציב 0.01 אלא 0.15! זה נקרא "עדכון בייסיאני".

שאלה: אם נמשיך לעשות עוד ועוד בדיקות, עד לאיזה סיכוי נוכל להגיע?

נוסחת בייס לשלשה מאורעות

$$P(A|B\cap C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}=\frac{P(B|A\cap C)P(A\cap C)}{P(B|C)P(C)}$$

$$=\frac{P(B|A\cap C)P(A|C)\cancel{P(C)}}{P(B|C)\cancel{P(C)}}$$

דוגמא יפה: 3.34 (או ג'י סימפסון) עמ' 61.

$\boxed{19/11/20}$

תלות ואי-תלות

איך לפרמל את הרעיון שמאורעות אקראיים אינן משפיעות זו על זו?
(בניסוי דו-שלבי, $\Leftrightarrow$ p_{ω_1} לא תלוי ב-ω_1 $\Leftrightarrow$ מרחב הסתברות המכפלה)

רעיון: מתי ב-(Ω, P) המאורע B לא משפיע על המאורע A?
(למשל: $\Omega=\{H,T\}^2$, $P\equiv\frac{1}{4}$: $B=$ הטלה 1 בה $H=(H,\cdot)$
$A=$ הטלה 2 בה $H=(\cdot,H)$)

כש- $P(A)=P(A|B)\overset{\prime\prime}{=}P(A\cap B)/P(B)$!

הגדרה: נאמר ש-A ב"ת ב-B (או ש-A,B מאורעות ב"ת) אם $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

זה כמעט כמו $P(A)=P(A|B)$ רק שזה גם מוגדר אם $P(B)=0$.

ש.ב ♡: אם A ב"ת ב-B אזי B ב"ת ב-A. לכן מוצדק (A,B מאורעות ב"ת).

אם A,B ב"ת ו-$P(B)>0$ אזי $P(A)=P(A|B)$.

טענה: אם $P(B)\in\{0,1\}$ אזי A,B ב"ת לכל מאורע A.
"מאורע שתמיד קורה / לא קורה לא יכול ללמד כלום".

הוכחה: אם $P(B)=0$, אזי

מונוטוניות

$$P(A\cap B) \le P(B) = 0 = P(A)P(B)$$

אם $P(B)=1$ אזי $P(B^c)=0$ ולכן

σ-אדיטיביות

$$P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap B^c) = P(A) - 0 = P(A)P(B) \quad \square$$

מונוטוניות

דוגמאות

בהטלת קוביה הוגנת, A - הטלה זוגית, B - הטלה שמתחלקת ב-3.

$$P(A\cap B) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = P(\{2,4,6\})P(\{3,6\}) = P(A)P(B)$$

״משפט השאריות הסיני - מידע מודולו 2 ומודולו 3 אינם מתקשרים״

C = הטלה שמתחלקת ב-5. דווקא A,C תלויים:

$$P(A\cap C) = 0 \ne \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = P(A)P(C)$$

אבל ב-D_{10} הם יהיו ב״ת.

- ב-D_{10}, מה לגבי A ו-B (זוגי ומתחלק ב-3)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{6\})}{P(\{3,6,9\})} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}$$

אבל: $P(A) = \frac{1}{2}$

טענה: אם A,B ב״ת אזי גם A,B^c ב״ת ($\Leftarrow A^c,B^c$ ב״ת וכו׳)

הוכחה:

$$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B)$$
$$= P(A)(1-P(B)) = P(A)P(B^c) \quad \square$$

מה הקשר לניסוי דו שלבי?

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$
$$P \quad \{P_{\omega_1}\}_{\omega_1\in\Omega_1}$$

ראינו ש-

$$P_x(\omega_1,\omega_2) = P_x((\omega_1,\cdot))\,P_x((\cdot,\omega_2)\,|\,(\omega_1,\cdot))$$

אם הניסויים ״לא משפיעים זה על זה״ אזי אנחנו מניחים ש-

$$P_x((\cdot,\omega_2)\,|\,(\omega_1,\cdot)) = P_x((\cdot,\omega_2))$$

ולכן

$$P_x((\omega_1,\omega_2)) = P_x((\omega_1,\cdot))\cdot P_x((\cdot,\omega_2))$$

כלומר $(\omega_1,\cdot),(\cdot,\omega_2)$ הם מאורעות ב״ת. (כי הוא החיתוך שלהם).

וזה בדיוק המקרה של הסתברות מכפלה.

בחיים האמיתיים: Ω - אנשים B - מעשן A - מת מסרטן

מעניין לבדוק: $P(A|B) \overset{?}{=} P(A)$ (אבל! קורלציה לא מוכיחה סיבתיות)

הערה: אם $P(A|B) > P(A)$ נאמר ש-B מאשש את A.

$P(A|B) = P(A)$ ב״ת

$P(A|B) < P(A)$ נאמר ש-B מחליש את A.
מרושש

מה לגבי 3 מאורעות?

דוגמא: $\Omega = \{H,T\}^2$ $P \equiv \frac{1}{4}$.

$A = (H,\cdot)$

$B = (\cdot, H)$

$C = \{\omega \mid \omega_1 = \omega_2\}$ = 2 הטלות זהות $= \{(H,H),(T,T)\}$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} P(A\cap B) &= \tfrac{1}{4} = P(A)P(B) \\ P(A\cap C) &= \tfrac{1}{4} = P(A)P(C) \\ P(B\cap C) &= \tfrac{1}{4} = P(B)P(C) \end{aligned}\right\}$$

$\left(\begin{aligned} A\cap B &= A\cap C \\ &= B\cap C \\ &= A\cap B\cap C \end{aligned} \right)$

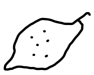
האם אלה מאורעות ב״ת?

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(C \mid A\cap B) = 1 \neq \frac{1}{2} = P(C)$$

לכן נאמר שהם תלויים. כן נאמר שהם ב״ת בזוגות כי כל זוג הוא ב״ת.

<u>הערה:</u> לדרוש $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$

ניקח $A = B = (H,\cdot)$, C - בהטלה השנייה יצא לימון 

אז' $P(A\cap B\cap C) = 0 = P(A)P(B)P(C)$ אבל $P(A|B) = 1 \neq \frac{1}{2} = P(A)$.

לכן צריך הגדרה יותר עדינה.

הגדרה: מאורעות $A_1,\dots,A_n$ נקראים ב"ת אם

$$\forall J\subseteq[n]\qquad P\left(\bigcap_{i\in J}A_i\right)=\prod_{i\in J}P(A_i)$$

עוד הגדרה: אם $B_1,\dots,B_n$ מאורעות וגם A, נאמר ש-A ב"ת ב-$B_1,\dots,B_n$ אם

$$\boxed{\forall J\subseteq[n]:\ P\left(A\,\middle|\,\bigcap_{i\in J}B_i\right)=P(A)\ \text{או}\ P\left(\bigcap_{i\in J}B_i\right)=0}\,.$$

תרגיל: אם $0<P(A_1\cap\dots\cap A_n)$ אזי $A_1,\dots,A_n$ ב"ת אמ"מ לכל $1\le i\le n$ המאורע A_i ב"ת במשותף: $A_1,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n$.

הגדרה: אוסף $\{A_i\}_{i\in I}$ נקרא ב"ת אם $\{A_i\}_{i\in J}$ ב"ת לכל $J\subseteq I$ סופי.

תרגיל: סדרה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ נקראת ב"ת אם $A_1,\dots,A_n$ ב"ת לכל n.

דוגמא: אם $(\Omega_i,P_i)_{i=1}^{n}$ מ"ה, ו-(Ω,P) מ"ה המכפלה אזי לכל $A_1\subseteq\Omega_1,\dots,A_n\subseteq\Omega_n$, המאורעות
$(A_1,\cdot,\cdot,\dots,\cdot),\ (\cdot,A_2,\cdot,\dots),\ \dots,\ (\cdot,\cdot,\dots,\cdot,A_n)$
הם ב"ת. המלצה: להוכיח.

טענה: אם A ב"ת ב-$B_1,\dots,B_n$ הוא גם ב"ת ב-
$B_1,\dots,B_n,B_1^c,\dots,B_n^c$

הוכחה: מספיק להראות שהוא ב"ת ב-$B_1,\dots,B_n,B_1^c$.

נתון: צ"ל $P(A)=P\left(A\,\middle|\,\bigcap_{i\in J}B_i\right)$ או $P\left(\bigcap_J B_i\right)=0$ לכל $J\subseteq[n]$ $\longrightarrow$ ☆

ו- $P(A)=P\left(A\,\middle|\,B_1^c\cap\left(\bigcap_{i\in J}B_i\right)\right)$ או $P\left(B_1^c\cap\bigcap_J B_i\right)=0$ לכל $J\subseteq[n]$

☆ כבר נתון. ב-$\uparrow$, אם $1\in J$ אזי $\emptyset=B_1^c\cap\bigcap_J B_i$

ולכן $P\left(B_1^c\cap\bigcap_J B_i\right)=0$. אם $1\notin J$ אזי

איחוד זר

$$P\left(A\cap B_1^c\cap\bigcap_J B_i\right)=P\left(A\cap\bigcap_J B_i\right)-P\left(A\cap B_1\cap\bigcap_J B_i\right)$$

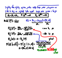
$$\overset{A\ \text{ב"ת ב-}\ B_1,\dots,B_n}{=}P(A)\,P\left(\bigcap_{i\in J}B_i\right)-P(A)\,P\left(B_1\cap\bigcap_{i\in J}B_i\right)$$

$$= P(A)\left(P\left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) - P\left(B_1 \cap \bigcap_{i\in J} B_i\right)\right)$$

$$= P(A)\, P\left(B_1^c \cap \bigcap_{i\in J} B_i\right)$$

איחוד זר

אם לא -ש $P\left(B_1^c \cap \bigcap_J B_i\right)=0$



אז -ש $P\left(A \mid B_1^c \cap \bigcap_J B_i\right) = P(A)$ כמו שרצינו.

24/11/20

משתנים מקריים

משתנה מקרי X על מ"ה $(\Omega, 2^\Omega, P)$ הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

דוגמאות: גובה של ירושלמי אקראי: Ω - הירושלמים $\quad X(\text{אדם}) = \text{גובה האדם}$

- מס' הראשים ב-n הטלות מטבע (הוגן):

$$\Omega=\{H,T\}^n \qquad P\equiv \frac{1}{2^n} \qquad X(\omega)=\left|\{1\le i\le n \mid \omega_i=H\}\right|$$

- סכום 2 קוביות (הוגנות). (יש 2 Ω הגיוניים!)

$$\Omega=[6]^2 \qquad P\equiv\frac{1}{36} \qquad X(\omega)=\omega_1+\omega_2$$

משתנים מקריים (מ"מ) מגדירים מאורעות: אם X מ"מ על מ"ה (Ω,P) אז אפשר להסתכל על $\{X=7\}:=\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=7\}$

$\{X\le 10\}$, $\{X \text{ זוגי}\}$, $\{X\in\{2,5,14\}\}$, $\{X=Y\}:=\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=Y(\omega)\}$

אם Y עוד מ"מ על (Ω,P)

דוגמא: נטיל 2 קוביות (הוגנות). יהי X סכומן ו-Y מכפלתן.

אז:

במודל $\{X=4\}=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

$\{X=Y\}=\{(2,2)\}$

יתרה מכך, נקצר עוד ונסמן:

$$P(X=7)=P(\{X=7\})=P(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=7\})=P(X^{-1}(7))$$

(אם $f:S\to T$ פונקציה $\quad f^{-1}(t)=\{s\in S\mid f(s)=t\} \quad \forall t\in T$

קבוצות כלשהן $\quad f^{-1}(A)=\{s\in S\mid f(s)\in A\} \quad \forall A\subseteq T$)

דוגמא: יהי X סכום 2 קוביות הוגנות. אז: $P(X=4)=\frac{1}{12}$.

(בין אם כ- $\frac{3}{36}$ או כ- $\frac{1}{36}+\frac{1}{18}$!).

<u>פעולות על מ"מ</u>: אם $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ מ"מ על אותו מ"ה, אפשר לעשות איתם אריתמטיקה: $X+Y$, $X\cdot Y$, $X-Y$, $3X+5Y$, X^Y, ...

למשל $Z=X+Y$ הוא המ"מ המוגדר $Z(\omega)=X(\omega)+Y(\omega)$.

<u>דוגמא</u>: המזכיר המבולבל מכניס n מכתבים ל- n מעטפות בסדר אקראי. יהי X - מס' המכתבים שמגיעו נכון.

לכל $1\le i\le n$ נגדיר $Y_i(\omega)=\begin{cases}1 & \omega(i)=i\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ $\quad(\Omega=S_n)$

כלומר Y_i הוא $1/0$ לפי האם המכתב ה- i מוען נכונה.

אז: $X=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$!

כי: $\underbrace{X(\omega)}_{\substack{\text{מס' ה-}i\\ \text{כך ש-}\ \omega(i)=i}}=\underbrace{Y_1(\omega)}_{\substack{1\ \text{אם}\\ \omega(1)=1\\ \text{0- אחרת}}}+\dots+\underbrace{Y_n(\omega)}_{\substack{1\ \text{אם}\\ \omega(n)=n\\ \text{0- אחרת}}}\quad \forall\omega\in S_n$

כל Y_i הוא ב' פסקל: $P(Y_i=1)=\frac{1}{n}$, $P(Y_i=0)=\frac{n-1}{n}$.

<u>אינדיקטורים</u>: אם (Ω,P) מ"ה ו- A מאורע, האינדיקטור של A הוא המ"מ $\mathbb{1}_A:\Omega\to\mathbb{R}$ המוגדר $\mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

למשל, בבעיית המזכיר המבולבל $Y_i=\mathbb{1}_{A_i}$ כש- $A_i=\{\omega\in S_n\mid \omega(i)=i\}$.
A_i הוא המאורע שמכתב i נשלח נכון.

כל מ"מ משרה מרחב הסתברות על $\mathbb{R}$ (כמרחב מדגם): אם X מ"מ על (Ω,P), נגדיר מ"ה חדש $(\mathbb{R},2^{\mathbb{R}},P_X)$ ע"י:

ליחידונים: $P_X(7)=P(X=7)=P(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=7\})=P(X^{-1}(7))$

ול- $A\subseteq\mathbb{R}$ כללי: $P_X(\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{A}})=P(X\in A)=P(X^{-1}(A))$

נוודא ש- $(\mathbb{R},P_X)$ הוא אכן מרחב הסתברות:
$P_X(\mathbb{R})=P(X\in\mathbb{R})=P(\Omega)=1$

ועבור $A_i\subseteq\mathbb{R}$ זרות בזוגות אז:

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup A_i\right)\right) = P\left(\bigcup X^{-1}(A_i)\right) =$$

X פונקציה

$$\overset{\sigma\text{-אדיטיביות}}{=} \sum P\left(X^{-1}(A_i)\right) = \sum P_X(A_i) \qquad \square$$

P_X נקרא **ההתפלגות** של X.

$\boxed{26/11/20}$

תזכורת: מ"מ X על מ"ה (Ω, P) (כג פסק) פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$. ההתפלגות של X לפ' ההסתברות

$$P_X(\underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}}}{S}) = P(X\in S) = P(\underbrace{X^{-1}(S)}_{\subseteq\Omega})$$

<u>הגדרה</u>: X נקרא **משתנה מקרי בדיד** אם P_X היא פ' הסתברות בדידה (ראינו 4 קריטריונים שקולים לכך, למשל אם $\sum_{\alpha\in\mathbb{R}} P_X(\alpha) = 1$) כלומר P_X מתקבל מפ' הסתברות נקודתית, שנסמן p_X ונכנה **ההתפלגות הנקודתית** של X.

<u>לדוגמא</u>: אם $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מתאר הגרלת מס' אחיד בקטע $[0,1]$ ו-X הוא הספרה השלישית אחרי הנקודה אז $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ לא מ"ה בדיד אבל X כן מ"מ בדיד: ההתפלגות הנקודתית של X היא

$$p_X(\alpha) = \begin{cases} 1/10 & \alpha = 0,\dots,9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>דוגמאות</u>: יהי (Ω, P) הניסוי של 2 הטלות מטבע הוגן. יהי X מספר הראשים ו-Y מס' הזנבות.

$$\Omega = \{H,T\}^2 \qquad X(\omega) = \left|\{1\le i\le 2 \mid \omega_i = H\}\right|$$

שימו ♡: $Y = 2-X$ (כלומר $\forall\omega: Y(\omega) = 2 - X(\omega)$).

מתקבל:

$$p_X(\alpha) = \begin{cases} 1/4 & \alpha = 0, 2 \\ 1/2 & \alpha = 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$P_X(S) = \sum_{\alpha\in S} p_X(\alpha) \longleftarrow (\text{ממ"ב})$$

שימו לב ש- $p_Y = p_X$ $(\Leftarrow P_Y = P_X)$.

נאמר ש-X ו-Y שווי-התפלגות. אבל הם לא שווים!

<u>סימונים:</u> ל-2 מ"מ X,Y $\boxed{\text{על אותו מ"ה } (\Omega, P)}$ מסמנים

$X=Y$: $\forall \omega\in\Omega: X(\omega)=Y(\omega)$ X ו-Y שווים.

$X \overset{d}{=} Y$ (distribution) : X,Y שווי התפלגות: $P_X(S)=P_Y(S)$ $\forall S\subseteq\mathbb{R}$

$X \overset{a.s.}{=} Y$ (almost surely) : X ו-Y שווים כמעט תמיד: $P(X=Y)=1$

למשל ($\Omega=\{H,T\}$, $P(H)=1$, $P(T)=0$ מטבע מאוד לא הוגן . $X(H)=Y(H)=7$, $X(T)=9\neq 8=Y(T)$ אזי $X \overset{a.s}{=} Y$)

הרבה פעמים מה שמעניין אותנו זה רק ההתפלגות של מ"מ ולא בהכרח ה-ω שהוא מקבל. לכן התפלגות זה מושג מרכזי.

לדוגמא:

תוחלת

תוחלת זו הגרסה ההסתברותית לממוצע. "הממוצע" של המון הטלות קוביה יוצא בערך "3.5". "מטבע" מוטה $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ מס' הראשים ב-n הטלות יהיה בערך $\frac{2}{3}n$ כש-n מאוד גדול.

<u>הגדרה:</u> התוחלת של מ"מ מקרי בדיד X היא

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha\cdot P_X(\alpha) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

expectation

בכל סדר סכימה.

אם הטור לא מתכנס או מתכנס בתנאי נאמר ש-X חסר-תוחלת.

אזהרה: בספר אם $\mathbb{E}(X)=\pm\infty$ גם אומרים ש-X חסר תוחלת

הערה: מכיוון ש-X בדיד, $0<P_X(\alpha)$ רק עבור $\aleph_0 \geq$ α שונים).

<u>אבחנה</u>: אם X מ"מ על מ"ה בדיד (Ω, P) אזי

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha P_X(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=\alpha}} P(\omega)$$

שינוי סדר הסכימה

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$$

לפעמים זה שימושי, אבל לעניין יותר קרובות נוח לשכוח את Ω ולדעת שאפשר להסיק את $\mathbb{E}(X)$ מהתפלגות X.

<u>מסקנה</u>: אם X ו-Y שווי התפלגות אזי $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ (X ו-Y גם יכולים להיות על מ"ה שונים!).

<u>הוכחה</u>: ההגדרה לא השתמשה ב-(Ω, P), רק ב-P_X.

<u>התפלגויות נפוצות</u>

יהי $0 \leq p \leq 1$.

נאמר שמ"מ X מתפלג "ברנולי עם סיכוי p" אם

$$\boxed{P_X(1) = p \qquad P_X(0) = 1-p}$$

(ולכל $\alpha \notin \{0,1\}$ $P_X(\alpha) = 0$)

מסמנים זאת $X \sim Ber(p)$.

<u>טענה</u>: אם $X \sim Ber(p)$ אזי $\mathbb{E}(X) = p$.

<u>הוכחה</u>: $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot P_X(0) + 1 \cdot P_X(1) = p$.

$0 < p \leq 1$
נבחר

נאמר ש-X מתפלג "גאומטרית עם סיכוי p" (נסמן $X \sim Geo(p)$) אם

$$\boxed{P_X(n) = \begin{cases} p(1-p)^{n-1} & n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}}$$

<u>דוגמא</u>: נתבונן בסדרת הטלות של מטבע עם $P(H) = p$ שאינן מספיעות זו על זו, ויהי X - הבא של ההטלה

X = הטלה בה התקבל H בפעם הראשונה, ו-27 אם לא התקבל H.

פורמלית: $\Omega=\{H,T\}^{\mathbb{N}_{\geq 1}}$, $\forall i: P(\underbrace{\{w \mid w_i=H\}}_{A_i})=p$

והמאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ב"ת.

$$X(w)=\begin{cases}\min\{n \mid w_n=H\} & H\in w\\ 27 & H\notin w\end{cases}$$

אז: $X\sim Geo(p)$:

$$P_X(n)=P(A_1^c\cap A_2^c\cap\ldots\cap A_{n-1}^c\cap A_n)$$

$$\overset{\text{הוכחנו}}{=} P(A_1^c)P(A_2^c)\cdot\ldots\cdot P(A_{n-1}^c)P(A_n)$$

שאם A_i ב"ת גם A_i, A_i^c.

$$=(1-p)(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)\cdot p=p(1-p)^{n-1}$$

בתרגול: הוכיחו ש- $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i^c\right)=0$, כלומר almost surely נראה H.

טענה: אם $X\sim Geo(p)$ אז $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$.

"בממוצע, צריך לחכות 6 הטלות כדי לקבל 5 בקוביה".

הוכחה: $\boxed{\text{נסמן } q=1-p}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_X(n)=p\sum_{n\geq 1}n(1-p)^{n-1}$$

$$=p\sum_{n\geq 1}nq^{n-1}=p\sum_{n\geq 1}\sum_{m=1}^{n}q^{n-1}\underset{\text{(טור חיובי)}}{\overset{\text{ס"ס}}{=}}p\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}q^{n-1}$$

$$=p\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}\cdot\frac{1}{1-q}=\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}$$

נאמר ש-X מתפלג בינומית (n,p) (כש-$n\in\mathbb{N}_{\geq 0}$ ו-$0\leq p\leq 1$) אם $\boxed{P_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$. נסמן $X\sim Bin(n,p)$.

דוגמה: מס' הטלות H ב-n הטלות מטבע מוטה - p (חישבנו!)

טענה: אם $X\sim Bin(n,p)$ אז $\mathbb{E}(X)=np$. הוכיחו!

נאמר ש-X מתפלג "פואסון עם תוחלת λ" אם

$$\forall n\in\mathbb{N}_0:\quad \boxed{P_X(n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}}$$

$$X\sim Poi(\lambda)$$

<u>טענה</u>: אם $X\sim Poi(\lambda)$ אזי $\mathbb{E}(X)=\lambda$.

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{ne^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

רעיון: $Poi(\lambda)=Bin\left(\infty,\frac{\lambda}{\infty}\right)$ ...

$\boxed{1/12/20}$

<u>תזכורת</u>:

ברנולי: $0/1$ הצלחה/כישלון בסיכוי p

ברנולי $\rightarrow$ בינומי (מס' הצלחות ב-n חזרות)

ברנולי $\rightarrow$ גאומטרי (מיקום הצלחה ראשונה)

בינומי $\rightarrow$ פואסון: $n\to\infty$, $p\to 0$, $np=\lambda$ fixed

גאומטרי $\dashrightarrow$ זמן עד הצלחה ראשונה "מעריכית" זו כבר התפלגות לא בדידה

<u>טענה</u>: פואסון זה גבול של בינומי עם $n\to\infty$:

$$P_{Bin(n,\frac{\lambda}{n})}(k)\xrightarrow{n\to\infty}P_{Poi(\lambda)}(k)$$

<u>הוכחה</u>:

$$P_{Bin(n,\frac{\lambda}{n})}(k)=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\underbrace{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}}_{}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

משתנים מותנים

אם X מ"מ על (Ω,P), ו-B מאורע עם סיכוי חיובי, אפשר להתנות את X ב-B:

$$P_{X|B}(S):=P(\{X\in S\}|B),\qquad S\subseteq\mathbb{R}$$

$$=P(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\in S\}|B)=\frac{P(\{X\in S\}\cap B)}{P(B)}$$

כך גם מתלכד עם $P_B(X\in S)$.

אפשר לחשב על $(X|B)$ כהתפלגות. למשל: $(X|B)\sim Bin(n,p)$

פרוש: $P_{X|B}(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ $\quad \forall k\in\mathbb{N}$

קונספט יפה - חסר הזיכרון של משתנה גאומטרי:

<u>טענה</u>: אם $X\sim Geo(p)$ אז' $\forall m: P(X=n|X>m)=P(X=n-m)$ $\quad \forall n>m$

ובמילים אחרות $(X-m|X>m)\sim Geo(p)$

<u>הוכחה</u>:

$$P(X=n|X>m)=\frac{P(\{X=n\}\cap\{X>m\})}{P(X>m)}=\frac{P(X=n)}{1-P(X\le m)}$$

$$=\frac{pq^{n-1}}{1-(p+pq+\ldots+pq^{m-1})}=\frac{pq^{n-1}}{1-\cancel{p}\frac{1-q^m}{\cancel{1-q}}}=pq^{n-m-1}$$

לכן: $P(X-m=n|X>m)=P(X=m+n|X>m)=pq^{n-1}=P(X=n)$

גם ההיפך נכון: אם X נתמך על $\mathbb{N}$ וחסר זכרון אז' $X\sim Geo(p)$.

$\boxed{3/12/20}$

<u>טענה</u>: אם X מ"מ שנתמך על $\overbrace{\mathbb{N}_{\ge1}}^{P(X\in\mathbb{N}_{\ge1})=1}$, חסר זכרון (ונניח גם $P(X>1)>0$) אז' X מתפלג גאומטרית.

$$P(X=n|X>m)=P(X=n-m)$$

<u>הוכחה</u>:

$$P(X>n)=P(X>1)\cdot P(X>2|X>1)\cdot P(X>3|X>2)\cdot\ldots\cdot P(X>n|X>n-1)=\star$$

(כי: $P(\cap A_i)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots$)

אבל: $P(X>\overset{m+1}{2}|X>\overset{m}{1})=\sum_{n=\underset{m+2}{3}}^{\infty}P(X=n|X>1)\underset{\text{חוסר זיכרון}}{=}\sum_{n=\underset{m+2}{3}}^{\infty}P(X=n-1)=P(X>1)$

לכן $\star=P(X>1)P(X>1)\cdot\ldots\cdot P(X>1)=P(X>1)^n$

נגדיר $q=P(X>1)$ ו- $p=1-q$ ונקבל

$\square$ $P(X=n)=P(X>n-1)-P(X>n)=q^{n-1}-q^{n}=pq^{n-1}=\mathbb{P}_{Geo(p)}(n)$

(בדקו: ש- $P(X>1)>0$ וחוסר זכרון נותן $P(X>n)>0$ לכל n).

<u>הגדרה:</u> התוחלת המותנית של מ"מ X <u>בדיד</u> בהינתן מאורע A עם $P(A)>0$

היא $\mathbb{E}(X|A):=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\alpha\cdot P(X=\alpha|A)=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\alpha\cdot P_{X|A}(\alpha)$

<u>נוסחת התוחלת השלמה:</u> אם $\{A_i\}$ חלוקה בת מנייה של Ω אז

לכל מ"מ בדיד X בעל תוחלת מתקיים $\mathbb{E}(X)=\sum_i \underbrace{P(A_i)\mathbb{E}(X|A_i)}_{\text{כשנפרש לא מוגדר}\cdot\text{אפס}=\text{אפס}}$

<u>הוכחה:</u> $\mathbb{E}(X)=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\alpha\cdot P_X(\alpha)\underset{\text{נ"ש}}{=}\sum_{\alpha}\alpha\sum_i P(A_i)P(X=\alpha|A_i)$

$=\sum_i P(A_i)\sum_\alpha \alpha P(X=\alpha|A_i)=\sum_i P(A_i)\cdot\mathbb{E}(X|A_i)$

מותר לשנות סדר סכימה כי הטור מתכנס בהחלט לפי הגדרת תוחלת

<u>דוגמא:</u> X = הטלת קובית D&D אקראית:

A_m הוא המאורע "בחרנו בקובייה D_m", ואז

$A_4,A_6,A_8,A_{10},A_{12},A_{20}$ היא חלוקה של Ω ולכן

$\mathbb{E}(X)=\sum_m P(A_m)\mathbb{E}(X|A_m)=\sum_m\frac{1}{6}\cdot\frac{1+m}{2}$

הבינו מדוע!

כמה משתנים מקריים

אם X,Y מ"מ על מ"ה (Ω,P), לא מספיק להבין את P_X,P_Y

כדי להבין דברים קשורים בשני המשתנים (למשל את $Z=X+Y$)

<u>לדוגמא:</u> אם X מס' הראשים בשתי הטלות מטבע ו- Y מס' הזנבות

אז $P_X=P_Y=\begin{cases}1/2 & 1\\ 1/4 & 0,2\end{cases}$ ו- $P_Z(2)=P_{X+Y}(2)=1$

לעומת זאת אם ניקח 4 הטלות מטבע, ו- X יהיה מס' הראשים מבין 2 ההטלות הראשונות ו- Y מס' הזנבות מבין 2 ההטלות האחרונות

אז עדיין $P_X=P_Y=\begin{cases}1/2 & 1\\ 1/4 & 0,2\end{cases}$ אבל עכשיו $Z\sim Bin(4,\frac{1}{2})$ (כי ספרנו הצלחות בניסויים ב"ת ברנוליים)

הפתרון הוא להתבונן בהתפלגות המשותפת:

<u>הגדרה</u>: עבור מ"מ X,Y על אותו מ"ה (Ω,P), ההתפלגות המשותפת שלהם היא:

$$P_{X,Y}(\overset{\mathbb{R}}{\overset{\Downarrow}{a}},\overset{\mathbb{R}}{\overset{\Downarrow}{b}}) = P(X=a \wedge Y=b) = P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=a, Y(\omega)=b\})$$

ובאופן כללי יותר:

$$P_{X,Y}(\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap\shortparallel}{S}},\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap\shortparallel}{T}}) = P(X\in S \wedge Y\in T)$$

<u>תרגיל</u>: $P_{X,Y}$ היא פונקצית הסתברות על $\mathbb{R}^2$.

<u>דוגמא</u>: נטיל 2 קוביות וניקח את X להיות הגדולה מביניהן ו-Y הקטנה מביניהן.

$P_{X,Y}$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	$1/18$	$1/36$	0	0	0	
3	$1/18$	$1/18$	$1/36$	0	0	
4	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/36$		
5	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	
6						
סכום	$\frac{5}{18}+\frac{1}{36}$	$\frac{4}{18}+\frac{1}{36}$				
	$P_Y(1)$	$P_Y(2)$				

$P_{X,Y}(3,5)$

מתוך ההתפלגות המשותפת $P_{X,Y}$ אפשר לשחזר את P_X ו-P_Y:

$$P_X(S) = P_{X,Y}(S,\mathbb{R})$$

P_X, P_Y נקראות ההתפלגויות השוליות של ההתפלגות המשותפת $P_{X,Y}$.

באופן כללי יותר, אם $X_1,\dots,X_n$ מ"מ על (Ω,P), נגדיר את ההתפלגות המשותפת שלהם $P_{X_1,\dots,X_n}(S_1,\dots,S_n) := P(\forall i: X_i\in S_i)$ כפ' הסתברות על $\mathbb{R}^n$.

אפשר לחשוב על $X_1,\dots,X_n$ כמ"מ אחד שמקבל ערכים ב-$\mathbb{R}^n$, כלומר $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

X נקרא מ"מ וקטורי. ואז:

$$P_X(\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\vec{v}}}) = P_{X_1,\dots,X_n}(v_1,\dots,v_n)$$

$$P_X(\underset{S_i\subseteq\mathbb{R}\text{ כש-}}{\underbrace{S_1\times S_2\times\dots\times S_n}}) = P_{X_1,X_2,\dots,X_n}(S_1,\dots,S_n) = P(X^{-1}(S_1\times\dots\times S_n))$$

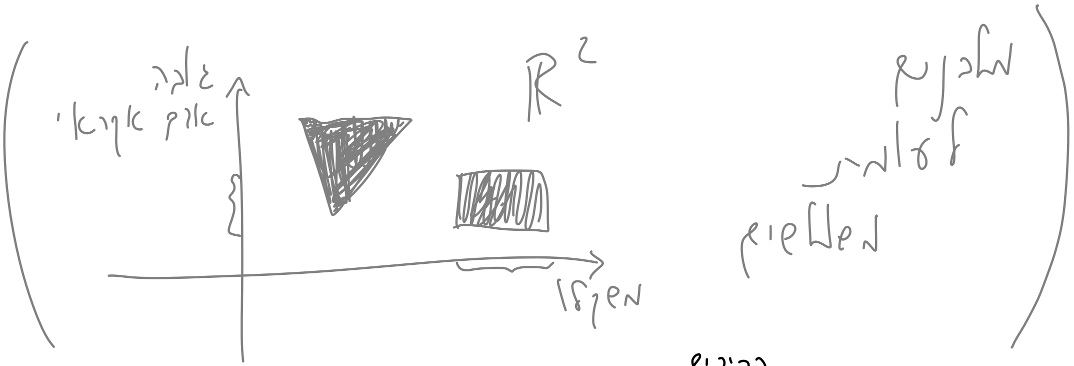
מה לגבי $P_X(A)$ ל-$A\subseteq\mathbb{R}^n$ כללית???

טענה: $X=(X_1,\dots,X_n)$ (מ"מ וקטורי) הוא בדיד (כלומר P_X היא פ' הסתברות בדידה על $\mathbb{R}^n$) אמ"ם כל X_i בדיד.

4.20 בספר

מסקנה: לכל $A\subseteq\mathbb{R}^n$:

$$P_X(A)=\sum_{\vec{v}\in A} P_X(\vec{v}) \quad \left(=\sum_{\vec{v}\in A} P_{X_1,\dots,X_n}(v_1,\dots,v_n)\right)$$



בתחתית ההוכחה $\{X\notin S\}\subset$ צריך להיות $\{X\notin S\}=$

נחזור לבעיית הסכום: X,Y מ"מ (בדידים), $Z=X+Y$. אזי:

$$P_Z(\gamma)=\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\\ \alpha+\beta=\gamma}} \underbrace{P_{X,Y}(\alpha,\beta)}_{\text{0 למעט מס' בן מניה של } \mathbb{R}^2\ni(\alpha,\beta)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} P_{X,Y}(\alpha,\gamma-\alpha)$$

תרגיל: אם $X_1,\dots,X_n$ ו- $Y_1,\dots,Y_n$ מ"מ אזי $X\overset{a.s.}{=}Y$ (כמ"מ וקטוריים) אמ"ם לכל i: $X_i\overset{a.s.}{=}Y_i$. מה לגבי $X\overset{d}{=}Y$ ו- $X_i\overset{d}{=}Y_i$?

תלות

נאמר שמ"מ X,Y (על אותו מ"ה) הם ב"ת אם המאורעות שהם מגדירים הם ב"ת. כלומר: $\forall S,T\subseteq\mathbb{R}$, המאורעות $\{X\in S\},\{Y\in T\}$ בלתי תלויים. ניסוח שקול:

$$P_{X,Y}(S,T)=P(\{X\in S\}\cap\{Y\in T\})=P(X\in S)P(Y\in T)=P_X(S)P_Y(T)$$

כלומר, $P_{X,Y}$ היא בדיוק הסתברות המכפלה של P_X ו- P_Y.

(לסיכום: X,Y ב"ת אם ההתפלגות המשותפת שלהם היא מכפלת ההסתברויות השוליות שלהם)

הגדרה: $X_1,\dots,X_n$ הם ב"ת אם לכל $S_1,\dots,S_n\subseteq\mathbb{R}$ המאורעות $\{X_1\in S_1\},\dots,\{X_n\in S_n\}$ ב"ת.

טענה: $X_1,\dots,X_n$ הם ב"ת אמ"ם ההתפלגות המשותפת $P_{X_1,\dots,X_n}$ היא מכפלת ההתפלגויות $P_{X_1}\times\dots\times P_{X_n}$.

הוכחה: אם $X_1,\dots,X_n$ ב"ת אז:

$$P_X(S_1\times\dots\times S_n)=P(X_1\in S_1\wedge\dots\wedge X_n\in S_n)\overset{\text{ב"ת}}{=}\prod P(X_i\in S_i)$$

$$\overset{P_{X_1}\times\dots\times P_{X_n}\text{ הגדרת}}{=}(P_{X_1}\times\dots\times P_{X_n})(S_1\times\dots\times S_n)$$

ואם ההתפלגות המשותפת היא מכפלת ההס' השוליות אז:

$$\forall I\subseteq[n]\quad P\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i\in S_i\}\Big)=P\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i\in S_i\}\cap\bigcap_{i\notin I}\{X_i\in\mathbb{R}\}\Big)$$

$$=P_X(T_1\times\dots\times T_n)=\prod_{i\in I}P(X_i\in S_i)\underbrace{\cancel{\boxed{\prod_{i\notin I}P(X_i\in\mathbb{R})}}}_{=1}$$

כש- $T_i=\begin{cases}S_i & i\in I\\ \mathbb{R} & i\notin I\end{cases}$

כלומר $\{X_i\in S_i\}$ הם ב"ת, ומכיוון שזה נכון לכל $S_1,\dots,S_n\subseteq\mathbb{R}$, $X_1,\dots,X_n$ ב"ת לפי ההגדרה.

9/12/20

טענה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת (לא אותו מ"ה). אז:

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

הוכחה (עבור מ"מ בדידים):

$$\mathbb{E}(X+Y)=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\alpha P(X+Y=\alpha)$$

$$=\sum_{\alpha}\alpha\sum_{\beta}P_{X,Y}(\beta,\alpha-\beta)$$

נגדיר $\gamma=\alpha-\beta$ (סכום בן מניה מתכנס בהחלט)

$$=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{R}\\ \gamma\in\mathbb{R}}}(\beta+\gamma)P_{X,Y}(\beta,\gamma)$$

$$\overset{\text{ב"ת}}{=}\sum_{\beta,\gamma}(\beta+\gamma)P_X(\beta)P_Y(\gamma)=$$

$$= \sum_\beta \beta P_X(\beta) \underbrace{\cancel{\sum_\gamma P_Y(\gamma)}}_{1} + \sum_\gamma \gamma P_Y(\gamma) \underbrace{\cancel{\sum_\beta P_X(\beta)}}_{1}$$

$$= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$ וזה וואו מגניב $\xrightarrow{\text{ואפילו}}$ $\boxed{\mathbb{E}(f(X,Y)) = \sum f(\beta,\gamma) P_{X,Y}(\beta,\gamma)}$

<u>בדומה:</u>

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{\beta,\gamma} \beta\gamma P_{X,Y}(\beta,\gamma)$$

$$\overset{\text{ב״ת}}{=} \sum_{\beta,\gamma} \beta\gamma P_X(\beta) P_Y(\gamma) = \sum_\beta \beta P_X(\beta) \sum_\gamma \gamma P_Y(\gamma)$$

$$= \sum_\beta \beta P_X(\beta) \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

<u>דוגמא:</u> נזכיר שאם $X \sim Bin(n,p)$ אז $\mathbb{E}(X) = np$.

<u>הוכחה:</u> נתבונן ב-n הטלות מטבע מוטה-p ב״ת, ויהי A_i - ראש בהטלה ה-i ו-Y - מס' הראשים.

אז $Y = \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n}$ $\mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_i = H \\ 0 & \omega_i = T \end{cases}$

הראינו כבר ש-$Y \sim Bin(n,p)$, ולפיכך מתקיים

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1}) + \dots + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}) = np$$ (תוחלת של $Ber(p)$ היא p)

(המ״מ $\mathbb{1}_{A_i}$ ב״ת כי A_i ב״ת). לסיום, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ כי

הראינו ש $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \Longleftarrow X \overset{D}{=} Y$.

(המלצה: הוכיחו ישירות מהגדרת $Bin(n,p)$)

למעשה! תוחלת היא אדיטיבית <u>גם</u> עבור מ״מ תלויים (אבל לא כפלית)

<u>טענה:</u> אם X,Y מ״מ ~~ב~~ אולי ת״ל, אז $\boxed{\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$

(כשיש לשניהם תוחלת).

<u>הוכחה (עבור בדידים):</u>

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_{\beta,\gamma} (\beta+\gamma) P_{X,Y}(\beta,\gamma)$$

$$= \sum_{\beta,\gamma} (\beta+\gamma)\, P(X=\beta \mid Y=\gamma)\, P(Y=\gamma)$$

$$= \sum_{\gamma} \gamma\, P(Y=\gamma) \overbrace{\cancel{\sum_{\beta} P(X=\beta \mid Y=\gamma)}}^{1}$$

$X|\{Y=\gamma\}$ היא התפלגות

$$+ \sum_{\gamma} P(Y=\gamma) \sum_{\beta} \beta \cdot P(X=\beta \mid Y=\gamma)$$

משפט התוחלת השלמה

$$= \mathbb{E}(Y) + \sum_{\gamma} P(Y=\gamma)\, \mathbb{E}(X \mid Y=\gamma) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$$

הערה: נסו להמשיך מכאן עם קייס.

<u>הוכיח</u>: אם ל-X יש תוחלת אזי $\mathbb{E}(\alpha X)=\alpha\mathbb{E}(X)$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$
(הומוגניות)

הומוגניות + אדיטיביות $\Leftarrow$ לינאריות:

$$\mathbb{E}(\alpha X+\beta Y) = \alpha\mathbb{E}(X)+\beta\mathbb{E}(Y)$$

<u>דוגמא</u>: בבעיית המזכיר המבולבל, תוחלת מס' המעטפות שיגיעו ליעדן היא 1:

(גם כאן אם A_i - המאורע שהמכתב ה-i הגיע ליעדו אזי

מס' ההצלחות $= \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n}$

וכל $\mathbb{1}_{A_i}$ הוא ברנולי $\frac{1}{n}$. הפעם הם תלויים!)

השוו ל-n הטלות מטבע מוטה $\frac{1}{n}$.

—— שיעור של נח' (ינסן + מרקוב) ——

15/12/20

<u>שונות</u>

כמה X נוטה לסטות מתוחלתו.

למשל: קוביה הוגנת, ומ"מ קבוע עם ערך 3.5, הם בעלי אותה תוחלת.

רעיון: $X - \mathbb{E}(X)$ - לא עובד:

$$\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\text{קבוע}}) = 0$$

כי הסטיות של X מעל ומתחת ל-$\mathbb{E}(X)$ מאזנות זו את זו.

אבל $\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|)$ - מעניין! ערך מוחלט הוא בלתי נוח

ולכן נסתכל על ריבוע במקום:

<u>הגדרה</u>: למ"מ בדיד X עם תוחלת סופית $\mathbb{E}(X)$, ה<u>שונות</u> של X היא

Variance $$V(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)$$

($V(X)$ בהכרח קיים אם מרשים ∞ - סכום טור אי-שלילי).

<u>סטיית התקן של X</u> היא $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

<u>דוגמא</u>: אם $X \sim Ber(p)$ אזי $\mathbb{E}(X)=p$ ולכן

$$V(X) = \mathbb{E}((X-p)^2) = p(1-p)^2 + (1-p)(-p)^2 = p(1-p)$$

<u>טענה</u>: אם ל-X יש תוחלת סופית אז

$$\boxed{V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

<u>הוכחה</u>: נסמן $\mu = \mathbb{E}(X)$

$$V(X) = \mathbb{E}((X-\mu)^2)$$

$$= \mathbb{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \overset{\text{לינאריות } \mathbb{E}}{=} \mathbb{E}(X^2) - 2\mu \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\mu} + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 \quad \square$$

<u>תכונות</u>: א) $V(X) \geq 0$, ו- $V(X)=0$ אמ"מ $X \overset{a.s.}{=} c$ ל- $c \in \mathbb{R}$.

(מכיוון: $(X-EX)^2$ אי שלילי. ולכן בעל תוחלת 0 $\Longleftrightarrow$ קבוע 0 כמעט תמיד)

ב) $V(aX) = \mathbb{E}((aX - \mathbb{E}(aX))^2) \overset{\text{לינ' תוחלת}}{=} a^2 V(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ג) $V(X+a) = \mathbb{E}((X+a-\mathbb{E}(X+a))^2) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)^2) = V(X)$

האם $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ כמו בתוחלת? לא תמיד.

נסמן $\mu=\mathbb{E}(X), \nu=\mathbb{E}(Y)$. אזי

$$\boxed{\begin{aligned} &V(X+Y)-V(X)-V(Y)= \\ &=\mathbb{E}\left((X+Y-\mu-\nu)^2\right)-\mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right)-\mathbb{E}\left((Y-\nu)^2\right) \\ &=2\mathbb{E}(XY-X\nu-Y\mu+\mu\nu)=2(\mathbb{E}(XY)-\mu\nu-\nu\mu+\mu\nu) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =2(\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \end{aligned}}$$

מסקנה: $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ אמ"מ $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ ← נקרא: X,Y בלתי מתואמים

(ובפרט אם X,Y ב"ת אזי זה קורה.)

דוגמא: אם $X\sim Bin(n,p)$ אזי $V(X)=np(1-p)$.

הוכחה: יהיו $Y_1,\dots,Y_n$ מפולגים $Ber(p)$ ב"ת -1 $Y=\sum_{i=1}^n Y_i$. אזי

$$V(X)=V(Y)=V\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)=\sum_{i=1}^n V(Y_i)=np(1-p).$$

בעלי אותה התפלגות

תרגיל: חשבו שונות של משתנה פואסון, אחיד, גאומטרי.

אי-שוויון צ'בישב: יהי X מ"מ בעל שונות סופית. אזי לכל $a>0$,

$$P(|X-\mathbb{E}(X)|\geq a)\leq\frac{V(X)}{a^2}$$

עוד ניסוח: $P(|X-\mathbb{E}(X)|\geq b\cdot\sigma(X))\leq\frac{1}{b^2}$.

"הסיכוי ש-X רחוק לפחות 3 סטיות תקן מהתוחלת שלו הוא לכל היותר $\frac{1}{9}$"

הוכחה: $Y=(X-\mathbb{E}(X))^2$ הוא מ"מ אי שלילי ולכן ממרקוב מתקבל

$$P(|X-\mathbb{E}(X)|\geq\sqrt{c})=P(Y\geq c)\leq\frac{\mathbb{E}(Y)}{c}=\frac{V(X)}{c}$$

ולכן נציב $a=\sqrt{c}$ וסיימנו.

<u>דוגמא</u>: $X \sim Bin(1000, \frac{1}{2})$ אז' $E(X)=500$

$$P(450<X<550) = 1 - P(|X-E(X)| \geq 50)$$

$$\geq 1 - \frac{V(X)}{2500} = 1 - \frac{250}{2500} = \frac{9}{10} \qquad \square$$

שיעור של קלאו' (שונות משותפת)

שיעורים של אהוד (מומנטים, אי שוויונות צ'רנוף והופדינג).

$\boxed{29/12/20}$

<u>מ"ה כלליים</u>

(I) (Ω, p) כ' p הסתברות נקודתית

<u>בעיה</u>: "יחידונים" יכולים להיות כולם בעלי הסת' 0

<u>פתרון</u>: (II) (Ω, P) כ' P הסתברות על 2^{Ω}.

<u>בעיה</u>: רצינו למצוא $P: 2^{[0,1]} \to \mathbb{R}_+$, כ' הסתברות, אינווריאנטית להזזה $P(A+c)=P(A)$

והגענו לסתירה: ראינו שקיימת $A \subseteq [0,1]$ ספציפית כך ש-$\aleph_0$ הזזות זרות של A מהוות חלוקה של $[0,1]$. (המלצה: קראו את הבנייה).

<u>פתרון</u>: (III) מוותרים על חלק מהקבוצות: $P(A)$ לא מוגדר לכל $A \subseteq \Omega$.

<u>הגדרה</u>: σ-אלגברה $\mathcal{F}$ על קבוצה Ω היא אוסף של תתי קבוצות של Ω,

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, שמקיימת: (א) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ב) סגירות למשלים ($A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A = A^c \in \mathcal{F}$)

(ג) סגירות לאיחוד בן מנייה ($i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$).

נובע סגירות לחיתוך בן-מנייה: $\bigcap A_i = \left(\bigcup A_i^c\right)^c$

<u>הגדרה</u>: מרחב הסתברות הוא $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ כש-Ω קבוצה ("מרחב המדגם"), $\mathcal{F}$ σ-אלגברה על Ω ("המאורעות"), ו-$P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ כ' הסתברות. ($P(\Omega)=1$ ו-σ-אדיטיביות)

דוגמאות ל-σ אלגברה על Ω: (א) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

(ב) $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

ג) אם $\Omega = \biguplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$, אזי $\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; I \subseteq \mathbb{N} \right\}$

3) $\mathcal{F} = \left\{ A\subseteq\Omega \;\middle|\; |A|\le\aleph_0 \text{ או } |A^c|\le\aleph_0 \right\}$ (כש- $\aleph_0<|\Omega|$, אחרת זה ב)

בדוגמא למרחב הסתברות עם $\mathcal{F}\neq 2^\Omega$: ניקח את וניקח

$$A\in\mathcal{F} \;:\; P(A)=\begin{cases} 0 & |A|\le\aleph_0 \\ 1 & |A^c|\le\aleph_0 \end{cases}$$

אזי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה. צריך כאן $\aleph_0<|\Omega|$.

עבור $\mathcal{S}\subseteq 2^\Omega$, נחפש אם יש σ-אלגברה מינימלית שמכילה את $\mathcal{S}$. יש (וכאלו שבו σ-אלג'):

$$\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega \\ \mathcal{F}\ \sigma\text{-אלג'}}} \mathcal{F}$$

ה-σ-אלג' שנוצרת ע"י $\mathcal{S}$

ה-σ-אלגברה על $\mathbb{R}$ שנוצרת ע"י $\mathcal{S}=\{[a,b]\mid a\le b\}$ נקראת σ-אלג' בורל של $\mathbb{R}$ Borel.

$$\sigma(\mathcal{S})=\mathcal{B}=\mathcal{B}_\mathbb{R}$$

בדומה, σ-אלג' בורל של $I=[0,1]$ היא $\mathcal{B}_I=\sigma\left(\{[a,b]\mid 0\le a\le b\le 1\}\right)$.

מי זו $\mathcal{B}_\mathbb{R}$? אולי $\mathcal{B}_\mathbb{R}=2^\mathbb{R}$? לא - A שבנינו בקורס על התפלגות אחידה אינה ב-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$. (וזה מצוין עבורנו)

יש גם דרך אינטואיטיבית לבנות את $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ - היא אינה נעימה.

משפט (Lebesgue): ישנה פ' הסתברות $P_\lambda:\mathcal{B}_I\to\mathbb{R}_+$ אינווריאנטית להזזות, היא מקיימת $P([a,b])=b-a$.
P_λ הנ"ל נקראת מידת לבג Lebesgue.

נוכיח בעיית המידה

הגדרה: המרחב $(I,\mathcal{B}_I,P_\lambda)$ נקרא "הסתברות אחידה על I".
הוא גם נקרא "מרחב ההסתברות הסטנדרטי".

גם ההגדרה של משתנה מקרי מתפשטת ל-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$:
נרצה שלכל $A\in\mathcal{B}_\mathbb{R}$ נוכל לשאול מה $P(X\in A)$.

$\boxed{31/12/20}$

תזכורת: "המרחב הסטנדרטי": $(I, \mathcal{B}_I, \mathbb{P}_\lambda)$

σ-אלגברת בורל - נוצרת מקטעים

פ' לבג

$\mathbb{P}_\lambda$ לא מוגדרת על כל 2^I. $\mathbb{P}_\lambda([a,b]) = b-a$.

קזימון: $\forall A \in \mathcal{B}_I: \quad \mathbb{P}_\lambda(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\}$

בתורת המידה תראו שזה אכן פ' הסתברות על $\mathcal{B}_I$.

<u>הגדרה:</u> משתנה מקרי על מ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ הוא פ' $X: \Omega \to \mathbb{R}$ שמקיימת: $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \; X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

מה זה נותן? ש- $P(X \in A)$ מוגדר:

$$P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = P(\underbrace{X^{-1}(A)}_{\text{רוצים ב-} \mathcal{F}})$$

כמו בקובץ על התפ' אחידה

<u>דוגמה נגדית:</u> ניקח $S \notin \mathcal{B}_I$, $(\Omega, \mathcal{F} = \mathcal{B}_I, \mathbb{P}_\lambda)$ ו- $X = \mathbb{1}_S$

אז $A = \{1\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ אבל $X^{-1}(\{1\}) = S \notin \mathcal{F}$. לכן X איננו מ"מ.

<u>עוד דוגמה נגדית:</u> $(\Omega = \{0,1\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}, P)$ ו- $X = id$

אז $X^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{F}$. כל מ"מ על מרחב זה הוא קבוע.

☆ אם $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ אז מ"מ הוא פשוט פונקציה $X: \Omega \to \mathbb{R}$.

<u>עובדה:</u> אם $X^{-1}([a,b]) \in \mathcal{F}$ לכל $a \le b$, כבר נובע ש-X מ"מ.

(כי $\mathcal{B}_I$ נוצרת ע"י הקטעים).

כמו קודם, אם X מ"מ על מ"ה נקבל ממנו מ"ה על $\mathbb{R}$:

נגדיר: $\mathbb{P}_X(A) = P(X \in A)$ ונקבל: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X)$

$\mathbb{P}_X$ נקראת ההתפלגות של X.

איך לחשב / לתאר את $\mathbb{P}_X$ הזו? מסתבר שמספיק לבדוק מה קורה בקטעים - להבין מהו $\mathbb{P}_X([a,b])$ לכל $a \le b$.

דוגמא: לא כל מ"מ בדיד: קח $X(\omega)=\omega^2$ $(\Omega=I,\ \mathcal{F}=\mathcal{B}_I,\ \mathbb{P}_\lambda)$

למשל: פ' רציפה $X: I\to\mathbb{R}$ מקיימת $X^{-1}(A)\in\mathcal{B}_I$ לכל $A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$).

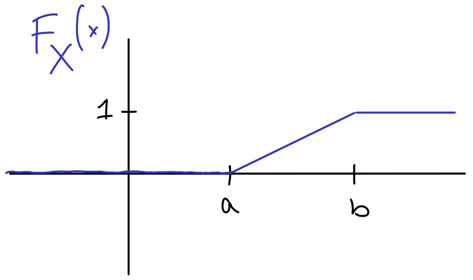
מאפיון פיזיקלי נחקור את X בהינתן התפלגותו, ולא נחשוב כמעט על Ω.

הגדרה: אם X מ"מ, ה-CDF שלו (cumulative distrib. function) הוא: $F_X(a)=P(X\le a)=P_X((-\infty,a])$: $\forall a\in\mathbb{R}$. פ' התפלגות מצטברת

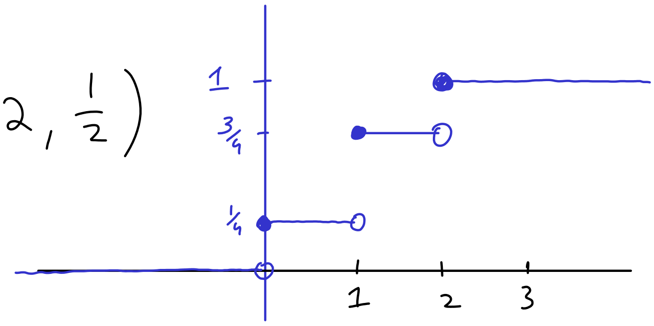
דוגמא: אם X מתפלג אחיד על $[a,b]$ נסמן $X\sim U([a,b])$

אז:

$$\boxed{F_X(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b<x\end{cases}}$$



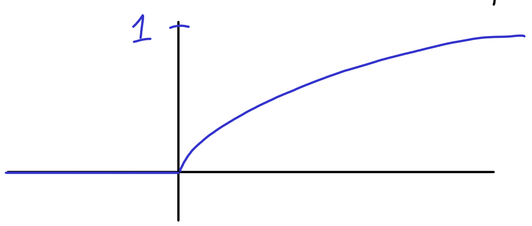
$X\sim Bin\left(2,\frac{1}{2}\right)$



תמונה אופיינית למ"מ בדיד

הגדרה: X מתפלג מעריכית עם פרמטר λ (סימון: $X\sim Exp(\lambda)$) אם:

$$\boxed{F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & 0\le x\end{cases}}$$



כמו שקיבלנו גבול: $Bin\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}Poi(\lambda)$

נקבל גבול: $Geo\left(\frac{\lambda}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}Exp(\lambda)$

ולכן ההתפלגות מתארת "זמן עד תקרית ראשונה" בתהליך פואסוני (בכל רגע יכולה להתרחש תקרית).

תכונות של CDF

- אם X מ"מ אז F_X מונוטונית עולה חלש, $\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0,\ \lim_{\infty}=1$
- $\forall a\le b:\quad F_X(b)-F_X(a)=P(X\le b)-P(X\le a)=P(X\in(a,b])$
- טענה: $P(X<a)=\lim_{t\nearrow a}F_X(t)$ לכל $a\in\mathbb{R}$.

הוכחה: לכל סדרה $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, שעולה ממש עם גבול a נקבל:

$$\lim_{i\to\infty} F_X(t_i) = \lim_{i\to\infty} P(\{X \le t_i\}) \underset{\text{מונוטוניות}}{=} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X \le t_i\}\right) = P(X<a)$$

בפרט, הגבול $\lim_{t\nearrow a} F_X(t)$ קיים תמיד (היינה).

- מסקנה: $P_X([a,b]) = F_X(b) - \lim_{t\nearrow a} F_X(t)$

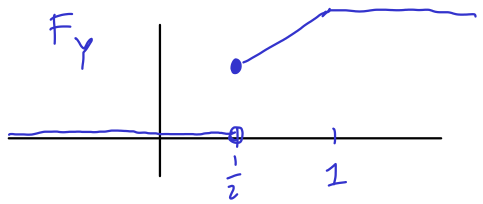
ובפרט F_X מספיקה לגלות את P_X על קטעים סגורים.
נובע (אף נוכיח) ש-F_X מספיקה לגלות את P_X לגמרי (כי $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ נוצרת מהקטעים). בניסוח אחרת, אם $F_X=F_Y$ אזי $P_X=P_Y$ (או $X \overset{d}{=} Y$).
מכאן החשיבות של CDF.

עוד מסקנה: $P(X=a) = F_X(a) - \lim_{t\nearrow a} F_X(t)$ לכן יש ל-a הס' חיובית בדיוק כשל-F_X יש קפיצה ב-a.

תרגיל: X מ"מ רציף (כלומר $P(X=a)=0$ לכל a) אמ"מ F_X רציפה.

תזכורת: X נקרא בדיד אם $\sum_{a\in\mathbb{R}} P(X=a) = 1$.

- אם $X \sim U(I)$ ו-$Y = \max(X, \frac{1}{2})$ אזי Y לא בדיד ולא רציף.



מכאן נגדיר למחלקה מיוחדת של מ"מ:

הגדרה: מ"מ X יקרא רציף בהחלט (או בעל צפיפות) אם קיימת פ' $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ כך ש-
$$\forall a: F_X(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$$
(עבורנו זה אינטגרל רימן, אבל בעולם המבוגרים לוקחים אינטגרל לבג)

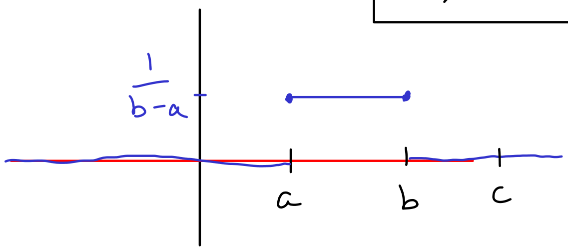
f_X נקראת פ' הצפיפות של X. PDF - Probab. Density Func.

נובע: אם X רציף בהחלט אזי X רציף. (פ' קדומה היא תמיד רציפה) ההיפך אינו נכון, אבל הדוגמאות הן פתולוגיות (הגרלת מס' מקבוצת קנטור, למשל).

- $P_X([a,b]) = P_X((a,b)) = \int_a^b f_X(x)\,dx$ (כשיש צפיפות).

דוגמאות: (א)

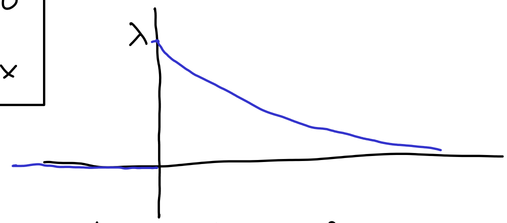
$$X \sim U([a,b]) \Longrightarrow \boxed{f_X = \frac{1}{b-a}\cdot \mathbb{1}_{[a,b]}}$$



זו אופציה אחת! תמיד אפשר לשנות את f במס' סופי של נקודות בלי שזה ישפיע על $\int f$.

(ב)

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow \boxed{f_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & 0\le x \end{cases}}$$



- תמיד יתקיים: f_X אי שלילית, ו- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 = P(X\le\infty)=1$.

<u>עובדה</u>: לכל f אי שלילית עם $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$

אפשר לבנות מ"ה ועליו מ"מ X עם צפיפות $f_X = f$.

(נכון שעבור $f=\mathbb{1}_I$ מקבלים את $\mathbb{P}_\lambda$ - התפלגות לבג!)

אינטואיטיבית, $f_X(a)$, הוא השינוי ב- F_X סביב a (לפחות אם F_X גזירה)

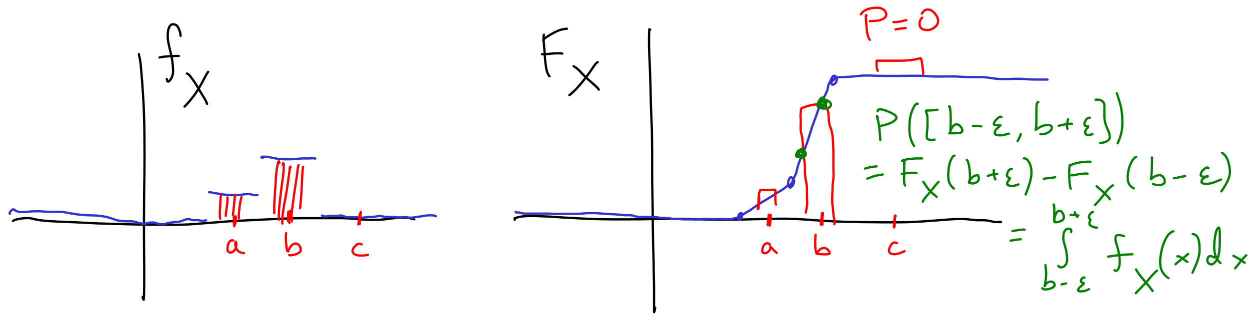
אז' $f_X(a) = F'_X(a)$. הוא מתאר מה ההבדל בין $\underbrace{P(X\le a-\varepsilon)}_{F_X(a-\varepsilon)}$

ל- $P(X\le a+\varepsilon)$, כלומר מהו $P(a-\varepsilon \le X \le a+\varepsilon)$,

כלומר מה הסיכוי ש- X הוא "בערך" a.

לכן f_X אנלוגית ל- p_X, פ' ההסתברות הנקודתית.

$\boxed{5/1/20}$



"הצפיפות $\underbrace{\text{מתארת}}_{f_X(b)}$ את הסבירות להימצא בסביבת הנקודה. $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$"

<u>תזכורת</u>: תוחלת X בדיד היא

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{a\in\mathbb{R}} a\cdot p_X(a)$$

<u>הגדרה</u>: אם X רציף בהחלט, נגדיר

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

בתנאי שהאינטגרל מתכנס בהחלט $\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)dx<\infty\right)$

(אפשר גם כאן להגדיר מתי $\mathbb{E}X=\pm\infty$, נוותר על זה).

<u>הערה</u>: מיד אפשר להגדיר $V(X)=\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right)$.

<u>טענה</u>: אם $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה מונוטונית עולה ממש, ו-X מ"מ עם צפיפות, אזי $Y=g(X)$ בעל צפיפות $f_Y(y)=\dfrac{f_X(g^{-1}(a))}{g'(g^{-1}(a))}$

<u>הוכחה</u>: ראינו בתרגול.

<u>מסקנה</u>: $\mathbb{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)dx$. (לבדיד: $\mathbb{E}(g(X))=\sum_{a\in\mathbb{R}}g(a)p_X(a)$)

קל ונכון לכל g!

גם במקרה הלא בדיד זה נכון לכל g (רציפה למקוטעין). נוכיח רק עבור g גזירה מונוטונית אבל נשתמש ל-g כללית (ותוכיח בתורת המידה).

<u>הוכחה</u>:

$$\mathbb{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}y\,\frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}dy$$

$$\overset{y=g(x)}{=}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\frac{f_X(x)}{\cancel{g'(x)}}\cancel{g'(x)}\,dx \quad \square$$

<u>דוגמאות</u> (א) $X\sim Exp(1)$, $Y=e^X$:

$$\mathbb{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^x e^{-x}dx=\infty$$

(ב) $X\sim U([a,b])$

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,\overbrace{\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}}^{f_X(x)}dx$$

$$=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

$$V(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}X)^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\mathbb{1}_{[a,b]}}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

ג) $X \sim Exp(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \overbrace{f_X(x)}^{0 \text{ עבור } x<0} dx = \int_0^\infty x \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{(-e^{-\lambda x})'} dx$$

אינט' בחלקים

$$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tX} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx$$

$$= \frac{\lambda e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\Big|_0^\infty \overset{t<\lambda \text{ עבור }}{=} \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

ומכאן גם: $V(X) = M_X''(0) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

7/1/21

<u>תזכורת</u>: אם $M_X(t)$ מוגדרת בסביבה של 0 אזי

$$\mathbb{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

$X \equiv c \qquad M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tc}) = e^{tc}$

$M_X''(t) = c^2 e^{tc} \xrightarrow[t=0]{} c^2 = \mathbb{E}(X^2)$

לתוחלת ושונות של מ"מ <u>כלליים</u> יש אותן תכונות כמו בבדידים:

$\mathbb{E}X \ge 0 \Leftarrow X \ge 0$, $\mathbb{E}X \ge \mathbb{E}Y \Leftarrow X \ge Y$

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ כשאגף ימין מוגדר וסופי

קשה!

$V(X) \ge 0$ ו- $V(X) = 0$ אמ"מ $X \overset{a.s.}{\equiv} c$.

$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}X + b$, $V(aX+b) = a^2 V(X)$

אם X,Y ב"ת אזי $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, $\mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$

א"ש מרקוב, צ'ביצ'ב, ג'נסן. שונות משותפת ותכונותיה.

מתקבל מהטענה: אם f אינטגרבילית אי-שלילית ו- $0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

אזי יש $A \in B_{\mathbb{R}}$ עם $P_\lambda(A) = 0$ כך ש- $f|_{\mathbb{R} \setminus A} \equiv 0$.

מידת לבג

כמה משתנים

אם X,Y מ"מ על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},P)$, נגדיר את פ' ההתפלגות המצטברת המשותפת שלהם:

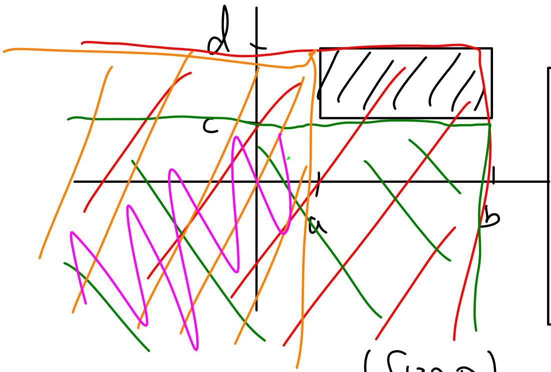
$$F_{X,Y}(a,b)=P(X\le a\ ,\ Y\le b)$$ joint CDF

היינו רוצים לדעת לכל $A\subseteq\mathbb{R}^2$ כללית מהי $P((X,Y)\in A)$

זה קצת מסובך מדי. מצמצמים ל- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}=\sigma\left(\left\{\text{מלבנים מקבילים לצירים ב-}\mathbb{R}^2\right\}\right)$

$F_{X,Y}$ מספיקה להבין הס' של מלבנים (ולכן גם של כל $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$):

נסמן $F=F_{X,Y}$ ואז:



$$\boxed{F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)\overset{\text{הכלה והדחה, דה-מורגן}}{=}P(a<x\le b\ ,\ c<y\le d)}$$

כדי לקבל את $P(a\le x\le b, c\le y\le d)$ ניקח גבולות (תרגיל).

אפשר למצוא את ה- cdf השולית של X (או Y):

$$F_X(a)=P(X\le a)=P(X\le a\wedge Y\le\infty)=\lim_{b\to\infty}F_{X,Y}(a,b)$$

מעכשיו נתעניין במ"מ עם צפיפות משותפת:

הגדרה: X,Y בעלי צפיפות משותפת (joint PDF) $f_{X,Y}$ אם

$$\boxed{F_{X,Y}(a,b)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b}f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx\qquad\forall a,b\in\mathbb{R}}$$

מתקבל ש- X,Y רציפים ולכן: $P\left(\begin{smallmatrix}a\le X\le b\\ c\le Y\le d\end{smallmatrix}\right)=\int_a^b\int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$

טענה: אם ל- X,Y צפיפות משותפת אז: הצפיפות השולית של X (f_X) מתקבלת ע"י $f_X(a)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(a,y)\,dy$

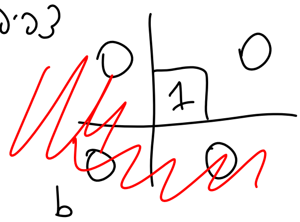
$\left[p_X(a)=\sum_{b\in\mathbb{R}}p_{X,Y}(a,b)\ :\ \text{כמו בבדיד}\right]$

הוכחה:

$$\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(a,y)\,dy\,dx=P\left(\begin{smallmatrix}-\infty\le X\le a\\ -\infty\le y\le\infty\end{smallmatrix}\right)=F_X(a)$$

ולכן $\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(a,y)\,dy$ היא פ' צפיפות של X $\square$

דוגמא: $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}_{I\times I}$



אם $a<0$ או $b<0$ ברור $F_{X,Y}(a,b)=0$

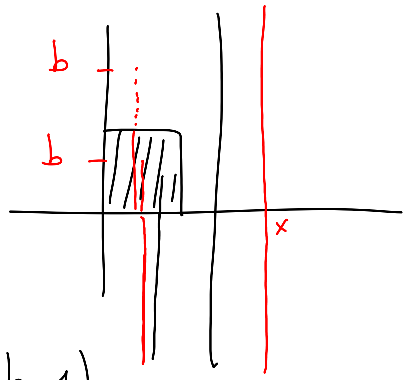
עבור $0\le a,b$:

$$F_{X,Y}(a,b) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} \mathbb{1}_{I\times I}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a}\int_{0}^{\min(b,1)} \underbrace{\mathbb{1}_{I}(x)}_{\text{מספר קבוע}}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a} \min(b,1)\,\mathbb{1}_{I}(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\min(a,1)} \min(b,1)\,dx = \min(a,1)\cdot\min(b,1)$$



בפרט עבור $a,b\in I$ מקבלים $P\begin{pmatrix}0\le X\le a\\ 0\le Y\le b\end{pmatrix} = ab =$ שטח המלבן

לכן לכל מלבן ב- $I\times I$ ההסתברות ליפול בו היא שטחו.

לכן נקרא להתפלגות זו אחידה על $I\times I$.

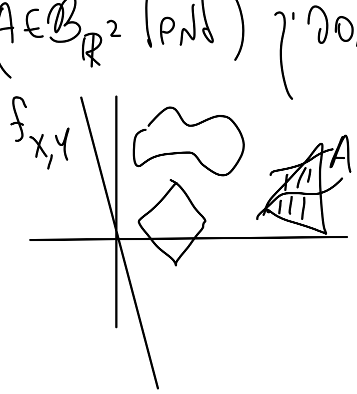
עוד דוגמא לאינטגרל כפול

$$\int_a^b\int_c^d x\cdot y\,dy\,dx = \int_a^b \left(\frac{xy^2}{2}\Big|_c^d\right)dx = \int_a^b \frac{xd^2-xc^2}{2}\,dx = \dots$$

נניח את משפט פוביני; סדר האינטגרציה לא משנה (עבור פ' אינטגרבילית רימן):

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

עוד עובדת מתורת האינטגרציה: ל- $A\subseteq\mathbb{R}^2$ "יפה" מספיק ($A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ למשל)

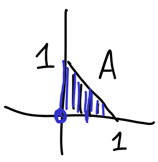


יתקיים $P\big((X,Y)\in A\big) = \underbrace{\int_A f_{X,Y}(x,y)\,d(x,y)}$

הנפח מתחת לפונקציה $f_{X,Y}$ ב- A

(בין גרף הפונקציה למישור X-Y).

אפשר לחשב את זה ע"י פרמטריזציה של A:



לדוגמא: $\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$

נחזור להסתברות:

<u>הגדרה:</u> X,Y נקראים ב"ת אם לכל $A,B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ המאורעות $\{X\in A\}$ ו-$\{Y\in B\}$ ב"ת (כלומר $P(X\in A \wedge Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$).

<u>טענה:</u> אם ל-X,Y יש צפיפות אזי הם ב"ת אמ"מ $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
(כמו במקרה הבדיד עם $p_{X,Y}$).

<u>הוכחה:</u> נניח $f_{X,Y}=f_X\times f_Y$. אזי לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקבל

$$P(X\le a, Y\le b)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\int_{-\infty}^{b} f_Y(y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,P(Y\le b)\,dx = P(X\le a)P(Y\le b) \Rightarrow P(X\le a \mid Y\le b)=P(X\le a)$$

כלומר המאורעות $\{X\in(-\infty,a]\},\{Y\in(-\infty,b]\}$ ב"ת. מזה אפשר להגיע לכך שלכל $A,B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ המאורעות $X\in A$ ו-$Y\in B$ ב"ת (ע"י איחודים בני מניה ומשלימים $\sigma(\{(-\infty,a]\})=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$)

בכיוון השני, אם X,Y ב"ת, צ"ל ש-$f_X(x)f_Y(y)$ היא פ' צפיפות משותפת עבור X,Y:

$$\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_X(x)f_Y(y)\,dy\,dx = P(X\le a)P(Y\le b) \underset{X,Y\text{ ב"ת}}{=} F_{X,Y}(a,b) \quad \square$$

<u>ליניאריות התוחלת:</u> אם X,Y בעלי תוחלת (לאו דווקא ב"ת):

$$\mathbb{E}(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx=$$

($\mathbb{E}(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$ ובאופן כללי יותר f-g יפה מספיק (רציפה למקוטעין))

$$\overset{\text{פוביני}}{=}\int_{-\infty}^{\infty} x\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy}\,dx+\int_{-\infty}^{\infty} y\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy=\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y$$

<u>טענה:</u> אם X,Y ב"ת בעלי צפיפות אזי $f_{X+Y}=f_X * f_Y$, כלומר

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx \;\boxed{=:(f_X \underset{\text{קונבולוציה}}{*} f_Y)(z)}$$

* מגדירים:

$$(f*g)(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(z-x)\,dx$$

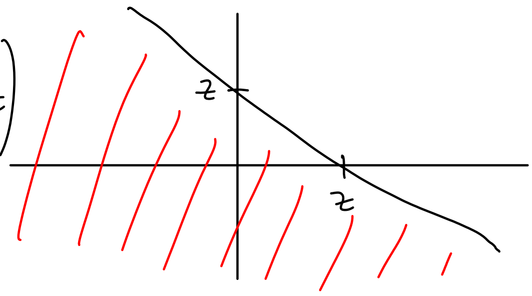
הוכחה: ב"ת

$$F_{X+Y}(z) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(t-x)\,dx\,dt$$

$$\overset{\text{פוביני}}{\underset{\text{ב"ת}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x,t-x)\,dt\,dx \overset{\substack{y=t-x\\ dy=dt}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{\substack{\text{מקולש}\\ \{y\le z-x\}}} f_{X,Y}(x,y)\,d(x,y)=P(Y\le z-X)=P(X+Y\le z)$$

כפי שרצינו!!



12/1/21

דוגמה:

אם $X,Y\sim U([0,1])$ ב"ת. מה התפלגות $X+Y$?

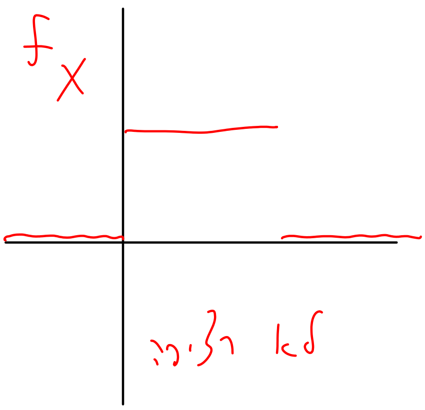
$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_X(x)}_{\mathbb{1}_I(x)}\,f_Y(z-x)\,dx=\int_0^1 f_Y(z-x)\,dx=\boxed{\int_0^1 \mathbb{1}_I(z-x)\,dx}$$

$$\{0\le z-x\le 1,\ 0\le x\le 1\} = \{z-1\le x\le 1\}$$

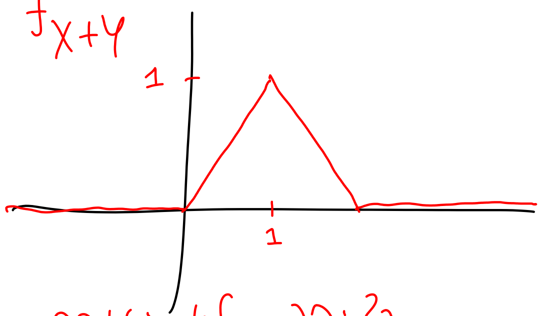
אם $0\le z\le 1$: $\quad =\int_0^z 1\,dx=z$

אם $1\le z\le 2$: $\quad =\int_{z-1}^{1} 1\,dx=1-(z-1)=2-z$

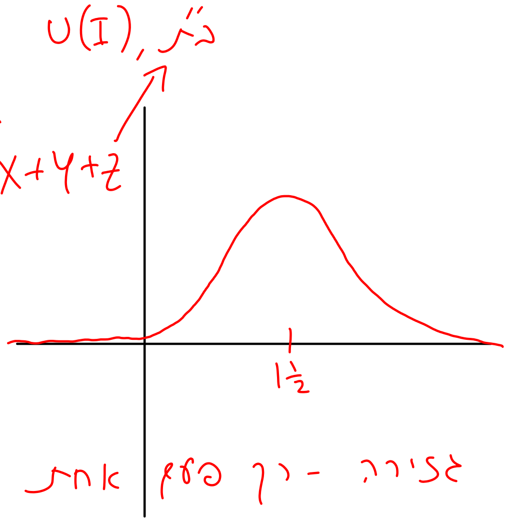
$$f_{X+Y}(z)=\begin{cases} z & 0\le z\le 1\\ 2-z & 1\le z\le 2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$



לא רציפה



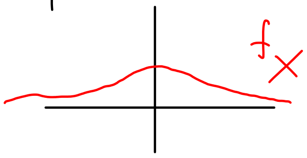
רציפה, לא גזירה



גזירה - רק פעם אחת

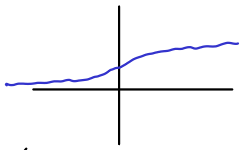
מתברר שכשלוקחים $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ כש- $X_i \sim U(I)$ ובת"ל,
יש גבול לפונקציות ההתפלגות $F_{A_n} \to F_Y$ למ"מ Y כלשהו.
מה שבאמת מדהים, זה שזה נכון לכל X_i שווי התפלגות, בת"ל
ובעלי שונות סופית. לא סתם ש- F_{A_i} מתכנסות, אלא שהן
תמיד מתכנסות לאותה התפלגות!

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- X מתפלג נורמלית סטנדרטית ($X \sim N(0,1)$) אם



$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

הוכחנו בתרגול ש- $\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, ולכן, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.



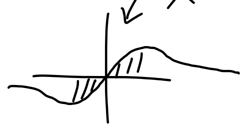
מהי $F_X(x)$?
$$\Phi(x) = F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

אי אפשר לכתוב את Φ ע"י פולינומים, פ' טריגונומטריות, לוגריתמים, אקס'.
יש לה טור טיילור:
$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{2^j (2j+1)\, j!}$$

משפט הגבול המרכזי: סכום של i.i.d. מתכנס לנורמלי.

נחשב תוחלת/שונות של $X \sim N(0,1)$:

$x f_X(x)$ אי זוגית אז $\mathbb{E}X = 0$ אם ישנה. נבדוק:



$$\mathbb{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \overset{\boxed{t=\frac{x^2}{2},\ dt = x\,dx}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} < \infty$$

שונות:
$$\mathbb{E}X^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \underset{\downarrow\atop 1}{x} \cdot \underset{\uparrow\atop \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'}{\left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right)} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_0^{\infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\text{חישבנו!}} \right] = \dots = 1$$

$V(X) =$
$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1$

תוחלת ↘ ↙ שונות

לכן מסמנים $N(0,1)$.

הגדרה: נאמר ש-X מתפלג $N(\mu,\sigma^2)$ (נורמלי עם תוחלת μ ושונות σ^2) אם $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

(לכל משתנה עם תוחלת μ ושונות σ^2, $\frac{X-\mu}{\sigma}$ בעל תוחלת 0 ושונות 1, $\frac{X-\mu}{\sigma}$ נקרא התקנון (נורמליזציה) של X)

<u>הגדרה שקולה:</u> ראינו איך נראית $f_{g(X)}$ כש-g מונוטונית גזירה.

כאן $g(x)=\sigma x+\mu$, $X\sim N(0,1)$ ו-$Y=g(X)$. אזי $\frac{Y-\mu}{\sigma}=X$ באמת מתפלג $N(0,1)$.

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\Big/g'(g^{-1}(y))$$

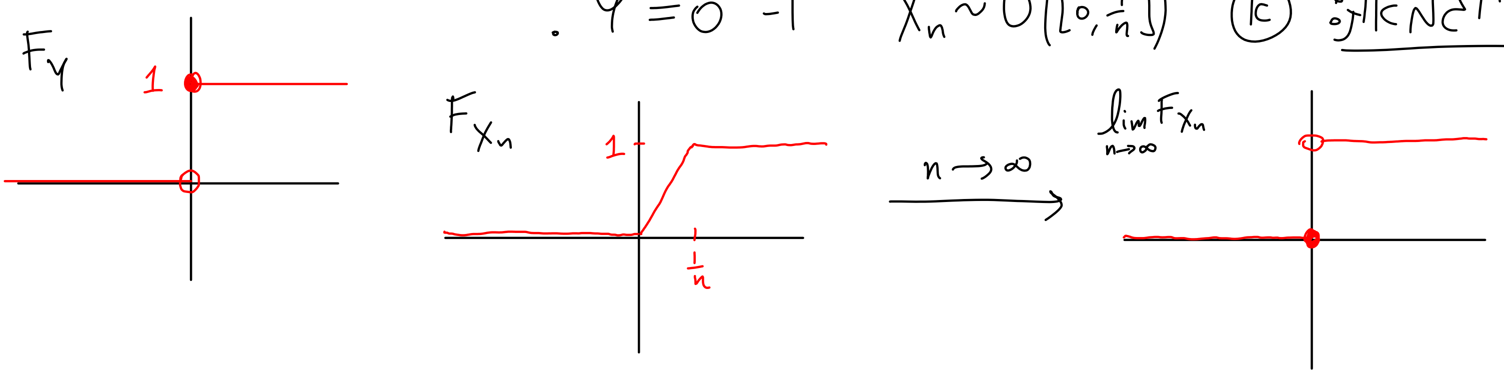
$$\boxed{Y\sim N(\mu,\sigma^2) \text{ אם: } f_Y(y)=\frac{f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

<u>משפט:</u> (CLT – Central Limit Theorem): אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d. בעלי תוחלת μ ושונות σ^2 אזי נגדיר $A_n=\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}$ ומתקיים $A_n\xrightarrow{d}N(0,1)$.

<u>הגדרה:</u> נאמר ש-$X_n\xrightarrow{d}Y$ (מתכנס בהתפלגות - distrib) אם $F_{X_n}(t)\xrightarrow{n\to\infty}F_Y(t)$ לכל t שהוא נק' רציפות של F_Y.

$\boxed{14/1/21}$

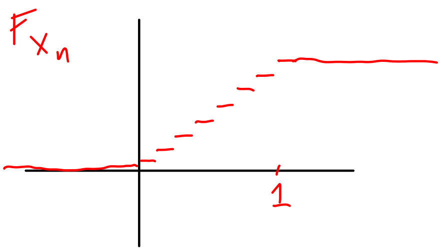
<u>דוגמאות:</u> (א) $X_n\sim U([0,\frac{1}{n}])$ ו-$Y=0$.

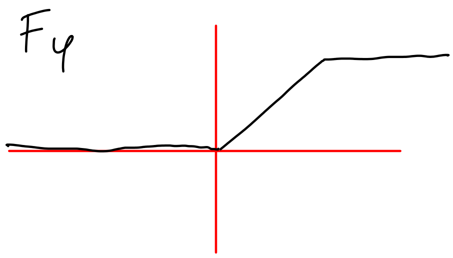


כלומר $F_{X_n}(t) \longrightarrow F_Y(t)$ חוץ מאשר ב-$t=0$. עדיין $X_n \xrightarrow{d} Y$

כי 0 היא נק' אי-רציפות של F_Y.

ב) $X_n = U(\{\frac{k}{n} \mid k=0,\dots,n\})$, $Y = U([0,1])$





כי: $t<0$, $1<t$ ברורים ✓

$$\forall 0\le t\le 1: \ F_{X_n}(t) = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \xrightarrow{n\to\infty} t = F_Y(t)$$

מכיוון שהתכנסות בהתפלגות עוסקת רק בהתפלגות של X_n, Y (ולא בערכים שלהם על $\omega\in\Omega$), אפשר לכתוב גם:

$$U(\{\tfrac{k}{n} \mid k=0,\dots,n\}) \xrightarrow{d} U([0,1])$$

ג) $Bin(n, \frac{\lambda}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Poi(\lambda)$

ד) אם $X_n \sim Geo(\frac{\lambda}{n})$ אז $\frac{1}{n} X_n \xrightarrow{d} Exp(\lambda)$

<u>סוגים של התכנסות של מ"מ:</u> אם Y, X_n מ"מ

$X_n \xrightarrow{d} Y$: התכנסות בהתפלגות - הגדרנו.

$X_n \xrightarrow{P} Y$: התכנסות בהסתברות:

$$\forall \varepsilon>0: \ \lim_{n\to\infty} P(\{\omega\in\Omega \mid |X_n(\omega)-Y(\omega)| \le \varepsilon\}) = 1$$

$X_n \xrightarrow{a.s.} Y$: התכנסות כמעט תמיד:

$$P(\{\omega\in\Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} Y(\omega)\}) = 1$$

X_n, Y יהיו על אותו מ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

"התכנסות ממש תמיד": $\forall \omega\in\Omega: \ X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} Y(\omega)$

<u>לכן:</u> $X_n \xrightarrow{d} Y \ \Leftarrow \ X_n \xrightarrow{P} Y \ \Leftarrow \ X_n \xrightarrow{a.s.} Y$

אבל $\not\Rightarrow$ בשני המקרים. (נוכיח בהמשך).

<u>משפט (CLT)</u>: אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d. עם תוחלת μ ושונות σ^2 (סופית)

אז

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1).$$

<u>שימוש בעולם האמיתי</u>: אם משתנה כלשהו X מתקבל כסכום של הרבה i.i.d.
כל מבחן פשוט יניח שהוא מתפלג נורמלית:

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(\underset{\mathbb{E}(X)}{\underset{\shortparallel}{n\mu}}, \underset{V(X)}{\underset{\shortparallel}{n\sigma^2}}) \quad \Leftarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \underset{\text{"בערך מתפלג"}}{\approx} N(0,1)$$

<u>למשל</u>: אם $X\sim Bin(1000,\frac{1}{2})$ (כסכום של 1000 i.i.d.!), אז $X\approx N(500,250)$. נסמן $Z\sim N(0,1)$

$$P(450<X<550) = P\left(\frac{-50}{\sqrt{250}} < \frac{X-500}{\sqrt{250}} < \frac{50}{\sqrt{250}}\right) \approx P\left(\frac{-50}{\sqrt{250}} < Z < \frac{50}{\sqrt{250}}\right)$$

$$= F_Z\left(\frac{50}{\sqrt{250}}\right) - F_Z\left(\frac{-50}{\sqrt{250}}\right) = \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{-50}{\sqrt{250}}\right) = 0.99843$$

מצ'בישב קיבלנו (עמ' 40): $P(450<X<550) \geq 0.9$

והאמת היא: $P(450<X<550) = \sum_{k=451}^{549}\binom{1000}{k}2^{-1000} = 0.99827$

משימה: מה נותנים צ'רנוף והופדינג?

<u>משפט</u>: $X_n \xrightarrow{d} Y$ אם (ורק אם) לכל $g\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$

"חלקה" – גזירה ∞ פעמים; "תומך קומפקטי" – $\mathrm{supp}(g)$ חסום.

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

מתקיים $\mathbb{E}(g(X_n)) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Y))$.

<u>הערה</u>: אותו משפט נכון עם $\underbrace{C_c^0(\mathbb{R})}_{\text{רציפה}}$, $C_c^7(\mathbb{R})$, וכו'. אנחנו נצטרך $C_c^3(\mathbb{R})$.

<u>הוכחה</u>: אם ניקח $g=\mathbb{1}_{(-\infty,t]}$ אז $g(X_n)$ הוא ברנולי ולכן

$$\mathbb{E}(g(X_n)) = P(g(X_n)=1) = P(X_n\leq t) = F_{X_n}(t)$$

לכן אם g הייתה C_c^{∞} (חלקה עם תומך חסום) היינו מסיימים:

$$F_{X_n}(t) = \mathbb{E}(g(X_n)) \xrightarrow[\text{נתון}]{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Y)) = F_Y(t)$$

ולכן $X_n \xrightarrow{d} Y$. אבל $g\notin C_c^\infty(\mathbb{R})$ ... צריך לתקן. נתחיל ב- supp

---

יהי $\varepsilon>0$. נבחר $m\in\mathbb{R}$ עם $F_Y(m)<\varepsilon$, וניקח $g=\mathbb{1}_{(m,t]}$

אז

$$F_Y(t)-\varepsilon < F_Y(t)-F_Y(m) \overset{P(Y\in(m,t])}{=} \mathbb{E}(g(Y)) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(g(X_n)) = \lim_{n\to\infty}\left(F_{X_n}(t)-F_{X_n}(m)\right)$$

לו g הייתה גם חלקה...

$$\le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(t)$$

עכשיו ניקח M עם $F_Y(M)>1-\varepsilon$ ו- $g=\mathbb{1}_{(t,M]}$, ונקבל:

$$1-\varepsilon-F_Y(t) < F_Y(M)-F_Y(t) = \mathbb{E}(g(Y)) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(g(X_n)) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{F_{X_n}(M)}_{\text{רק מגדיל}} - F_{X_n}(t)$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} 1-F_{X_n}(t)$$

ניקח 1 פחות כל אחד ונקבל $F_Y(t)+\varepsilon > \limsup\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t)$.

סה"כ $F_Y(t)-\varepsilon<\liminf F_{X_n}(t) \le \limsup F_{X_n}(t) < F_Y(t)+\varepsilon$

לכל $\varepsilon>0$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t)=F_Y(t)$.

(א) אבל g לא חלקה!!

(ב) איפה השתמשנו בכך ש- F_Y רציפה ב- t??

[אתם תשלימו את ההוכחה בתרגול: היפכו את g לחלקה (או רציפה). שם תצטרכו את ההנחה ש- F_Y רציפה ב- t] $\square$

משפט: סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא נורמלי.

יותר ספציפית, אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y\sim N(\nu,\tau^2)$ ו- X,Y ב"ת אז $X+Y\sim N(\mu+\nu,\sigma^2+\tau^2)$.

הוכחה: תמיד אפשר להפעיל פ' אפינית $x\mapsto ax+b$ על X,Y, $X+Y$ - הגזה אפינית של נורמלי היא עדיין נורמלית. נניח בגלל זה ש- $\mu=\nu=0$ ו- $\sigma^2+\tau^2=1$ (תקננו את X,Y בפרט סכום שונויות).

עכשיו צ"ל $X+Y\sim N(0,1)$, כלומר $f_{X+Y}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$

נתון: $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ ובדומה f_Y. X,Y ב"ת ולכן:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,dx = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-\frac{(z-x)^2}{2\tau^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{1-\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{(z-x)^2}{2(1-\sigma^2)} + \frac{z^2}{2}}\, dx}_{\text{נשאר להראות שזה שווה 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{1-\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z\sigma^2)^2}{2\sigma^2(1-\sigma^2)}}\, dx}_{= \int_{-\infty}^{\infty} \text{צפיפות של משתנה נורמלי } N(z\sigma^2,\, \sigma^2(1-\sigma^2)) = 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$\square$

$\boxed{19/1/21}$

<u>משפט CLT</u>: אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d עם תוחלת ושונות סופיים אזי

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n}\,\sigma(X_1)} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

אנחנו נראה הוכחה של Lindberg, שמניחה גם $\mathbb{E}|X|^3<\infty$.

<u>הוכחה</u>: אפשר מראש להניח $\mathbb{E}X=0$ ו-$V(X)=1$ (כש-X הוא כל אחד מה-X_i)

ואז צ"ל $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N(0,1)$. ראינו שזה ינבע אם נראה

שלכל $g\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ מתקיים $\boxed{\mathbb{E}\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum^{n} X_i\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(g(N))}$

כש-N משתנה נורמלי סטנדרטי.

Lindberg: ניקח סדרה של מ"מ נורמלים סטנדרטים $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ שהם ב"ת ביניהם, וגם ב"ת ב-X_i. נשים לב ש:

$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} N_i \sim N(0,1)$ ולכן $\mathbb{E}\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} N_i\right)\right) = \mathbb{E}(g(N))$.

לכן מספיק להראות $\mathbb{E}\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} N_i\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

נפרק את זה לטלסקופי: $\mathbb{E}\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} N_i\right)\right)$

$$= \boxed{\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}\right)-g\left(\frac{X_1+\dots+X_{n-1}+N_n}{\sqrt{n}}\right)\right)}$$

$$+\boxed{\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X_1+\dots+X_{n-1}+N_n}{\sqrt{n}}\right)-g\left(\frac{X_1+\dots+X_{n-2}+N_{n-1}+N_n}{\sqrt{n}}\right)\right)}+\dots$$

פרקנו את הביטוי שלנו ל-n מחוברים. צריך להראות שזה סכום שואף לאפס. נראה שכל אחד מהם חסום ב- $\frac{C}{n^{3/2}}$ וזה יתן מה שרצינו. הם כולם דומים, ומעניינים אותנו כבר, אז נתמקד בראשון:

נגדיר $Z=\frac{X_1+\dots+X_{n-1}}{\sqrt{n}}$, ואז הביטוי נהיה

$$\mathbb{E}\left(g\left(Z+\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)-g\left(Z+\frac{N_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

עפ"י טיילור

$$g\left(Z+\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)=g(Z)+\boxed{g'(Z)\frac{X_n}{\sqrt{n}}}+\frac{g''(Z)}{2}\frac{X_n^2}{n}+R$$

כש:

$$|R|=\left|\frac{g'''(\xi)}{6}\cdot\frac{X_n^3}{n^{3/2}}\right|\le C\cdot\frac{X_n^3}{n^{3/2}}$$

$$C=\frac{\max|g'''|}{6}$$

$g\in C_c^3(\mathbb{R})$ ולכן g''' חסומה (רציפה על קבוצה קומפקטית).

באותו אופן

$$g\left(Z+\frac{N_n}{\sqrt{n}}\right)=g(Z)+g'(Z)\frac{N_n}{\sqrt{n}}+\frac{g''(Z)}{2}\frac{N_n^2}{n}+R'$$

$$|R'|\le C\cdot\frac{N_n^3}{n^{3/2}}$$

$\mathbb{E}$

אבל, מכיוון ש- X_n ו- Z ב"ת, יש כפליות של תוחלות:

$$\mathbb{E}\left(g\left(Z+\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)\right)=\mathbb{E}(g(Z))+\mathbb{E}(g'(Z))\frac{\mathbb{E}X}{\sqrt{n}}+\frac{\mathbb{E}(g''(Z))}{2}\frac{\mathbb{E}(X^2)}{n}+\mathbb{E}R$$

$$\mathbb{E}\left(g\left(Z+\frac{N_n}{\sqrt{n}}\right)\right)=\mathbb{E}(g(Z))+\mathbb{E}(g'(Z))\frac{\mathbb{E}N}{\sqrt{n}}+\frac{\mathbb{E}(g''(Z))}{2}\frac{\mathbb{E}(N^2)}{n}+\mathbb{E}R'$$

וסה"כ

$$\left|\mathbb{E}\left(g\left(Z+\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)-g\left(Z+\frac{N_n}{\sqrt{n}}\right)\right)\right|\le\mathbb{E}|R|+\mathbb{E}|R'|\le C\cdot\frac{\mathbb{E}|X^3|+\mathbb{E}|N^3|}{n^{3/2}}$$

אותו ניתוח יעבוד לכל גורם בסכום הטלסקופי, וסה"כ נקבל

$$\left|\mathbb{E}\left(g\left(\frac{\sum^n X_i}{\sqrt{n}}\right)-g\left(\frac{\sum^n N_i}{\sqrt{n}}\right)\right)\right|\le C\cdot\frac{\mathbb{E}|X^3|+\mathbb{E}|N^3|}{\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

כי יש n מחוברים בסכום הנ"ל ו- $\mathbb{E}|N^3|=\sqrt{\frac{8}{\pi}}<\infty$. סה"כ קיבלנו

$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{\sum^n X_i}{n}\right)\right)\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}(g(N))$ לכל $g\in C_c^3(\mathbb{R})$, ולכן $\frac{\sum^n X_i}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N$. □

$\boxed{21/1/21}$

תזכורת:

"התכנסות בהסתברות" אם $X_n \xrightarrow{p} X$

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 : \ P(\underbrace{|X_n - X| > \varepsilon}_{\{\omega\in\Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}}) \xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

דוגמאות: (א) יהי $X_n \sim Ber(p_n)$ ב"ת. מתי $X_n \xrightarrow{p} 0$?

אם $1<\varepsilon$ אזי תמיד $P(|X_n - 0| > \varepsilon) = 0$.

אם $0<\varepsilon<1$: $P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(X_n = 1) = p_n$

לכן $X_n \xrightarrow{p} 0$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

בדומה $X_n \xrightarrow{p} 1$ " " " $= 1$ ".

(ב) החוק החלש של המספרים הגדולים: אם $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ i.i.d. בעלי תוחלת סופית μ אזי $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$.

הוכחנו כבר (באמצעות צ'בישב) תחת הנחה שגם $\mathbb{E}(X^2) < \infty$.

$$\forall \varepsilon>0 : \ P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(ג) עוד דוגמה כללית: אם X_n סדרה עם $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ ו- $V(X_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ אזי $X_n \xrightarrow{p} \alpha$ (הוכיחו באמצעות צ'בישב).

(ד) ניקח $(\Omega = I, \mathcal{B}_I, \mathbb{P}_\lambda)$ (התפלגות אחידה על $[0,1]$) ונגדיר $X_n = \frac{\lfloor \omega \cdot 10^n \rfloor}{10^n}$ (= n ספרות הראשונות של ω).

אזי $X_n \xrightarrow{p} id$ כי $\forall \varepsilon>0 : \ \underbrace{|X_n(\omega) - \omega| \le \frac{1}{10^n} < \varepsilon}_{\text{לכל } \omega \text{, החל מ-} n \text{ מסויים}}$

(ובפרט) $P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

"התכנסות כמעט תמיד": $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

$$\boxed{P(\underbrace{X_n \xrightarrow{n\to\infty} X}_{\{\omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)\}}) = 1}$$

(א) $X_n \sim Ber(p_n)$ ב"ת: $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$!
(אולי נוכיח בהמשך).

(ב) החוק החזק של המספרים הגדולים: אם $\{X_n\}$ i.i.d. בעלי תוחלת סופית μ, אזי: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} \mu$.
(לא נוכיח - אפשר לקרוא בספר).

(ג) שלב $\frac{\lfloor 10^n \omega \rfloor}{10^n} \xrightarrow{a.s.} id$ כי: $\forall \omega \in \Omega : \frac{\lfloor 10^n \omega \rfloor}{10^n} \xrightarrow{n\to\infty} \omega$.

<u>טענה</u>: $X_n \xrightarrow{P} X$ לא גורר $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר סדרה של קטעים:

$I_1 = [0,1]$

$I_2 = [0,\frac{1}{2})$, $I_3 = (\frac{1}{2},1]$

$I_4 = [0,\frac{1}{4}]$, ... , $I_7 = (\frac{3}{4},1]$

⋮

ניקח $(\Omega = I, \mathcal{B}_I, \mathbb{P}_\lambda)$ ו- $X_n = \mathbb{1}_{I_n}(\omega)$.

לכל $\omega \in \Omega$ הסדרה $X_n(\omega)$ נראית $1, \overset{1,0}{\underset{0,1}{\text{או}}}, 0,1,0,0,0,1,0,\dots$
לכן לכל ω, $X_n(\omega)$ אינה מתכנסת. לכן $X_n \not\xrightarrow{a.s.}$ שום דבר.

אבל $X_n \xrightarrow{P} 0$: $P(|X_n - 0| > \varepsilon) = len(I_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\quad \forall\, 1>\varepsilon>0$

<u>טענה</u>: $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ גורר $X_n \xrightarrow{P} X$.

נגדיר קודם כמה מושגים: אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות, אזי,

$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \{\omega \mid \omega$ שייך ל-A_n עבור ∞ n-ים$\} = \{\omega \mid$ בכל זנב $\{A_j\}_{j\ge i}$ עדיין מופיע $\omega\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j \ge i} A_j$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \{\omega \mid \omega$ שייך לכל A_n למעט מס' סופי$\} = \{\omega \mid$ יש זנב ש-ω מופיע בכל איבריו$\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j \ge i} A_j$

<u>אבחנות</u>: $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$ כי

דה-מורגן: $(\overline{\lim} A_n)^c = \underline{\lim}(A_n^c)$ ולהיפך.

הלמה של Fatou: $P(\underline{\lim} A_n) \le \underline{\lim} P(A_n)$

(ומדה-מורגן נובע גם $P(\overline{\lim} A_n) \ge \overline{\lim} P(A_n)$)

הוכחת Fatou:

$$P(\underline{\lim}\, A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j\ge i} A_j\right) = \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcap_{j\ge i} A_j\right)$$

אם $i \ge k$ אזי $\bigcap_{j\ge i} A_j \supseteq \bigcap_{j\ge k} A_j$

לכן זו סדרה מונוטונית ב-i, הוכחנו שהסתברות של איחוד על סדרה מונוטונית הוא גבול הסתברויות איבריה

הגדרת $\underline{\lim}$

$$\le \lim_{i\to\infty}\left(\inf_{j\ge i} P(A_j)\right) = \underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \quad \square$$

$\xrightarrow{a.s.}$ גורר $\xrightarrow{P}$ נוכיח ישירות מ-Fatou. נגדיר $A_n^\varepsilon = \{\omega \mid |X_n(\omega)-X(\omega)|\le\varepsilon\}$

$\overline{\lim}\, P(A_n^\varepsilon)\le 1$

אזי:
$$\boxed{X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall\varepsilon: P(A_n^\varepsilon)\xrightarrow{n\to\infty} 1 \iff \forall\varepsilon: \underline{\lim}\, P(A_n^\varepsilon) = 1}$$

טענה: $X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff \forall\varepsilon: P(\underline{\lim}\, A_n^\varepsilon) = 1$.

הוכחה: נקבע $\omega\in\Omega$. אזי $X_n(\omega)\xrightarrow{n\to\infty}X(\omega)$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\forall\varepsilon\ \exists N\ \underbrace{\forall n\ge N: \omega\in A_n^\varepsilon}_{\omega\in\bigcap_{n\ge N}A_n^\varepsilon}}_{\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\ge N}A_n^\varepsilon}$$

לכן $X_n(\omega)\to X(\omega)$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$, $\omega\in\underline{\lim}\, A_n^\varepsilon$ $\square$

נוכיח $\xrightarrow{a.s.}$ גוררת $\xrightarrow{P}$:

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\varepsilon \quad P(\underline{\lim}\, A_n^\varepsilon) = 1$$
$$\Downarrow \text{Fatou}$$
$$\forall\varepsilon \quad \underline{\lim}\, P(A_n^\varepsilon) = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \square$$

האם $X_n\xrightarrow{d}X$ גורר $X_n\xrightarrow{P}X$? והפוך? לא. (כמו שראינו 7 מטבעות מס' הראשים מתפלג כמו מס' הזנבות, אבל הם תמיד שונים)

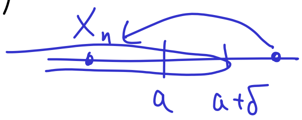
טענה: $X_n \xrightarrow{p} X$ גורר $X_n \xrightarrow{d} X$.

הוכחה: נניח ש-a נק' רציפות של F_X. צ"ל $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$. נקבע ε.

מרציפות, קיימת δ עם $|F_X(t)-F_X(a)|\le\varepsilon \Leftarrow |t-a|\le\delta$.

ואז:

$$F_{X_n}(a) = P(X_n\le a) \overset{\text{מוכל}}{\le} P(X\le a+\delta \text{ או } |X_n-X|>\delta)$$



$$\overset{\text{איחוד}}{\le} F_X(a+\delta) + P(|X_n-X|>\delta)$$

$$\le F_X(a)+\varepsilon + P((A_n^\delta)^c) \xrightarrow[\text{כי } X_n \xrightarrow{p} X]{n\to\infty} F_X(a)+\varepsilon$$

ניקח $\overline{\lim_n}$ משני האגפים ונקבל $\overline{\lim} F_{X_n}(a) \le F_X(a)+\varepsilon$. זה היה נכון

לכל $\varepsilon>0$ ולכן $\overline{\lim} F_{X_n}(a)\le F_X(a)$. באופן אנלוגי (ע"י $a-\delta$)

מראים ש-$\underline{\lim} F_{X_n}(a)\ge F_X(a)$ וסה"כ $F_{X_n}(a)\xrightarrow{n\to\infty}F_X(a)$. □

סה"כ: $\xrightarrow{d} \Leftarrow \xrightarrow{p} \Leftarrow \xrightarrow{a.s.}$.

משפט בורל קנטלי: יהי A_n סדרת מאורעות. אז:

(I) אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty$ אז $P(\overline{\lim} A_n)=0$.

(II) אם $\{A_n\}$ ב"ת (מספיק ב"ת בזוגות) אז $P(\overline{\lim} A_n)=1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$.

הוכחה: (I) $P(\overline{\lim} A_n) \overset{\text{מונוטוניות}}{=} \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcup_{j\ge i} A_j\right) \overset{\text{חסם האיחוד}}{\le} \lim_{i\to\infty}\sum_{j\ge i}P(A_j) = 0$

סכום על זנב של טור מתכנס

(II) $P(\overline{\lim} A_n) \overset{\text{דה מורגן}}{=} 1 - P(\underline{\lim}\, A_n^c) \overset{\text{מונוטוניות}}{=} 1 - \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcap_{j\ge i}A_j^c\right)$

נראה שלכל i מתקיים $P\left(\bigcap_{j\ge i}A_j^c\right)=0$. ואכן:

$$P\left(\bigcap_{j\ge i}A_j^c\right) \overset{\text{ב"ת}}{=} \prod_{j=i}^{\infty} P(A_j^c) = \prod_{j=i}^{\infty}(1-P(A_j)) \overset{\boxed{1-x\le e^{-x}}}{\le} \prod_{j=i}^{\infty} e^{-P(A_j)} = e^{-\sum_{j=i}^{\infty} P(A_j)}$$

$$= e^{-\infty} = 0 \quad \square$$

[להוכחה כזו לא מספיק ב"ת בזוגות]

עכשיו בדקו שאם $X_n \sim Ber(p_n)$ ב"ת אזי $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$.

בהצלחה במבחנים!