מבוא לטופולוגיה

29 באוקטובר 2015

.

מבוסס על הרצאות פרופ' תמי ציגלר
בקורס "מבוא לטופולוגיה" (80516)
האוניברסיטה העברית, סמסטר ב' 2014
להערות: $nachi.avraham@gmail.com$

נחי

תודה לכל מי ששלח הערות ותיקונים, ובמיוחד ל:
נריה גושן, עודד הייננמן, רון מור, אוריאל עצמון, רון קסטל, דוד רייטבלט וקרן שרייבר

תוכן עניינים

חלק I
מרחבים מטריים

1 מרחב מטרי

הגדרה: תהי X קבוצה. נאמר שהפונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ היא **מטריקה** או **פונקציית מרחק** מעל X, אם לכל $x, y, z \in X$ מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. **סימטריה:** $d(x,y) = d(y,x)$
2. **חיוביות:** $x \neq y \Longrightarrow d(x,y) > 0$, וגם $d(x,x) = 0$
3. **אי־שוויון המשולש:** $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

הגדרה: הזוג (X, d) נקרא **מרחב מטרי**, כאשר X קבוצה ו-d מטריקה.

הערה: אם (X, d) מרחב מטרי וכן $Y \subset X$, מתקבל תת־מרחב מטרי (X, d_Y), כאשר $d_Y = d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ היא הצמצום של d ל-Y.

דוגמה: דוגמה בסיסית למרחב מטרי הוא קבוצה X כלשהי עם **המטריקה הדיסקרטית**, המוגדרת $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$. קל לוודא שזו אכן מטריקה.

1.1 מרחבי $\mathbb{R}^n$

ניתן להגדיר את $\mathbb{R}^n$ כמרחב מטרי, למשל באמצעות אחת משלוש המטריקות הבאות:
(מסמנים $x, y \in \mathbb{R}^n$ על־ידי $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$)

1. מטריקת $\mathcal{L}_1$: $d_{\mathcal{L}_1}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
2. מטריקת $\mathcal{L}_2$: $d_{\mathcal{L}_2}(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
3. מטריקת $\mathcal{L}_\infty$: $d_{\mathcal{L}_\infty}(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

תרגיל: להוכיח שהפונקציות $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_\infty$ הנ"ל הן אכן מטריקות. (יש להשתמש באי־שוויון קושי שוורץ במקרה של $\mathcal{L}_2$).

הערה: ניתן להגדיר באופן דומה מטריקת $\mathcal{L}_p$ לכל $1 \leq p$.

הערה: "כדור היחידה" הוא אוסף הנקודות ב-$\mathbb{R}^n$ שמרחקן מהנקודה $(0,0)$ הוא 1. מושג המרחק שונה בין שלוש המטריקות שהגדרנו, ולכן כדור היחידה משתנה בהתאם למטריקה.

נתבונן למשל בכדור היחידה במרחב $\mathbb{R}^2$:

- תחת $\mathcal{L}_1$ כדור היחידה הוא הווקטורים (x,y) המקיימים $|x| + |y| < 1$.

– במערכת צירים קרטזית הגרף של שפת הכדור יהיה ריבוע 1×1 סביב הראשית, שקודקודיו על הצירים ($\Diamond$).

- תחת $\mathcal{L}_2$ כדור היחידה הוא הווקטורים (x, y) המקיימים $|x|^2 + |y|^2 < 1$.

– במערכת צירים קרטזית הגרף של שפת הכדור יהיה מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית ($\oplus$).

- תחת $\mathcal{L}_\infty$ כדור היחידה הוא הווקטורים (x, y) המקיימים $\max\{|x|, |y|\} < 1$.

– במערכת צירים קרטזית הגרף של שפת הכדור יהיה ריבוע 1×1 סביב הראשית, שאמצעי צלעותיו על הצירים ($\boxplus$).

הגדרה: בהינתן קבוצה X ומטריקות d_1, d_2 עליה, אומרים כי המטריקות הללו **שקולות**, אם קיימים קבועים $A, B \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in X$ מתקיים $d_1(x, y) \leq A \cdot d_2(x, y)$ וכן $d_2(x, y) \leq B \cdot d_1(x, y)$.

תרגיל:

1. להוכיח שכל הנורמות במרחב סוף־ממדי V הן שקולות.[1]
2. להסיק שהמטריקות $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_\infty$ במרחב $\mathbb{R}^n$ שקולות, על־ידי כך שהן מושרות בהתאמה מהנורמות:

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \qquad \|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

במרחב $\mathbb{R}^n$.[2]

1.2 מרחבי $C([a, b])$

הגדרה: $C([a, b])$ הוא מרחב הפונקציות הרציפות מהצורה $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

גם מרחב זה יכול להיות מוגדר כמרחב נורמי, וממילא גם כמרחב מטרי, למשל על־ידי אחת הנורמות הבאות:

1. $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$
2. $\|f\|_2 = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
3. $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

תרגיל: להוכיח שאלו אכן נורמות. (יש להשתמש באי־שוויון המשולש של המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ במקרה של $\|\cdot\|_2$).

---

[1] כאשר שקילות של נורמות מוגדרת באופן אנלוגי לגמרי לשקילות של מטריקות.

[2] כל נורמה $\|\cdot\|$ במרחב וקטורי V משרה גם מטריקה במרחב, על־ידי $\forall_{x, y \in V}\ d(x, y) =: \|x - y\|$.

2 מכפלת מרחבים מטריים

הגדרה: יהיו (X,d_X), (Y,d_Y) מרחבים מטריים. ניתן לקבל מהם מרחב מטרי חדש $(X\times Y,\rho)$, כאשר מגדירים מטריקה $\rho:(X\times Y)\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$ להיות:

$$\rho\left((x,y),(x',y')\right)=d\left(x,x'\right)+d\left(y,y'\right)$$

הגדרה: יהיו $\{(X_i,d_i)\}_{i=1}^{n}$ מרחבים מטריים. נסמן $\prod_{i=1}^{n}X_i=:X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ (כקבוצה).

ניתן לקבל מרחב מטרי חדש $(\prod_{i=1}^{n}X_i,\rho)$, כאשר מגדירים מטריקה $\rho:(\prod_{i=1}^{n}X_i)\times(\prod_{i=1}^{n}X_i)\to\mathbb{R}$ להיות:

$$\rho\left((x_1,...,x_n),\left(x_1^{'},...,x_n^{'}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}d_i\left(x_i,x_i^{'}\right)$$

הערה: הגדרנו כאן "מטריקת 1", אולם ניתן גם להגדיר "מטריקת 2" או "מטריקת ∞" בקבוצה זו ברוח המטריקות השקולות $\mathcal{L}$ שהגדרנו לעיל, וגם כאן כולן יהיו שקולות.

הגדרה: יהיו $\{(X_i,d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ מרחבים מטריים. בסימון הקודם, ניתן לקבל מהם מרחב מטרי $(\prod_{i=1}^{\infty}X_i,\rho)$, עם מטריקה $\rho:(\prod_{i=1}^{\infty}X_i)\times(\prod_{i=1}^{\infty}X_i)\to\mathbb{R}$ המוגדרת:

$$\rho\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{d_i\left(x_i,y_i\right)}{1+d_i\left(x_i,y_i\right)}$$

כאשר מסמנים $x=(x_1,x_2,...)$, $y=(y_1,y_2,...)$.

נשים לב כי $\frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}\leq 1$ תמיד ולכן הביטוי שהגדרנו הוא טור ממשי מתכנס.

תרגיל: להוכיח שההגדרה האחרונה אכן מגדירה מטריקה.

דוגמה: ניקח את הקבוצה $\{0,1\}$ עם המטריקה הדיסקרטית d. אז עבור הקבוצה $\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots$ ניתן להגדיר מטריקה ρ למשל על־ידי $\rho\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d(x,y)}{2^i}$.

תחת מטריקה זו, זוג נקודות בקבוצת המכפלה יהיו יותר קרובות ככל שיהיו להן רישאות זהות ארוכות יותר.

3 פתיחות במרחב מטרי

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי, תהי $x\in X$ ויהי $0<r\in\mathbb{R}$. **כדור פתוח** סביב x ברדיוס r הוא הקבוצה $B_r\left(x\right)=:\{y\in X|d\left(x,y\right)<r\}$.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. אומרים כי $U\subset X$ היא **קבוצה פתוחה**, אם היא איחוד כלשהו של כדורים פתוחים.

טענה: איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה. חיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

חלק II
מרחבים טופולוגיים

4 טופולוגיה

הגדרה: תהי X קבוצה כלשהי ותהי $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(x)$[3], כלומר $\mathcal{T}$ היא אוסף כלשהו של תתי־קבוצות של X.

אומרים כי $\mathcal{T}$ היא **טופולוגיה** על X, אם מתקיימות כל התכונות הבאות:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ וכן $X \in \mathcal{T}$.
2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ל-I קבוצת אינדקסים כלשהי, מקיימת $U_\alpha \in \mathcal{T}$, אזי גם $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
3. אם $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ סופית, מקיימת $U_i \in \mathcal{T}$, אזי גם $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

בהינתן קבוצה X וטופולוגיה עליה $\mathcal{T}$, אומרים כי הזוג $(X, \mathcal{T})$ הוא **מרחב טופולוגי**.

הערה: המוטיבציה להגדיר מרחבים טופולוגיים הגיעה מהתובנה שלתכונות חשובות של מרחבים מטריים לא נדרשת מטריקה ולעתים מספיקה טופולוגיה. כלומר מרחב טופולוגי הוא מושג כללי יותר ממרחב מטרי, כפי שנראה מיד. לצורך הגדרת המושגים, נשכח בינתיים את ההגדרה של "פתיחות" במרחב מטרי, ונכנה את הקבוצות של טופולוגיה $\mathcal{T}$ על קבוצה X בשם "קבוצות פתוחות". כלומר, נתרגם את העובדה ש-$U \in \mathcal{T}$ לכך ש-U פתוחה ב-X תחת הטופולוגיה $\mathcal{T}$.

הגדרה: תהי X קבוצה ויהיו $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות עליה. אומרים כי $\mathcal{T}_1$ **חזקה** יותר מ-$\mathcal{T}_2$ וכי $\mathcal{T}_2$ **חלשה** יותר מ-$\mathcal{T}_1$, אם מתקיים $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

דוגמאות:

1. לכל קבוצה X קיימות שתי טופולוגיות יסודיות:
   - **הטופולוגיה הטריוויאלית:** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
   - **הטופולוגיה הדיסקרטית:** $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. דהיינו כל תתי הקבוצות של X.

   נשים לב שמבין כל הטופולוגיות האפשריות על קבוצה כלשהי X, הטופולוגיה הטריוויאלית היא הטופולוגיה החלשה ביותר, והטופולוגיה הדיסקרטית היא הטופולוגיה החזקה ביותר.

2. **טופולוגיה המושרית ממטריקה:** בהינתן מרחב מטרי (X, d), המטריקה d מגדירה מהי קבוצה פתוחה ב-X: כל איחוד כלשהו של כדורים פתוחים.

   נגדיר טופולוגיה $\mathcal{T}$ על X להיות אוסף כל הקבוצות הפתוחות ב-X תחת המטריקה d.

   מתקיים כי $\mathcal{T}$ היא אכן טופולוגיה מהתכונות שהראינו לעיל עבור קבוצות פתוחות במרחבים מטריים.

[3] נהוג לסמן ב-$\mathcal{P}(X)$ את קבוצת החזקה של X. כלומר $\mathcal{P}(X)$ היא קבוצת כל תתי הקבוצות של X.

הערה: קל לראות שהטופולוגיה הדיסקרטית מושרית מהמטריקה הדיסקרטית, שכן כל נקודה היא קבוצה פתוחה תחת מטריקה זו.

הערה: הראינו שכל מטריקה משרה טופולוגיה, אולם קיימות הרבה טופולוגיות שאינן מושרות ממטריקות והן המוטיבציה העיקרית לעיסוק בטופולוגיה.

דוגמה: נציג טופולוגיה שאינה מושרית ממטריקה. ניקח $X = \{a, b\}$ ונגדיר עליה טופולוגיה $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. קל לוודא שזו טופולוגיה.
לו הייתה מטריקה d שתחתיה $\{a\}$ הייתה קבוצה פתוחה, אז בהכרח מכיוון ש-$a \neq b$ נובע שיש $0 < r$ המקיים $d(a, b) = r$ ולכן גם $\{b\}$ צריכה להיות קבוצה פתוחה, שכן $\{b\} = B_r(b) = \{x \in X | d(b, x) < r\}$, כלומר היה צריך להתקיים $\{b\} \in \mathcal{T}$, בעוד שזה לא המצב.

טענה: אם d_1, d_2 מטריקות **שקולות** על קבוצה X, אזי הן משרות את אותה הטופולוגיה.

מסקנה: הראינו שבמרחב $\mathbb{R}^n$ כל **הנורמות** שקולות, ולכן יש טופולוגיה יחידה ב-$\mathbb{R}^n$ המושרית ממטריקה שמושרית מנורמה. טופולוגיה זו מכונה **הטופולוגיה הסטנדרטית** של $\mathbb{R}^n$.

הערה: קיימות מטריקות שאינן שקולות, ושעדיין ישרו את אותה הטופולוגיה.

3. **טופולוגיית המשלים הסופי:** בהינתן קבוצה X, נגדיר את $\mathcal{T}$ להיות כל הקבוצות $U \subset X$ (כולל $\emptyset$) המקיימות כי $X - U$ קבוצה סופית.

נשים לב שבמקרה של X קבוצה סופית, טופולוגיית המשלים הסופי היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

4.1 בסיס טופולוגי

הגדרה: תהי X קבוצה כלשהי ותהי $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$. אומרים כי $\mathfrak{B}$ היא **בסיס** על X, אם מתקיימות שתי התכונות הבאות:

1. $\mathfrak{B}$ היא כיסוי. כלומר לכל $x \in X$ קיימת $B \in \mathfrak{B}$ כך ש-$x \in B$.
2. לכל $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, לכל $x \in B_1 \cap B_2$ קיימת $B_3 \in \mathfrak{B}$ כך ש-$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.[4]

לקבוצות $B \in \mathfrak{B}$ קוראים **קבוצות בסיס**.

דוגמאות:

1. אם $\mathcal{T}$ טופולוגיה על X אז היא בסיס.
קל לראות ש-$\mathcal{T}$ היא כיסוי של X כי $X \in \mathcal{T}$. התנאי השני מתקיים גם הוא, כי חיתוך סופי של קבוצות ב-$\mathcal{T}$ שייך ל-$\mathcal{T}$.
2. בהינתן (X, d) מרחב מטרי, אזי אוסף הכדורים הפתוחים ב-X תחת המטריקה d, הוא בסיס לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה d.

טענה: בהינתן קבוצה X ובסיס $\mathfrak{B}$ עליה, אזי אוסף כל האיחודים של קבוצות־בסיס ב-$\mathfrak{B}$ (כולל $\emptyset$) הוא טופולוגיה, והיא מכונה **הטופולוגיה הנוצרת** על־ידי $\mathfrak{B}$ על X.

[4] המוטיבציה להגדרה זו מגיעה מכדורים פתוחים במרחב מטרי: כל נקודה שנמצאת בחיתוך של שני כדורים פתוחים, מוכלת בכדור פתוח שלישי שכולו מוכל בשני הכדורים הפתוחים גם יחד.

הוכחה: נסמן את האוסף הנ"ל ב-$\mathcal{T}$. קל לראות כי $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, וכן כל איחוד של איברי $\mathcal{T}$ הוא איחוד של איברי $\mathfrak{B}$ ולכן גם הוא ב-$\mathcal{T}$. נוודא באינדוקציה שמתקיים התנאי השלישי.

יהיו $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, נראה כי $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. אם החיתוך ריק סיימנו כי $\emptyset \in \mathcal{T}$, לכן נניח שלא ותהי $x \in U_1 \cap U_2$.

$\mathfrak{B}$ כיסוי, ולכן ל-$U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ קיימות $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ בהתאמה, כך ש-$x \in B_1 \subset U_1$, $x \in B_2 \subset U_2$.

$\mathfrak{B}$ בסיס ולכן מהתנאי השני נובע שלפי הנתון $x \in B_1 \cap B_2$ קיימת $B_x \subset B_1 \cap B_2$ כך שמתקיים $x \in B_x$.

נסיק כי $\displaystyle B_x \bigcup_{x \in U_1 \cap U_2} = U_1 \cap U_2$ כאשר $B_x \in \mathfrak{B}$, ולכן מההגדרה $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

באינדוקציה הטענה נובעת לכל חיתוך סופי של קבוצות. ■

דוגמה: ניקח את $X = \mathbb{R}$ ונציג לה שני בסיסים שונים:

$$\mathfrak{B}_1 = \{(a,b) \,|a,b \in \mathbb{R}\} \ , \ \ \mathfrak{B}_2 = \{[a,b) \,|a,b \in \mathbb{R}\}$$

הטופולוגיות הנוצרות על־ידי בסיסים אלו הן שונות. נסמנן בהתאמה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ונשים לב כי $\mathcal{T}_2$ חזקה יותר מ-$\mathcal{T}_1$, שכן כל קטע $(a,b) \in \mathcal{T}_1$ מקיים $\displaystyle (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \tfrac{1}{n}, b\right)$ ולכן הוא מוכל ב-$\mathcal{T}_2$.

טענה:

1. יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ויהי $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ בסיס. אם לכל $U \in \mathcal{T}$ ולכל $x \in U$ קיימת $B \in \mathfrak{B}$ כך ש-$x \in B \subset U$, אזי $\mathcal{T}$ נוצרת על־ידי $\mathfrak{B}$.
2. יהיו $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ טופולוגיות על X, ויהיו $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ בסיסים יוצרים מתאימים. אם כל קבוצת בסיס של $\mathfrak{B}'$ שייכת גם ל-$\mathfrak{B}$, אזי $\mathcal{T}$ חזקה יותר מ-$\mathcal{T}'$.

הגדרה: תהי X קבוצה. **תת־בסיס** של X הוא אוסף של תתי־קבוצות המקיים את תכונת הכיסוי. כלומר $\mathfrak{C}$ היא תת־בסיס אם לכל $x \in X$ קיימת $C \in \mathfrak{C}$ כך ש-$x \in C$.

הגדרה: הטופולוגיה הנוצרת על־ידי תת־בסיס $\mathfrak{C}$, היא אוסף כל האיחודים של חיתוכים סופיים של איברי $\mathfrak{C}$.

(ההוכחה שזו אכן טופולוגיה מושארת כתרגיל).

5 מרחבים טופולוגיים מיוחדים

5.1 צמצום של מרחב טופולוגי

נראה שמכל מרחב טופולוגי ניתן לקבל טופולוגיה חדשה על תת־קבוצה.

הגדרה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ותהי $Y \subset X$. נגדיר את **הטופולוגיה המושרית** מ-X על Y להיות $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\}$.

(ההוכחה שזו אכן טופולוגיה מושארת כתרגיל. נשים לב כי $Y = X \cap Y \in \mathcal{T}_Y$).

הערה: לא כל קבוצה ששייכת ל-$\mathcal{T}_Y$ גם שייכת ל-$\mathcal{T}$. כלומר תכונת הפתיחות לא בהכרח נשמרת לאחר צמצום.

דוגמה פשוטה לכך היא כל מקרה של $Y \subset X$ כאשר Y אינה פתוחה ב-X, שכן Y בכל מקרה פתוחה ביחס לצמצום של הטופולוגיה לעצמה.

דוגמה נוספת היא המרחב $X = \mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, וכן $Y = [0, 1)$. הקבוצה $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ פתוחה ב-Y אך אינה פתוחה ב-X.

5.2 מכפלת מרחבים טופולוגיים

נראה שמכל אוסף סופי או בן־מניה של מרחבים טופולוגיים ניתן לקבל מרחב טופולוגי חדש, על קבוצת המכפלה שלהם.
נתחיל במכפלה של שני מרחבים טופולוגיים, נכליל למספר סופי כלשהו של מ"ט, ולבסוף נכליל לקבוצה כלשהי של מ"ט.

הערה: בפרק זה כדאי לשים לב מתי עוסקים ביצירה של טופולוגיה על־ידי בסיס לבין יצירה שלה על־ידי תת־בסיס.

- **מכפלת שני מרחבים**

יהיו $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ מרחבים טופולוגיים. נגדיר את **טופולוגיית המכפלה** שלהם על הקבוצה $X \times Y$ להיות הטופולוגיה הנוצרת על־ידי הבסיס $\mathfrak{B} = \{U \times V | U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$.

תרגיל: להראות שזו אכן טופולוגיה, כלומר יש להראות כי $\mathfrak{B}$ אכן בסיס. נשים לב לצורך כך כי $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.

טענה: אם $\mathfrak{B}_X, \mathfrak{B}_Y$ בסיסים לטופולוגיות $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$ בהתאמה, אזי קיים בסיס לטופולוגיית המכפלה שהגדרנו, והוא:

$$\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y = \{B_1 \times B_2 | B_1 \in \mathfrak{B}_X,\ B_2 \in \mathfrak{B}_Y\}$$

הוכחה: נשתמש בטענה שהזכרנו לעיל, שבסיס $\mathfrak{B}$ יוצר טופולוגיה $\mathcal{T}$ אם לכל $U \in \mathcal{T}$, לכל $x \in U$ קיימת $B \in \mathfrak{B}$ כך ש-$x \in B \subset U$.

תהי W קבוצה פתוחה ב-$X \times Y$ ויהי $(x, y) \in W$. מהגדרת טופולוגיית המכפלה נובע שקיימות U, V פתוחות כך ש-$(x, y) \in U \times V \subset W$.

אבל מהיות $\mathfrak{B}_X, \mathfrak{B}_Y$ בסיסים נובע שקיימות B_1, B_2 פתוחות בהתאמה כך ש-$(x, y) \in B_1 \times B_2 \subseteq U \times V \subseteq W$, ולכן מתקיים התנאי שהזכרנו. ■

הגדרה: יהיו $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ מרחבים טופולוגיים. נגדיר שתי העתקות באופן הבא:

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1\ ,\ \ \pi_1(x_1, x_2) = x_1$$

$$\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2\ ,\ \ \pi_2(x_1, x_2) = x_2$$

העתקות אלו נקראות **הטלות** של $X_1 \times X_2$ על X_1, X_2 בהתאמה.
נשים לב כי $\pi_1^{-1}(U) = U \times X_2$ ל-$U \in \mathcal{T}_1$ ובדומה $\pi_2^{-1}(V) = X_1 \times V$ ל-$V \in \mathcal{T}_2$.

טענה: הקבוצה $\mathfrak{C} = \left\{\pi_1^{-1}(U) \,|U \in \mathcal{T}_1\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1}(V) \,|V \in \mathcal{T}_2\right\}$ היא תת־בסיס שיוצר את טופולוגיית המכפלה.

- **מכפלת מספר סופי של מרחבים**

יהי $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i=1}^n$ ל-n טבעי כלשהו, אוסף של מרחבים טופולוגיים. נגדיר את **טופולוגיית המכפלה** שלהם על הקבוצה $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ להיות הטופולוגיה הנוצרת על־ידי הבסיס $\mathfrak{B} = \{U_1 \times U_2 \times ... \times U_n | U_i \in \mathcal{T}_i\}$.

הערה: גם במקרה זה ניתן להגדיר באופן שקול את טופולוגיית המכפלה להיות זו הנוצרת על־ידי התת־בסיס:

$$\mathfrak{C} = \left\{\pi_1^{-1}(U_1) \,|U_1 \in \mathcal{T}_1\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1}(U_2) \,|U_2 \in \mathcal{T}_2\right\} \cup ... \cup \left\{\pi_n^{-1}(U_n) \,|U_n \in \mathcal{T}_n\right\}$$

- **מכפלה כלשהי של מרחבים**

יהי $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ לקבוצת אינדקסים I כלשהי, אוסף של מרחבים טופולוגיים. נגדיר שתי טופולוגיות שונות על קבוצת המכפלה $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$.

1. **טופולוגיית המכפלה:** מסומנת $\mathcal{T}_{\text{product}}$. נגדיר $S_\alpha = \left\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \,|U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\right\}$, ונגדיר את טופולוגיית המכפלה להיות זו שנוצרת על־ידי התת־בסיס $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$.
2. **טופולוגיית הקופסה:** מסומנת $\mathcal{T}_{\text{box}}$. נוצרת על־ידי הבסיס $\left\{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha | U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\right\}$.

נשים לב שבמקרים של מכפלה סופית ההגדרות המקבילות היו שקולות, אך באופן כללי הן עלולות להיות שונות, וטופולוגיית הקופסה חזקה יותר מטופולוגיית המכפלה.

דוגמה: ניקח את המכפלה $\prod_{\alpha \in I} [-1, 1]$ ונתבונן בקבוצה $U = \prod_{\alpha \in I} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. אם I לא סופית, אז U פתוחה בטופולוגיית הקופסה, כי כל אחת מקבוצות המכפלה פתוחה ב-$[-1, 1]$, אבל U לא פתוחה בטופולוגיית המכפלה.

הערה: בהינתן מרחבים $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ והעתקות מתאימות $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, טופולוגיית המכפלה היא הטופולוגיה החלשה ביותר על מכפלת המרחבים שתחתיה ההטלות π_α רציפות. למעשה, ניתן להגדיר מראש את טופולוגיית המכפלה להיות החלשה ביותר שתחתיה ההטלות רציפות.

הערה: ידוע כי פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ רציפה בטופולוגיה הסטנדרטית אם ורק אם היא רציפה בכל קואורדינטה שלה בטווח.

באופן דומה, טופולוגיית המכפלה של מכפלה כלשהי היא הטופולוגיה שבה פונקציה $f : Y \to \prod_\alpha X_\alpha$ היא רציפה, אם ורק אם היא רציפה בכל אחת מהקואורדינטות. כלומר אם הפונקציות $\pi_\alpha \circ f$ רציפות כולן.

6 סגירות במרחב טופולוגי

הגדרה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי. אומרים כי $C \subset X$ **קבוצה סגורה**, אם $X - C$ היא קבוצה פתוחה.

הערות:

1. נסמן ב-$\mathfrak{C}$ את אוסף הקבוצות הסגורות ב-X. קל לראות כי $\emptyset, X \in \mathfrak{C}$.
2. באופן הפוך לקבוצות הפתוחות, איחוד סופי של סגורות הוא קבוצה סגורה, וחיתוך אינסופי של סגורות הוא קבוצה סגורה.
   כלומר, אם $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ סגורות ל-I קבוצת אינדקסים כלשהי, אז גם $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ סגורה. וכן אם $\{C_i\}_{i=1}^n$ ל-n טבעי כלשהו, אז גם $\bigcup_{i=1}^n C_i$ סגורה.
3. נשים לב שאוסף הקבוצות הסגורות מגדיר בדיוק את אוסף הקבוצות הפתוחות, ולכן ניתן היה להגדיר טופולוגיה באמצעות אוסף הקבוצות הסגורות, כלומר כל אוסף קבוצות המקיים את שתי התכונות הנ"ל.

דוגמאות:

1. במרחב טופולוגי דיסקרטי כל קבוצה היא סגורה, כי כל קבוצה בו פתוחה.
2. אם (X, d) מרחב מטרי, אז הכדורים מהצורה $\{y | d(x, y) \leq r\}$ ל-$x \in X$ ו-$0 \leq r \in \mathbb{R}$ כלשהם, הם קבוצה סגורה.

הטופולוגיה של פורסטנברג ואינסופיות הראשוניים

נראה הוכחה יפה בכלים טופולוגיים שקיימים אינסוף ראשוניים.

הגדרה: נתבונן בקבוצת כל הסדרות החשבוניות $\mathfrak{B} = \{a\mathbb{Z} + b | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ כבסיס, ונגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הנוצרת על־ידי בסיס זה.

הערה: קל לראות ש-$\mathfrak{B}$ כיסוי של $\mathbb{Z}$, ולכן כדי להראות שקבוצה זו היא בסיס נותר להראות את תכונת החיתוך.

יהיו $A_1 = a_1\mathbb{Z} + b_1, A_2 = a_2\mathbb{Z} + b_2$ שתי סדרות חשבוניות. אם חיתוכן ריק סיימנו, לכן נניח כי $x \in A_1 \cap A_2$, ונרצה למצוא סדרה חשבונית שמכילה את x ומוכלת בחיתוך, אבל נשים לב כי הסדרה $x + a_1 a_2 \mathbb{Z}$ מקיימת את הדרוש.

טענה: כל סדרה חשבונית היא גם קבוצה סגורה.

הוכחה: המשלימה של $a\mathbb{Z} + b$ כלשהי היא הקבוצה:

$$\mathbb{Z} - (a\mathbb{Z} + b) = \bigcup_{b_i = 1, \ldots, |a| - 1} [a\mathbb{Z} + (b + b_i)]$$

כלומר היא איחוד של $|a| - 1$ סדרות חשבוניות, ולכן היא איחוד של קבוצות פתוחות בטופולוגיה שהגדרנו ומכאן שהמשלים הנ"ל קבוצה פתוחה. לכן $a\mathbb{Z} + b$ סגורה. ■

מסקנה: קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: ידוע שלכל מספר שלם יש פירוק סופי לראשוניים. לכן אם $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ (נניח לצורך הפשטות שייתכנו חזרות) אז ברור שלמשל $a \in p_1\mathbb{Z}$. מכאן כי $\bigcup_{p \text{ is prime}} p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} - \{\pm 1\}$, כי ל-$\pm 1$ אין פירוק לראשוניים.

אם בשלילה היה רק מספר סופי של ראשוניים אז הקבוצה $\mathbb{Z} - \{\pm 1\}$ הייתה סגורה, כי היא איחוד סופי של סדרות חשבוניות שהן קבוצות סגורות. כלומר המשלימה שלה, $\{\pm 1\}$, הייתה קבוצה פתוחה. אבל זה בבירור שגוי כי $\{\pm 1\}$ אינה סדרה חשבונית. ■

6.1 סגור, פנים ושפה

הגדרה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$ כלשהי. **הסגור** של A הוא הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את A, והיא מסומנת ב-$\overline{A}$.

באפן שקול, הסגור של A הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A. (חיתוך כלשהו של סגורות הוא קבוצה סגורה).

דוגמה: ניקח $X = \{a,b\}$ וטופולוגיה $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. אז $\overline{\{a\}} = X$ וכן $\overline{\{b\}} = \{b\}$.

הגדרה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ותהי $x \in X$. **סביבה** של x היא קבוצה $E \subset X$ כך שקיימת פתוחה $U \subset E$ כך ש-$x \in U$.

דוגמה: ב-$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, $[0,1]$ היא סביבה של $\frac{1}{2}$, כי $[0,1] \supset \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \ni \frac{1}{2}$.

טענה: בהינתן מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ וקבוצה A, מתקיים כי $x \in \overline{A}$ אם ורק אם לכל סביבה E של x מתקיים $E \cap A \neq \emptyset$.

מסקנה: הסגור $\overline{A}$ הוא אוסף כל ה-$x \in X$, כך שלכל סביבה E של x מתקיים $E \cap A \neq \emptyset$.

הוכחה: נראה כי השלילות של שתי התכונות הללו שקולות. כלומר נראה כי $x \notin \overline{A}$ אם ורק אם קיימת סביבה E של x כך שמתקיים $E \cap A = \emptyset$.

(כיוון ראשון) נניח כי $x \notin \overline{A}$. הקבוצה $X - \overline{A}$ היא פתוחה, ובפרט היא סביבה של x המקיימת $\left(X - \overline{A}\right) \cap A = \emptyset$.

(כיוון שני) נניח שקיימת סביבה E של x כך שמתקיים $E \cap A = \emptyset$. מהיות E סביבה נובע שקיימת קבוצה פתוחה $U \subset E$ כך ש-$x \in U$, ובפרט גם $U \cap A = \emptyset$.

U פתוחה ולכן $X - U$ סגורה המקיימת $A \subset X - U$. מהגדרת הסגור נובע כי $\overline{A} \subset X - U$. אבל $x \in U$ ולכן בהכרח $x \notin \overline{A}$. ■

למה:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (ובאינדוקציה הטענה נכונה לכל איחוד סופי).
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

דוגמה להכלה ממש: $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית. מתקיים $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ ומצד שני $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

הגדרה: אם $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ו-$A \subset X$. אומרים כי A **צפופה** ב-X אם $\overline{A} = X$.

הגדרה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ותהי $A \subset X$ כלשהי. **הפנים** של A הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-A, והיא מסומנת A°.

באופן שקול, הפנים של A הוא איחוד הקבוצות הפתוחות שמוכלות ב-A. (איחוד כלשהו של פתוחות הוא קבוצה פתוחה).

הגדרה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$ כלשהי. **השפה** של A היא הקבוצה $\partial A =: \overline{A} - A^\circ$.

הגדרה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ויהיו $A \subseteq X$, $x \in X$ כלשהן. אומרים כי x היא **נקודת הצטברות** של A, אם כל סביבה של x מכילה נקודה ב-A, השונה מ-x.

טענה: בהינתן מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ וקבוצה $A\subset X$, נסמן ב-A' את כל נקודות ההצטברות של A. אזי מתקיים $\overline{A}=A\cup A'$.

הוכחה: נראה את השוויון באמצעות הכלות הדדיות.

נראה כי $A\cup A'\subset\overline{A}$: אם $x\in A\cup A'$, אז מההגדרות מתקיים כי $x\in A$ או ש-$x\notin A$ וקיימת בכל סביבה שלה נקודה מ-A שונה ממנה.

ברור כי אם $x\in A$ אז $x\in A\subset\overline{A}$. נראה שבמקרה השני, אם $x\notin A$ נקודת הצטברות, אז גם $x\in\overline{A}$. אבל הראינו שהסגור הוא אוסף הנקודות שכל סביבה שלהם נחתכת עם A באופן לא ריק, וקל לראות כי כל נקודת הצטברות מקיימת את התנאי הזה מהגדרתה, ולכן $x\in\overline{A}$.

נראה כי $\overline{A}\subset A\cup A'$: אם $x\in\overline{A}$, אז מאיפיון שקול לסגור שהראינו נובע שכל סביבה E של x מקיימת $E\cap A\neq\emptyset$.

תהי סביבה E ותהי $y\in E\cap A$. אם $y=x$ אז $x\in A$ וסיימנו, ואם $y\neq x$ אז $y\in E$ וגם $y\in A$, כלומר בסביבה השרירותית E קיימת $y\neq x$, ולכן x נקודת הצטברות, כלומר $x\in A'$. ■

7 רציפות במרחב טופולוגי

הגדרה: יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ותהי העתקה $f:X\to Y$. אומרים כי f העתקה **רציפה**, אם לכל U פתוחה ב-Y מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.[5]

הערה: בהינתן קבוצה X כלשהי, מרחב טופולוגי $(Y,\mathcal{T}_Y)$ והעתקה $f:X\to Y$, ניתן להגדיר טופולוגיה על X על־ידי התת־בסיס $\left\{f^{-1}(U)|U\in\mathcal{T}_Y\right\}$.

ברור ש-f רציפה תחת טופולוגיה זו, ויותר מכך: זוהי הטופולוגיה החלשה ביותר שעבורה f הנתונה רציפה.

באופן דומה, בהינתן קבוצה Y כלשהי, מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T}_X)$ והעתקה $f:X\to Y$, ניתן להגדיר טופולוגיה על Y על־ידי התת־בסיס $\left\{U\subset Y|f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_X\right\}$.

ברור ש-f רציפה תחת טופולוגיה זו, ויותר מכך: זוהי הטופולוגיה החזקה ביותר שעבורה f הנתונה רציפה.

7.1 הגדרות שקולות לרציפות

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ותהי העתקה $f:X\to Y$. אזי כל התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה (במובן שהגדרנו).
2. לכל קבוצה סגורה C ב-Y, הקבוצה $f^{-1}(C)$ סגורה ב-X.
3. אם $\mathfrak{B}$ בסיס לטופולוגיה של Y, אז לכל $B\in\mathfrak{B}$ הקבוצה $f^{-1}(B)$ פתוחה ב-X.[6]

[5] מגדירים $f^{-1}(U)=:\{x\in X|\exists_{u\in U}f(x)=u\}\subset X$

[6] למעשה מספיק גם לטעון זאת על תת־בסיס, בגלל שתמונה הפוכה משמרת איחוד וחיתוך. כלומר:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha}U_{\alpha}\right)=\bigcup_{\alpha}f^{-1}(U_{\alpha})\qquad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha}U_{\alpha}\right)=\bigcap_{\alpha}f^{-1}(U_{\alpha})$$

4. לכל $x \in X$, לכל סביבה $W \subset Y$ של $f(x)$ מתקיים כי $f^{-1}(W) \subset X$ היא סביבה של x.

הערה טרמינולוגית: אם תנאי 4 מתקיים ל-$x \in X$ מסויימת אז f רציפה בנקודה זו. כשתנאי זה מתקיים לכל $x \in X$, הוא שקול לרציפות במובן הכללי שהגדרנו.

5. קיים ל-X כיסוי פתוח כלשהו $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$,[7] כך שלכל $\alpha \in I$ הפונקציה המצומצמת $f_\alpha =: f|_{U_\alpha}$ רציפה.[8]

6. קיים ל-X כיסוי סגור סופי $\{C_i\}_{i=1}^{n}$, כך שלכל $1 \leq i \leq n$ הפונקציה המצומצמת $f_i =: f|_{C_i}$ רציפה.

7. לכל $A \subset X$ מתקיים כי $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

הוכחה:

- 1) $\iff$ 2) מהזהות הכללית $f^{-1}(Y - C) = X - f^{-1}(C)$ קל לראות את השקילות.
- 1) $\iff$ 3) נובע מההגדרת בסיס.
- 1) $\Longleftarrow$ 4)

יהי $x \in X$ ותהי $W \subset Y$ סביבה של $f(x)$. לכן יש קבוצה פתוחה $f(x) \in U \subset W$. מרציפות f נובע כי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X וקל לראות כי $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(W)$.

- 4) $\Longleftarrow$ 1)

תהי $U \subseteq Y$ קבוצה פתוחה, נרצה להראות כי $f^{-1}(U)$ פתוחה. תהי $x \in f^{-1}(U)$, אז $f(x) \in U$ ולכן מההנחה נובע כי $f^{-1}(U)$ סביבה של x. כלומר יש קבוצה פתוחה $U_x \subset f^{-1}(U)$ המכילה את x.

כעת קל לראות כי $\bigcup_{x \in f^{-1}(U)} U_x = f^{-1}(U)$ ולכן היא איחוד של קבוצות פתוחות, ומכאן כי היא פתוחה.

- 1) $\iff$ 5) נובע בקלות מהגדרת הרציפות.
- 5) $\iff$ 6) נובע מהגדרת קבוצות פתוחות וסגורות, ומזהויות יסודיות של איחוד וחיתוך תחת תמונה הפוכה.
- 1) $\Longleftarrow$ 7)

יהי $x \in \overline{A} \subset X$. נראה כי $f(x) \in \overline{f(A)}$, כלומר שכל סביבה של $f(x)$ נחתכת עם $f(A)$. תהי U סביבה של $f(x)$. מרציפות f נובע כי $f^{-1}(U)$ סביבה פתוחה של x. אבל $x \in \overline{A}$ ולכן קיימת נקודה $y \in f^{-1}(U) \cap A$. מכאן כי $f(y) \in U \cap f(A)$.

---

[7] **הגדרה:** בהינתן מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T})$, אומרים שקבוצה $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{T}$ ל-I קבוצת אינדקסים כלשהי היא **כיסוי פתוח** של X, אם מתקיים $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

[8] כפי שהזכרנו לעיל, כל $U_\alpha \subseteq X$ היא מרחב טופולוגי תחת הטופולוגיה המושרית מ-X.

• $(2 \Longleftarrow 7)$
תהי $C \subseteq Y$ קבוצה סגורה, נראה כי $f^{-1}(C) \subseteq X$ סגורה. לשם כך מספיק להראות כי $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$.
מהנתון נובע שמתקיים $f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subset \overline{f\left(f^{-1}(C)\right)} \subset \overline{C} = C$ (כי C סגורה)
ולכן $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C)$.
אבל מצד שני מהגדרת סגור ברור כי $f^{-1}(C) \subset \overline{f^{-1}(C)}$, ומההכלות ההדדיות נסיק $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$, כנדרש. ■

דוגמאות:

1. כל פונקציה קבועה בין מרחבים טופולוגיים היא רציפה.
2. אם X מרחב טופולוגי ו-$E \subset X$, אז "העתקת ההכלה" המוגדרת $i_E : E \to X$ המעתיקה $x \mapsto x$ (שזו למעשה צמצום של העתקת הזהות לתת־מרחב E), היא רציפה.

   הערה: ניתן היה להגדיר את הצמצום של טופולוגיה לתת־קבוצה כלשהי, על־ידי הטופולוגיה החלשה ביותר כך ש-i_E רציפה.
3. אם X, Y, Z מרחבים טופולוגיים ונתונות ההעתקות $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, קל לראות מהגדרת הרציפות שההרכבה $g \circ f : X \to Z$ היא העתקה רציפה.
4. אם $f : X \to Y$ העתקה רציפה בין מרחבים טופולוגיים, אז $f|_E : E \subseteq X \to Y$ גם היא רציפה. ניתן לראות זאת מצירוף שתי הדוגמאות האחרונות, שכן $f|_E = f \circ i_E$.
5. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של מרחב טופולוגי X. נניח שלכל $\alpha \in I$ מוגדרת העתקה רציפה $f_\alpha : U_\alpha \subset X \to Y$ וכן גם מתקיים $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, אזי ניתן לבנות העתקה רציפה $f : X \to Y$ באופן הבא:
   לכל $x \in X$ קיים $\alpha(x)$ כך ש-$x \in U_{\alpha(x)}$. נגדיר $f(x) = f_{\alpha(x)}(x)$.
6. אם $f, g : X \to \mathbb{R}$ העתקות רציפות, אז $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (אם $g \neq 0$ תמיד) העתקות רציפות.
7. נניח כי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ קבוצה כלשהי של מרחבים טופולוגיים. נתבונן בקבוצת המכפלה $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ועל ההטלות $\pi_\beta : X \to X_\beta$ שכפי שהגדרנו לעיל מעתיקות $\prod_{\alpha \in I} x_\alpha \mapsto x_\beta$. כלומר π_β מעתיקה כל ווקטור באורך I לקואורדינטה ה-β שלו).

   נראה שההטלות המתאימות $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ הן העתקות רציפות תחת טופולוגיית המכפלה $\mathcal{T}_{\text{product}}$, ומזה גם ינבע כי הן העתקות רציפות תחת טופולוגיית הקופסה $\mathcal{T}_{\text{box}}$, כי האחרונה חזקה יותר מהראשונה.

   נשים לב שכדי להראות רציפות של העתקה מספיק להראות רציפות על קבוצות של תת־בסיס שלה. אבל הגדרנו את תת הבסיס שיוצר את $\mathcal{T}_{\text{product}}$ להיות האוסף $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ ל-U_α פתוחות ב-X_α, ולכן קל לראות כי הן רציפות.
8. נגדיר העתקה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\infty$ על־ידי $t \mapsto (t, t, ..., t, ...)$. ניתן להראות שהעתקה זו רציפה תחת טופולוגיית המכפלה $\mathcal{T}_{\text{product}}$ ולא רציפה תחת טופולוגיית הקופסה $\mathcal{T}_{\text{box}}$.

זה שהיא לא רציפה תחת טופולוגיית הקופסה נובע מכך שהקבוצה $B = \left\{\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ פתוחה בטופולוגיה זו, אבל מתקיים $f^{-1}(B) = \{0\}$, וזו קבוצה סגורה. לעומת זאת בטופולוגיית המכפלה רציפות שקולה לרציפות בכל קואורדינטה, ובמקרה זה f בכל קואורדינטה היא הזהות, ולפיכך רציפה.

7.2 הומאומורפיזם

הגדרה: יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ותהי $f:X\to Y$. אומרים כי f היא **הומאומורפיזם**, אם מתקיימים כל התנאים הבאים:

1. f העתקה חד־חד־ערכית ועל Y
2. $f:X\to Y$ העתקה רציפה
3. $f^{-1}:Y\to X$ העתקה רציפה

אם קיימת f כנ"ל אומרים כי המרחבים הטופולוגיים X,Y הם **הומאומורפיים**.

דוגמאות:

1. המרחבים $\mathbb{R},(-1,1)$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית הם הומאומורפיים על־ידי $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ שמעתיקה $x\mapsto\frac{x}{1-x^2}$.
2. נגדיר את "הספרה ה-n-ממדית" כקבוצה הבאה:

$$S^n=\left\{x=(x_1,...,x_n,x_{n+1})\subset\mathbb{R}^{n+1}|d(x,0)=1\right\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

כלומר אוסף כל הנקודות שמרחקן מ-$(0,...,0)=0$ הוא 1. למשל הספירה החד־ממדית היא מעגל היחידה, והספירה הדו־ממדית היא כדור היחידה.
נגדיר העתקה $f:S^2-\{(0,0,1)\}\to\mathbb{R}^2$ להיות "ההטלה הסטריאוגרפית". כלומר ההעתקה לוקחת כל נקודה $s\in S^2$, ומעתיקה אותה לנקודה על המישור שנחתכת עם הישר היחיד שעובר ב-s וב-$(0,0,1)$. העתקה זו היא הומאומורפיזם בין $\mathbb{R}^2$ לבין $S^2-\{(0,0,1)\}$.

3. אנטי־דוגמה: נגדיר העתקה $f:[0,2\pi]\to S^1$ (דהיינו אל מעגל היחידה) על ידי $t\mapsto(\cos(t),\sin(t))$. קל לראות שהעתקה זו חח"ע ועל וכי היא רציפה, אבל $f^{-1}:S^1\to[0,2\pi]$ אינה רציפה. כך למשל f^{-1} הקבוצה הפתוחה $[0,1)$ מתקבלת על־ידי f^{-1} מקבוצה לא־פתוחה ב-S^1 (קשת כלשהי על המעגל).

חלק III
הפרדה

הגדרות: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי.

1. יהיו $A,B\subset X$ תתי־קבוצות זרות. נאמר כי A,B **ניתנות להפרדה** על־ידי קבוצות פתוחות, אם קיימות U,V פתוחות כך שמתקיים $A\subset U$, $B\subset V$ וגם $U\cap V=\emptyset$.
2. יהיו $x,y\in X$ זוג נקודות שונות. נאמר כי x,y ניתנות להפרדה אם הקבוצות הזרות $\{x\},\{y\}$ ניתנות להפרדה במובן של קבוצות.
3. יהיו $x\in X$, $A\subset X$ נקודה ותת־קבוצה כך ש-$x\notin A$. נאמר כי x,A ניתנות להפרדה אם הקבוצות הזרות $A,\{x\}$ ניתנות להפרדה במובן של קבוצות.

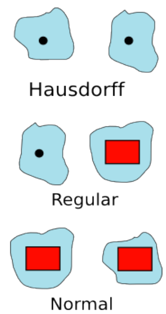
8 אקסיומות הפרדה

הגדרה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי. נגדיר כמה תכונות שייתכן ומתקיימות במרחב:

1. **אקסיומת ההפרדה T_0:** לכל זוג נקודות שונות קיימת פתוחה שמכילה אחת מהן ולא את השנייה.
2. **אקסיומת ההפרדה T_1:** לכל זוג נקודות שונות קיימת פתוחה שמכילה אחת מהם ולא את השנייה, וקיימת פתוחה שמכילה את השנייה ולא את הראשונה. באופן שקול: כל יחידון הוא קבוצה סגורה.[9]
3. **אקסיומת ההפרדה T_2 (האוסדורף):** כל זוג נקודות שונות ניתנות להפרדה.
4. **אקסיומת ההפרדה T_3:** מתקיימת T_1 וגם מתקיימת **רגולריות**; כלומר גם כל נקודה וקבוצה סגורה (שלא מכילה את הנקודה) ניתנות להפרדה.
5. **אקסיומת ההפרדה T_4:** מתקיימת T_1 וגם מתקיימת **נורמליות**; כלומר גם כל זוג קבוצות זרות וסגורות ניתנות להפרדה.

[9] נראה את השקילות: בכיוון ראשון, אם כל יחידון הוא סגור אז לכל $x,y\in X$ שונים הקבוצה $X-\{x\}$ פתוחה ומקיימת את הנדרש.
בכיוון שני, יהי $x\in X$. לכל $y\in X-\{x\}$ יש U_y פתוחה המכילה את y ולא את x. לכן $X-\{x\}=\bigcup_{y\in X-\{x\}}U_y$ וזה איחוד של קבוצות פתוחות ולכן זו קבוצה פתוחה. מכאן כי $\{x\}$ סגורה.

המחשה (מוויקיפדיה):[א]



[א] נקודה שחורה היא נקודה במרחב; ריבוע אדום הוא קבוצה סגורה; ויריעה כחולה היא קבוצה פתוחה.

הערה: $T_4 \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$

$T_3 \Longrightarrow T_4$: אם ניתן להפריד כל זוג קבוצות זרות וסגורות, אז ניתן להפריד גם קבוצה סגורה ונקודה, כי מהנחת T_1 כל יחידון הוא קבוצה סגורה.

$T_2 \Longrightarrow T_3$: מתקבל כמקרה פרטי.

$T_1 \Longrightarrow T_2$: נובע מהאיפיון השקול שהראינו ל-T_1.

$T_0 \Longrightarrow T_1$: מתקבל כמקרה פרטי.

טענה: מרחב טופולוגי הוא רגולרי אם ורק אם לכל $x \in X$, לכל פתוחה U שמכילה את x קיימת פתוחה V שמכילה את x כך שמתקיים $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

טענה: מרחב טופולוגי הוא נורמלי אם ורק אם לכל קבוצה סגורה A, לכל פתוחה U שמכילה את A קיימת פתוחה V שמכילה את A כך שמתקיים $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

הוכחה: (כיוון ראשון) נניח כי X מרחב טופולוגי נורמלי. תהי A קבוצה סגורה ותהי U פתוחה שמכילה את A. לכן $X - U$ סגורה וזרה ל-A.

מהנחת הנורמליות קיימות V, W פתוחות וזרות שעבורן $A \subset V$, $X - U \subset W$, ומכאן:

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset X - W \subset U$$

כאשר ההכלה השלישית נובעת מכך ש-$\overline{V}, W$ קבוצות זרות, שכן V, W פתוחות וזרות.[10]

(כיוון שני) נניח את התנאי המצוין בטענה, ויהיו A, B סגורות וזרות. מתקיים כי $A \subset X - B$ ו-$X - B$ פתוחה ולכן היא פתוחה שמכילה את A.

מההנחה נובע שקיימת V פתוחה כך שמתקיים $A \subset V \subset \overline{V} \subset X - B$. אבל $B \subset X - \overline{V}$, ולכן הקבוצות $V, X - \overline{V}$ פתוחות וזרות שמפרידות את A, B. ■

טענה: מרחב טופולוגי X הוא האוסדורף (T_2) אם ורק אם $\triangle =: \{(x,x) \,|x \in X\} \subset X \times X$ היא קבוצה סגורה בטופולוגיית המכפלה על המרחב $X \times X$.

[10] כי $X - W$ סגורה וכן $V \subseteq X - W$ מזרותן. מהגדרת הסגור נובע $\overline{V} \subseteq X - W$ ומכאן כי $\overline{V}, W$ זרות.

הוכחה: (כיוון ראשון)

נניח כי X מרחב האוסדורף ונוכיח כי $\triangle^c$ קבוצה פתוחה. תהי $(x,y) \in \triangle^c$, כלומר $x \neq y$. מהיות X האוסדורף נובע שניתן להפריד את x,y על־ידי זוג קבוצות פתוחות וזרות U,V בהתאמה. מכאן כי $(x,y) \in U \times V \subset X \times X$ ומתקיים $U \times V \subset \triangle^c$ מזרות.

(כיוון שני)

אם $\triangle$ קבוצה סגורה ב-$X \times X$ עם טופולוגיית המכפלה אז $\triangle^c$ פתוחה. לכן לכל $x,y \in X$ שונות קיימת קבוצה פתוחה W כך שמתקיים $(x,y) \in W$. אבל קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה היא מהצורה $W = U \times V$ כאשר U,V פתוחות ב-X, ולכן $(x,y) \in U \times V$ כך ש-$x \in U$, $y \in V$. נשים לב ש-U,V זרות כי אם היה $t \in U \cap V$ אז $(t,t) \in U \times V$, בסתירה לכך ש-$U \times V \subset \triangle^c$. ■

טענה: עבור T_1, T_2, T_3, אם X הוא מרחב טופולוגי T_i, אז גם כל תת־מרחב שלו הוא T_i.[11]

הוכחה: נוכיח ל-T_1, T_3. יהי X מרחב טופולוגי T_3, כלומר X הוא T_1 ורגולרי, ויהי $E \subset X$ תת־מרחב עם הטופולוגיה המושרית.

נראה ש-E הוא T_1: תהי $x \in E$. מתקיים כי $\{x\}$ סגורה ב-X מהנחת T_1, ולכן $X - \{x\}$ פתוחה ב-X. נשים לב כי $E - \{x\} = E \cap (X - \{x\})$, ולכן זו קבוצה פתוחה בטופולוגיה המושרית, ומכאן כי $\{x\}$ סגורה ב-E.

נראה ש-E הוא T_3: תהי $x \in E$ ותהי $A \subset E$ סגורה ב-E כך ש-$x \notin A$. מהגדרת הטופולוגיה המושרית נובע שקיימת C סגורה ב-X כך ש-$A = E \cap C$ וכן $x \notin C$.[12] מכך ש-X הוא T_3 נובע שניתן להפריד את x,C על־ידי U,V פתוחות וזרות כלשהן בהתאמה, ומכאן $x \in E \cap U$, $A \subset E \cap V$, שאלו קבוצות פתוחות מהגדרת הטופולוגיה המושרית. ■

טענה: עבור T_1, T_2, T_3, אם X,Y הם מרחבים טופולוגיים T_i, אז גם $X \times Y$ הוא T_i בטופולוגיית המכפלה.[13]

הוכחה: נוכיח ל-T_3. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים T_3, נוכיח שמתקיים את התנאי השקול לרגולריות שהראינו לעיל.

תהי A סגורה ותהי W סביבה של $(x,y) \in X \times Y$. מהיות W סביבה נובע שקיימות V_1, V_2 פתוחות כך ש-$(x,y) \in V_1 \times V_2 \subset W$.

מרגולריות X,Y נובע שקיימות U_1, U_2 כך שמתקיים:

$$x \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset V_1$$

$$y \in U_2 \subset \overline{U_2} \subset V_2$$

ומכאן כי:

$$(x,y) \in U_1 \times U_2 \subset \overline{U_1 \times U_2} = \overline{U_1} \times \overline{U_2} \subset V_1 \times V_2$$

כאשר את השוויון לא קשה להראות בטופולוגיית המכפלה.[14] ■

[11] נשים לב שזה לא נכון ל-T_4. נציין מדוע במהלך ההוכחה.

[12] בשלב זה ההוכחה לא תעבוד ל-T_4. כי בהינתן A,B סגורות וזרות ב-E זה לא אומר שהן גם זרות ב-X. לכן אפילו אם X הוא T_4 ייתכן שהן חופפות ב-X ולכן לא ניתנות להפרדה.

[13] גם זה לא נכון ל-T_4, מסיבה דומה.

[14] הוא לא בהכרח נכון בטופולוגיית הקופסה של מכפלה אינסופית.

טענה: כל מרחב מטרי הוא T_4. (וממילא גם T_1, T_2, T_3).

הוכחה: יהיו A, B קבוצות סגורות וזרות במרחב מטרי X. ראשית קל לראות שלכל $x \in X$ היחידון $\{x\}$ סגור, כי $\{x\} = \{y \in X | d(y,x) \leq 0\}$. נראה שמתקיימת נורמליות.

הגדרה: בהינתן נקודה $t \in X$ וקבוצה $E \subset X$, נגדיר $d(t,E) =: \inf_{e \in E} d\{t,e\}$.

נשים לב שלכל $x \in A$ מתקיים $d(x,B) > 0$ ממש, כי אחרת $x \in \overline{B} = B$ בסתירה לזרות A, B. ובאופן דומה גם ל-$x \in B$.

אם כך לכל $a \in A$ נסמן $d(a,B) = r_{a,B} > 0$, וכן לכל $b \in B$ נסמן $d(b,A) = r_{b,A} > 0$.

כעת נשים לב שמתקיים:

$$A \subset U =: \bigcup_{a \in A} B_{\frac{r_{a,B}}{2}}(a) \qquad B \subset V =: \bigcup_{b \in B} B_{\frac{r_{b,A}}{2}}(b)$$

אם כך מספיק להראות ש-U, V הנ"ל זרות, ובזאת נפריד את A, B.

נניח בשלילה כי $x \in U \cap V$. לכן יש $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ כך ש-$x \in B_{\frac{r_{a_0,B}}{2}}(a_0) \cap B_{\frac{r_{b_0,A}}{2}}(b_0)$. נקבל מאי־שוויון המשולש:

$$d(a_0,b_0) \leq d(a_0,x) + d(x,b_0) < \frac{d(a_0,B)}{2} + \frac{d(b_0,A)}{2} \leq \frac{d(a_0,b_0)}{2} + \frac{d(a_0,b_0)}{2} = d(a_0,b_0)$$

וזו סתירה. ■

דוגמאות: ראינו שמתקיים $T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$. נראה דוגמה נגדית לכל אחת מהגרירות ההפוכות.

1. **דוגמה למרחב שאינו T_0:** כל מרחב עם לפחות שתי נקודות שונות והטופולוגיה הטריויאלית.
2. **דוגמה למרחב T_0 שאינו T_1:** ניקח את הקבוצה $X = \{a,b\}$ עם הטופולוגיה $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.
3. **דוגמה למרחב T_1 ולא T_2:** כל מרחב אינסופי עם טופולוגיית המשלים הסופי.[15] קל לראות שכל נקודה היא סגורה, אבל לא ניתן להפריד נקודות כי כלל לא קיימות זוג קבוצות פתוחות וזרות.
4. **דוגמה למרחב T_2 ולא T_3:** נגדיר את המרחב הטופולוגי $\mathbb{R}_{\frac{1}{\mathbb{N}}}$ להיות הקבוצה $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הנוצרת על־ידי הבסיס:

$$\{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}\} \cup \left\{(a,b) \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} | a,b \in \mathbb{R}\right\}$$

קל לראות כי $\mathbb{R}_{\frac{1}{\mathbb{N}}}$ הוא T_2, כי הטופולוגיה עליו חזקה יותר מהטופולוגיה הסטנדרטית שבה כל זוג נקודות ניתנות להפרדה. נראה שהוא אינו T_3.

ראשית נשים לב כי $\frac{1}{\mathbb{N}}$ סגורה, כי $\mathbb{R}_{\frac{1}{\mathbb{N}}} - \frac{1}{\mathbb{N}} = \bigcup_{a,b \in \mathbb{R}} (a,b) \setminus \frac{1}{\mathbb{N}}$. נראה שלא ניתן להפריד את הנקודה 0 מהקבוצה הסגורה $\frac{1}{\mathbb{N}}$.

[15] כלומר הקבוצות הפתוחות הן אלו שהמשלימות שלהן סופיות.

נניח כי U,V פתוחות המקיימות $0\in U$, $\frac{1}{\mathbb{N}}\subset V$. מהיות U פתוחה נובע שהיא מכילה קבוצת בסיס כלשהי סביב 0, ולכן היא בהכרח מהצורה $(a_0,b_0)\setminus\frac{1}{\mathbb{N}}$ ל-$a_0<0<b_0$.[16] כלומר עבור m מספיק גדול מתקיים $0\in\left(a_0,\frac{1}{m}\right)\setminus\frac{1}{\mathbb{N}}\subset U$ ל-$a_0<0$.

נתבונן בנקודה $\frac{1}{2m}\in\frac{1}{\mathbb{N}}$. מהנתון $\frac{1}{\mathbb{N}}\subset V$ נובע שקיימת קבוצת בסיס שמכילה אותה, כלומר $\frac{1}{2m}\in(c,d)\subset V$ ל-c,d כלשהם. אבל (c,d) ו-$\left(a_0,\frac{1}{m}\right)\setminus\frac{1}{\mathbb{N}}$ בבירור אינן זרות, ולכן U,V בהכרח אינן זרות. כלומר לא קיימות U,V פתוחות וזרות שמפרידות את 0 ו-$\frac{1}{\mathbb{N}}$.

5. **דוגמה למרחב** T_3 **ולא** T_4**:** נסמן ב-$\mathbb{R}_l$ את הקבוצה $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הנוצרת על־ידי הבסיס $\{[a,b)\,|a,b\in\mathbb{R}\}$. זה מרחב T_4 (תרגיל). בפרט אמנם זה מרחב T_3 ולכן גם $\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$ הוא T_3, אך נראה ש-$\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$ אינו T_4. מרחב זה יהווה גם דוגמה לכך שמכפלת מרחבי T_4 אינה בהכרח T_4.

(א) נתבונן בקבוצה $\triangle=:\{(x,-x)\,|x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$, עם טופולוגיית המכפלה המושרית מ-$\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$. נסמן ב-$A$ את אוסף הנקודות הרציונליות שב-$\triangle$ וב-B את אוסף הנקודות האי רציונליות שב-$\triangle$. נראה כי A,B קבוצות סגורות בטופולוגיית המכפלה המושרית מ-$\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$, ולבסוף נראה שהן לא ניתנות להפרדה, כלומר $\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$ אינו T_4.

(ב) $\underline{A,B \text{ סגורות}}$: נשים לב ש-$A^c$ כוללת את הנקודות שמחוץ ל-$\triangle$ ואת הנקודות האי־רציונליות שב-$\triangle$. ניתן לבטא זאת:

$$A^c=\left(\bigcup_{r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}[r,\infty)\times[-r,\infty)\right)\cup\{(x,y)\,|x<-y\}$$

כלומר A^c פתוחה ולכן A סגורה. באופן דומה ניתן לראות גם כי B סגורה.

(ג) $\underline{A,B \text{ לא ניתנות להפרדה}}$: נניח בשלילה שקיימות U,V פתוחות וזרות ב-$\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$, והן מפרידות את A,B בהתאמה. לכל n טבעי נגדיר קבוצה I_n, להיות כל ה-$r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ שמקיימים $\left[r,r+\frac{1}{n}\right)\times\left[-r,-r+\frac{1}{n}\right)\subset V$. מתקיים $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$, כי $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$ כוללת את כל האי־רציונליים. נתייחס כעת ל-$\mathbb{R}$ כמרחב עם הטופולוגיה הסטנדרטית. ממשפט שנוכיח בהמשך (משפט בייר) ינבע שלא ניתן להציג את הישר הממשי כאיחוד בן־מניה של קבוצות סגורות וזרות ובעלות פנים ריק. אבל נשים לב שכל הנקודות ב-$\mathbb{Q}$ הן קבוצות סגורות וזרות ובעלות פנים ריק בטופולוגיה הסטנדרטית, ולכן מהשוויון הנ"ל בהכרח קיים m טבעי כך ש-I_m בעלת פנים שאינו ריק. כלומר היא מכילה קטע ממשי פתוח שנסמן (a,b). מכאן נובע כי $\left\{(x,-x+\varepsilon)\,|a<x<b,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{m}\right\}\subset V$. לכן כל $(q,-q)$ ל-$q\in(a,b)$ היא נקודת גבול של אי רציונליים מ-I_m. אבל באופן כללי $(q,-q)\in U$ וכן הנחנו כי U,V פתוחות, ולכן $(-q,q)\in U\cap V$, בסתירה להנחה כי U,V זרות.

9 הלמה של אוריסון

משפט: יהי X מרחב T_4, אזי לכל $C,D\subset X$ סגורות, לא ריקות וזרות, קיימת פונקציה רציפה $f:X\to[0,1]$, כך שמתקיים $f|_C=0,\ f|_D=1$.

[16] אם היא הייתה מהצורה (a,b) ל-$a<0<b$, היא הייתה מכילה איזושהי נקודה $\frac{1}{n}$, ואז U,V לא היו זרות.

הוכחה: הראינו לעיל שנורמליות שקולה לכך שלכל סגורה A ולכל פתוחה U המכילה את A, קיימת פתוחה V וסגורה Z (ניתן לבחור אותה להיות $\overline{V}$) כך שמתקיים $A \subset V \subset Z \subset U$.

1. בהינתן מרחב נורמלי X וקבוצות C, D סגורות, לא ריקות וזרות, נשתמש באיפיון הנ"ל כדי להגדיר אינדוקטיבית סדרה אינסופית ועולה ביחס להכלה של קבוצות פתוחות וסגורות לסירוגין.

נשים לב שהקבוצות C, D הנתונות הן סגורות וזרות ולפיכך $V_1 =: X - D$ פתוחה המכילה את $C =: C_0$ הסגורה. כלומר השלב הראשון בהגדרה האינדוקטיבית $C_0 \subset V_1$.

מהאיפיון שהזכרנו נובע שקיימות סגורה $C_{\frac{1}{2}}$ ופתוחה $V_{\frac{1}{2}}$ כך שמתקיים:

$$C_0 \subset V_{\frac{1}{2}} \subset C_{\frac{1}{2}} \subset V_1$$

מהאיפיון שהזכרנו נובע שוב שקיימות שתי סגורות $C_{\frac{1}{4}}, C_{\frac{3}{4}}$ ושתי פתוחות $V_{\frac{1}{4}}, V_{\frac{3}{4}}$ כך שמתקיים:

$$C_0 \subset V_{\frac{1}{4}} \subset C_{\frac{1}{4}} \subset V_{\frac{1}{2}} \subset C_{\frac{1}{2}} \subset V_{\frac{3}{4}} \subset C_{\frac{3}{4}} \subset V_1$$

ובאופן אינדוקטיבי, לכל k טבעי נקבל בשלב ה-k סדרה מהצורה:

$$C_0 \subset V_{\frac{1}{2^k}} \subset C_{\frac{1}{2^k}} \subset ... \subset V_{\frac{2^k-1}{2^k}} \subset C_{\frac{2^k-1}{2^k}} \subset V_1$$

כאשר C_j כולן סגורות ו-V_j כולן פתוחות.

2. נגדיר פונקציה $f : X \to [0,1]$ על־ידי:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in V_t} \{t\} & \exists_t \, x \in V_t \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נוכיח כי f רציפה ומקיימת $f|_C = 0,\ f|_D = 1$.

(א) $\underline{f|_D = 1}$: לכל $x \in D$ מתקיים $x \notin X - D = V_1$. אבל כל $V_t \subset V_1$ ולכן $x \notin V_t$ לכל t ומכאן $f(x) = 1$.

(ב) $\underline{f|_C = 0}$: נשים לב כי $C = C_0 \subset V_{\frac{1}{2^k}}$ לכל k טבעי. לכן לכל $x \in C$ מתקיים $x \in V_{\frac{1}{2^k}}$ לכל k טבעי, ומכאן $f(x) = 0$.

(ג) $\underline{f \text{ רציפה}}$: לשם כך מספיק להראות כי f רציפה לקבוצות תת־בסיס כלשהו של הטופולוגיה הסטנדרטית של $[0,1]$. אז ניקח את התת־בסיס $\{[0,b) \,|0 \le b \le 1\} \cup \{(b,1] \,|0 \le b \le 1\}$ ונראה כי $f^{-1}([0,b)),\ f^{-1}((b,1])$ פתוחות לכל $0 \le b \le 1$.

i. נראה ש-$f^{-1}([0,b))$ פתוחה. לשם כך די להראות כי $f^{-1}([0,b)) = \bigcup_{t<b} V_t$, שכן V_t פתוחה לכל t.

מצד אחד, אם $x \in f^{-1}([0,b))$ אז מההגדרה $f(x) < b \le 1$, ולכן קיים t_0 המקיים $f(x) < t_0 < b$. כלומר $x \in V_{t_0} \subset \bigcup_{t<b} V_t$.

מצד שני, אם $x \in \bigcup_{t<b} V_t$ אז יש $t_0 < b$ כך ש-$x \in V_{t_0}$. כלומר $f(x) \le t_0 < b$ מהגדרת הפונקציה, ולכן $x \in f^{-1}([0,b))$.

ii. נראה ש-$f^{-1}\left((b,1]\right)$ פתוחה. לשם כך די להראות כי המשלימה שלה היא $f^{-1}\left([0,b]\right)=\bigcap_{b<t}C_t$, שכן C_t סגורה לכל t.
במקרה $b=1$ מתקיים $f^{-1}\left((b,1]\right)=\emptyset$ וזו קבוצה סגורה. לכן נניח $0\le b<1$ ונראה את השוויון הנ"ל.
מצד אחד, אם $x\in f^{-1}\left([0,b]\right)$ אז $f\left(x\right)\le b<1$, ולכן $x\in V_t$ לכל $b<t$. אבל תמיד $V_t\subset C_t$ ולכן $x\in C_t$ לכל $b<t$, כלומר $x\in\bigcap_{b<t}C_t$.
מצד שני, אם $x\notin f^{-1}\left([0,b]\right)$ אז $b<f\left(x\right)$, ולכן קיימים t_1,t_2 כך ש-$b<t_1<t_2<f\left(x\right)$. אבל מכך ש-$t_2<f\left(x\right)$ נובע כי $x\notin V_{t_2}\subset C_{t_1}$, ומכך שגם $b<t_1$ נוכל להסיק כי $x\notin\bigcap_{b<t}C_t$. ■

10 אקסיומות המניה

הגדרות: יהי X מרחב טופולוגי ותהי $x\in X$.

- אוסף של פתוחות $\left\{U_i\right\}_{i\in I}$ המכילות את x הוא **בסיס לפתוחות של** x, אם לכל קבוצה פתוחה V המכילה את x, קיים i כך ש-$x\in U_i\subset V$.
- X מקיים את **אקסיומת המניה הראשונה** אם לכל $x\in X$ קיים בסיס בן־מניה לפתוחות שלו.
- X מקיים את **אקסיומת המניה השנייה** אם לטופולוגיה שלו קיים בסיס בן־מניה.
- X נקרא **לינדלוף** (Lindelöf) אם לכל כיסוי פתוח של המרחב קיים תת־כיסוי בן־מניה.
- X נקרא **ספרבילי** אם קיימת בו קבוצה צפופה שהיא בת־מניה.

טענה: מרחב רגולרי המקיים את אקסיומת המניה השניה, הוא נורמלי.

הוכחה: יהי X מרחב רגולרי המקיים את אקסיומת המניה השנייה. נניח כי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה לטופולוגיה על X, ויהיו $A,B\subset X$ קבוצות סגורות וזרות.

לכל $a\in A$ מתקיים $a\notin B$. לכן $X-B$ סביבה פתוחה של a, ומאיפיון שקול לרגולריות יש קבוצה פתוחה $U_a\in\mathcal{B}$ המקיימת $a\in U_a\subset\overline{U_a}\subset X-B$. נשים לב שהאוסף $\left\{U_a\right\}_{a\in A}$ הוא בן מניה כי הקבוצות בו נלקחו רק מתוך $\mathcal{B}$. לכן קיימת סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subset A$ כך ש-$\left\{U_{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי פתוח של A, וכל $\overline{U_{a_n}}$ לא נחתכת עם B.

באותו אופן קיימת סדרה $\left\{b_m\right\}_{m=1}^{\infty}\subset B$ כך ש-$\left\{V_{b_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ כיסוי פתוח של B, וכל $\overline{V_{b_m}}$ לא נחתכת עם A.

לכל k טבעי נגדיר $S_k=U_k-\bigcup_{i=1}^{k}\overline{V_i}$ וכן $T_k=V_k-\bigcup_{j=1}^{k}\overline{U_j}$. קל לראות שאלו קבוצות פתוחות. נסמן $O=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k,\ \ P=\bigcup_{k=1}^{\infty}T_k$. אלו קבוצות פתוחות, ונראה שהן מפרידות את A,B.

נשים לב כי $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_{a_n}$ וכן $A\cap\overline{V_{b_m}}=\emptyset$ לכל m, ולכן $A\subset O$. באותו אופן ניתן לראות כי $B\subset P$. ההוכחה כי $O\cap P=\emptyset$ מושארת כתרגיל.[17] ■

[17]אם בשלילה היה $t\in O\cap P$ אז היו אינדקסים n,m כך ש-$t\in S_n\cap T_m$.

11 משפט המטריזציה של אוריסון

הגדרה: מרחב טופולוגי X נקרא **מטריזבילי**, אם קיימת מטריקה על X שמשרה את הטופולוגיה הנתונה.

הערה: אם X מרחב טופולוגי מטריזבילי, אז כל תת־מרחב מושרה שלו גם הוא מטריזבילי.

הערה: המרחב $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ הוא המכפלה בת המניה של המרחב הדיסקרטי $\{0,1\}$ עם טופולוגיית המכפלה. מרחב זה מטריזבילי, כי הטופולוגיה שלו מושרית מהמטריקה:

$$d\left(\left(x_1,x_2,...\right),\left(y_1,y_2,...\right)\right)=:\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i\left(x_i,y_i\right)}{2^i}$$

כאשר d_i המטריקה הדיסקרטית על $\{0,1\}$. ההוכחה מושארת כתרגיל.

הוכחה דומה תראה כי המרחב $[0,1]^{\mathbb{N}}$ כמכפלה בת־מניה של הקטעים $[0,1]$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, גם הוא מטריזבילי.

משפט: אם X מרחב טופולוגי T_3 המקיים גם את אקסיומת המניה השנייה, ולפיכך בפרט גם נורמלי כפי שהראינו, אז הוא מטריזבילי.

הוכחה: נראה שבתנאים אלו X הומאומורפי לתת־קבוצה כלשהי E של $[0,1]^{\mathbb{N}}$, שהיא מטריזבילית כתת־מרחב של מרחב מטריזבילי.[18] מכאן ברור שאם $f:X\to E$ הומאומורפיזם וכן E מטריזבילי על־ידי המטריקה d, אז המטריקה $\rho\left(x,y\right)=:d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)$ משרה את הטופולוגיה על X.

1. X מקיים את אקסיומת המניה השנייה, אז יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן־מניה של X. לכל זוג קבוצות בסיס U,V לא ריקות המקיימות $\overline{U}\subset V$, הקבוצות $\overline{U},X-V$ סגורות וזרות. לכן מהלמה של אוריסון קיימת פונקציה רציפה $f:X\to[0,1]$ כך שמתקיים $f|_{\overline{U}}=0,\ f|_{X-V}=1$. עבור כל קבוצות הבסיס $\mathcal{B}$ נקבל אוסף לכל היותר בן־מניה של פונקציות כנ"ל, שנסמן $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
2. **למה:** לכל $x\in X$ ולכל $C\subset X$ סגורה שאינה מכילה את x, קיים n טבעי כך שמתקיים $f_n\left(x\right)=0,\ f_n|_C=1$.

   הוכחת הלמה: מהנתון נובע $x\in X-C$. הנחנו כי X הוא T_3, ובהתאם לאיפיון שקול שהראינו לרגולריות נובע שקיימת פתוחה V, ללא הגבלת הכלליות $V\in\mathcal{B}$,[19] כך שמתקיים $x\in V\subset\overline{V}\subset X-C$. נשים לב כי $\overline{V},C$ סגורות וזרות, ולכן מהלמה של אוריסון קיים n טבעי כך ש-$f_n:X\to[0,1]$ רציפה ומקיימת $f_n|_{\overline{V}}=0,\ f_n|_C=1$. אבל $x\in\overline{V}$ וכן $C\subset X-V$, ומכאן הטענה.
   ∎
3. נגדיר העתקה $F:X\to[0,1]^{\mathbb{N}}$ על־ידי $x\mapsto\left(f_1\left(x\right),f_2\left(x\right),...\right)$, ונראה כי F הומאומורפיזם של X על תמונתה.

   (א) F <u>חח"ע</u>: בהינתן $x,y\in X$ כך ש-$x\neq y$, הקבוצה $\{y\}$ סגורה (הנחנו T_3), ולכן קיים m טבעי כך ש-$f_m\left(y\right)=1$ ו-$f_m\left(x\right)=0$. מכאן שבגלל הקואורדינטה ה-m מתקיים $F\left(x\right)\neq F\left(y\right)$.

[18] זו אחת הסיבות שדרשנו ש-X יקיים את אקסיומת המניה השנייה. כי אם לא, נוכל לכל היותר להראות שהוא הומאומורפי לתת־קבוצה של $[0,1]^A$ ל-A כלשהי, ומרחב זה אינו מטריזבילי בהכרח. הסיבה השנייה היא כדי שהמרחב יהיה נורמלי ולפיכך נוכל להשתמש בלמה של אוריסון, כפי שיפורט בהמשך ההוכחה.

[19] V היא איחוד של קבוצות בסיס, נבחר את קבוצת הבסיס ש-x מוכל בה.

(ב) F רציפה: לכל i, הפונקציה f_i רציפה לפי הלמה של אוריסון, ובטופולוגיית המכפלה רציפות קואורדינטה־קואורדינטה שקולה לרציפות.

(ג) F^{-1} רציפה: נשים לב כי $F^{-1}:F\left(X\right)\to X$, לכן צריך להראות שבהינתן $U\subset X$ פתוחה, גם $F\left(U\right)\subset F\left(X\right)$ פתוחה. כלומר, מהגדרת תת־מרחב טופולוגי יש להראות שקיימת קבוצה פתוחה $V\subset\left[0,1\right]^{\mathbb{N}}$ כך שמתקיים $F\left(U\right)=V\cap F\left(X\right)$.

תהי U פתוחה ויהי $x\in U$. מהלמה ב-2 נובע שקיים $k\left(x\right)$ טבעי מתאים כך שמתקיים $f_{k(x)}\left(x\right)=0,\ f_{k(x)}|_{X-U}=1$.

נשים לב שמתקיים $f_{k(x)}^{-1}\left(\left[0,1\right)\right)\subset U$. כמו־כן נשים לב שאם π_i היא ההטלה על הקואורדינטה ה-i אז $f_i=\pi_i\circ F$, ולכן $f_i^{-1}=F^{-1}\circ\pi_i^{-1}$.

מכאן נסיק:

$$U=\bigcup_{x\in U}f_{k(x)}^{-1}\left(\left[0,1\right)\right)=\bigcup_{x\in U}F^{-1}\circ\pi_{k(x)}^{-1}\left(\left[0,1\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$F\left(U\right)=\bigcup_{x\in U}\pi_{k(x)}^{-1}\left(\left[0,1\right)\right)\cap F\left(X\right)$$

[20] אבל טופולוגיית המכפלה מוגדרת על־ידי התת־בסיס שקבוצותיו הן π^{-1}, ולכן $F\left(U\right)$ פתוחה. ■

---

[20] כי באופן כללי אם $f:X\to f\left(X\right)$ ו-$A\subset f\left(X\right)$, אז $f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)=A\cap f\left(X\right)$.

חלק IV
קשירות

הגדרה: מרחב טופולוגי X נקרא **קשיר**, אם לא קיימת הצגה מהצורה $X = U \cup V$ ל-U, V כלשהן פתוחות, זרות ולא ריקות.

באופן טבעי, תת קבוצה נקראת קשירה אם היא מהווה תת־מרחב קשיר בטופולוגיה המושרית.

הערה: באופן שקול ניתן להגדיר מרחב טופולוגי X כקשיר, אם לא קיימת הצגה מהצורה $X = C \cup D$ ל-C, D סגורות, זרות ולא ריקות.

טענה: מרחב טופולוגי X שהוא T_4 הוא קשיר אם ורק אם לא קיימת פונקציה רציפה $f : X \to \{0,1\}$, שהיא על. כלומר כל פונקציה מהצורה הנ"ל היא קבועה.

הוכחה: בכיוון אחד, אם X לא קשיר אז $X = U \cup V$, ולכן מהלמה של אוריסון קיימת פונקציה כזאת.

בכיוון שני, שעבורו לא צריך את T_4, אם קיימת פונקציה כנ"ל אז נפריד $X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$. ■

דוגמאות:

1. כל מרחב מהצורה $[a,b] \cup [c,d]$ ל-$a < b < c < d \in \mathbb{R}$ הוא לא קשיר מהגדרתו.
2. $\mathbb{Q}$ בטופולוגיה הסטנדרטית אינו קשיר, כי $\mathbb{Q} = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$.
3. מרחב המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R})$ בטופולוגיה המושרית מ-$\mathbb{R}^{n^2}$ אינו קשיר.[21] לעומת זאת המרחב $GL_n(\mathbb{C})$ הוא קשיר.

טענה: קשירות היא תכונה טופולוגית. כלומר היא נשמרת תחת הומאומורפיזם.

הוכחה: מספיק להראות שאם $f : X \to Y$ רציפה ו-X קשיר, אז גם Y קשיר. שכן בהינתן הומאומורפיזם נוכל להסיק זאת לשני הכיוונים. אבל אם Y אינו קשיר, כלומר $Y = U \cup V$, אז $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ שכן f רציפה, ולכן X אינו קשיר. ■

טענה: תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה הסטנדרטית היא קשירה אם ורק אם היא קטע.

הוכחה: (כיוון ראשון)

תהי $A \subset \mathbb{R}$ תת־קבוצה קשירה. לכל $a, b \in A$, לכל $a < c < b$ מתקיים כי $c \in A$, כי אחרת היה $A = [(-\infty, c) \cap A] \cup [(c, \infty) \cap A]$ בסתירה לקשירות A. מכאן קל להסיק כי A הוא קטע שקצותיו הם $\inf_{a \in A}\{a\}, \sup_{a \in A}\{a\}$ (קטע פתוח/סגור/חצי בהתאם לשאלה האם ה-$\inf / \sup$ מתקבלים).

(כיוון שני)

[21] כי ניתן להציג אותו כאיחוד זר של אוסף המטריצות המקיימות $\det < 0$ ואוסף המטריצות המקיימות $\det > 0$. קבוצות אלו פתוחות בטופולוגיה הסטנדרטית על $GL_n(\mathbb{R})$, כי פונקציית הדטרמיננטה היא פולינומיאלית ולכן רציפה, ומכאן שהתמונה ההפוכה של הפתוחות $\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$ תחת $\det$ פתוחה גם היא.

נוכיח שכל קטע מהצורה $[a,b]$ הוא קשיר. נניח בשלילה כי $[a,b]=U\cup V$ ל-U,V פתוחות, ונניח ללא הגבלת הכלליות $a\in U$.

נתבונן בקבוצה $S=:\{x|a\leq x\leq b,\ [a,x]\subset U\}$, ונסמן $m=:\sup(S)$. ודאי $a<m$, כי אם לא אז $U=\{a\}$ בסתירה לפתיחותה. כמו־כן $m\notin U$, כי אם $m\in U$, כדי לשמור על U פתוחה בהכרח $m=b$, ואז $V=\emptyset$, בסתירה להגדרת קשירות. לכן בהכרח $m\in V$. אבל מההגדרה $m=\sup(S)$ נובע שבכל סביבה של $m\in V$ קיים משמאל איבר שאינו ב-V, בסתירה לפתיחות V. לכן בהכרח קטע מהצורה $[a,b]$ הוא קשיר.

כעת בהינתן קטע כללי I, אם בשלילה $I=U\cup V$ אז נבחר זוג $a\in U,\ b\in V$. נקבל כי $[a,b]=(U\cap[a,b])\cup(V\cap[a,b])$, סתירה. ■

משפט ערך הביניים: תהי $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ל-X מרחב טופולוגי קשיר. יהיו $x,y\in X$ כך ש-$f(x)<f(y)$, אזי לכל $f(x)<t<f(y)$ קיים $z\in X$ כך שמתקיים $f(z)=t$.

הוכחה: משפט ערך הביניים קובע במילים אחרות שתמונה של פונקציה רציפה על תחום קשיר היא קטע. אבל ראינו שב-$\mathbb{R}$ קבוצה קשירה היא מילה נרדפת לקטע. ■

למה: אם X מרחב טופולוגי לא קשיר כך ש-$X=U\cup V$, וכן $A\subset X$ תת־קבוצה קשירה, אז $A\subset U$ או $A\subset V$.

הוכחה: לו בשלילה A נחתכת עם U ו-V יחד, אז $A=(U\cap A)\cup(V\cap A)$, בסתירה לקשירות A. ■

12 קשירות של איחוד ומכפלה

טענה:

1. אם X מרחב קשיר ו-$f:X\to Y$ פונקציה רציפה, אז $f(X)$ קשירה.
2. אם $A\subset X$ קשירה אזי גם $\overline{A}$ קשירה.
3. **למת "כוכב"**: אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות קשירות, ונניח שקיים $\beta\in I$ כך שמתקיים $A_\alpha\cap A_\beta\neq\emptyset$ לכל $\alpha\in I$, אזי גם האיחוד $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ קבוצה קשירה.
4. מכפלה כלשהי של מרחבים היא קשירה אם ורק אם כל אחד מהמרחבים קשיר.[22]

הוכחה: במהלך ההוכחה נשתמש בכך שאם X מרחב קשיר אז כל פונקציה רציפה $X\to\{0,1\}$ היא קבועה.

1. תהי $g:f(X)\to\{0,1\}$ פונקציה רציפה, ונניח בשלילה שהיא על. לכן ההרכבה $g\circ f:X\to\{0,1\}$ רציפה ועל, בסתירה לקשירות X.
2. תהי $g:\overline{A}\to\{0,1\}$ פונקציה רציפה, ונניח בשלילה שהיא לא קבועה. מהרציפות נובע כי $\{0,1\}=g(\overline{A})\subset\overline{g(A)}$. מכאן כי $g(A)=\{0,1\}$ כי בטופולוגיה הדיסקרטית כל קבוצה היא סגורה, בסתירה לקשירות A.

[22] מדובר במרחב המכפלה עם טופולוגיית המכפלה. הטענה אינה נכונה בהכרח בטופולוגיית הקופסה.

3. תהי $g:\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\to\{0,1\}$ פונקציה רציפה. מקשירות כל A_α נובע כי $g|_{A_\alpha}$ קבועה ובפרט גם $g|_{A_\beta}$ קבועה. נניח ללא הגבלת הכלליות $g|_{A_\beta}=0$. אבל כל חיתוך $A_\alpha\cap A_\beta$ אינו ריק ולכן $g=0$ תמיד, ומכאן כי $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ קבוצה קשירה.

4. יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים ויהי $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ מרחב המכפלה שלהם עם טופולוגיית המכפלה.

כיוון ראשון: אם קיים $\beta\in I$ כך שהמרחב X_β אינו קשיר, אז ניתן להפריד $X_\beta=U\cup V$ ל-U,V פתוחות ב-X_β. נשים לב שבטופולוגיית המכפלה הקבוצות $\pi_\beta^{-1}(U),\pi_\beta^{-1}(V)$ פתוחות. כמו כן בגלל הקואורדינטה ה-β במכפלה הן גם זרות, וכן קל לראות ש-$\prod_{\alpha\in I}X_\alpha=\pi_\beta^{-1}(U)\cup\pi_\beta^{-1}(V)$. כלומר מרחב המכפלה אינו קשיר.

כיוון שני: ההוכחה שאם כל X_α קשיר אז גם המכפלה קשירה מורכבת יותר, ונעשה אותה בשלבים. תחילה נראה את הטענה למכפלות סופיות ואז נכליל.

(א) נוכיח את הטענה למכפלה של שני מרחבים קשירים:
יהיו X,Y מרחבים קשירים ונניח בשלילה כי $X\times Y$ אינו קשיר. לכן קיימת פונקציה רציפה $f:X\times Y\to\{0,1\}$ שאינה קבועה. כלומר קיימות הנקודות $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ כך שמתקיים $f(x_0,y_0)=0,\ f(x_1,y_1)=1$.
נסמן $X'=:X\times\{y_1\}$, $Y'=:\{x_0\}\times Y$. קל לראות כי $X'\cong X$, $Y'\cong Y$ על־ידי ההעתקות $x\mapsto(x,y_1)$, $y\mapsto(x_0,y)$. מכאן שגם X',Y' מרחבים קשירים, ולכן כל פונקציה רציפה מהם ל-$\{0,1\}$ היא קבועה. נשים לב, אם כך, שמכיוון ש-$x_1\in X$, $y_0\in Y$ ניתן להסיק כי:

$$f|_{X'}=f(X,y_1)=1\,,\ \ f|_{Y'}=f(y_0,Y)=0$$

אבל מתקיים כי $(x_0,y_1)\in X'\cap Y'$, כלומר חיתוכם אינו ריק, ולכן מלמת כוכב נובע כי $X'\cup Y'$ מרחב קשיר. לכן לא תיתכן פונקציה רציפה שאינה קבועה במרחב זה, סתירה.

(ב) קל להסיק את הטענה באינדוקציה לכל מכפלה סופית של מרחבים קשירים.

(ג) נכליל את הטענה למכפלה כלשהי של מרחבים קשירים:
מאקסיומת הבחירה המכפלה לא ריקה, יהי $x=:(x_\alpha)_{\alpha\in I}\in\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$.[23]
לכל $J\subset I$ קבוצת אינדקסים סופית נגדיר:

$$X_J=\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\times\prod_{\alpha\in I-J}\{x_\alpha\}$$

כל X_J קשיר כי הוא קבוע בקואורדינטות ה-$I-J$ ולכן הומאומורפי למכפלה $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ והראינו שמכפלות סופיות של מרחבים קשירים הן קשירות.
נתבונן באוסף $\{X_J\}_{J\ is finite}$. מתקיים $\bigcap_{J\text{ is finite}}X_J\neq\emptyset$ כי $x\in X_J$ לכל J. לכן מלמת כוכב נובע שהאיחוד $\bigcup_{J\text{ is finite}}X_J$ קשיר.

[23] כלומר x הוא וקטור באורך I, שהרכיב ה-α שלו הוא x_α.

נשים לב שבאופן כללי מטענה 2 נובע שאם A צפופה ב-B וקשירה אז גם B קשירה, כי $\overline{A}=B$. לכן מספיק להראות כי $\bigcup_{J \text{ is finite}} X_J$ צפופה במכפלה $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

אבל קבוצת בסיס בטופולוגיית המכפלה היא מהצורה $\prod_{\alpha\in I-K} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in K} V_\alpha$ ל-$K\subset I$ קבוצה סופית כלשהי של אינדקסים, ול-V_α פתוחה ב-X_α ל-$\alpha\in K$. לכן קל לראות שהאיחוד נחתך עם קבוצה זו על־ידי בחירת K האינדקסים המתאימים בווקטור x שהגדרנו. ■

13 קשירות מקומית

הגדרות:

- יהי X מרחב טופולוגי ותהי $x\in X$. אומרים כי X **קשיר מקומית** ב-x, אם לכל סביבה W של x קיימת V פתוחה וקשירה המקיימת $x\in V\subset W$.
- אומרים כי X **קשיר מקומית** אם הוא קשיר מקומית בכל $x\in X$.
- יהי X מרחב טופולוגי ותהי $x\in X$. **מרכיב הקשירות** של x הוא איחוד כל הקבוצות הקשירות המכילות את x.

הערות:

1. מלמת כוכב נובע שאיחוד זה עצמו הוא קשיר, ולכן מרכיב הקשירות של x הוא הקבוצה הקשירה המקסימלית המכילה את x.
2. אוסף מרכיבי הקשירות על מרחב טופולוגי X מגדירים יחס שקילות על X. כלומר $x_1\sim x_2$ אם ורק אם הם באותו מרכיב קשירות.

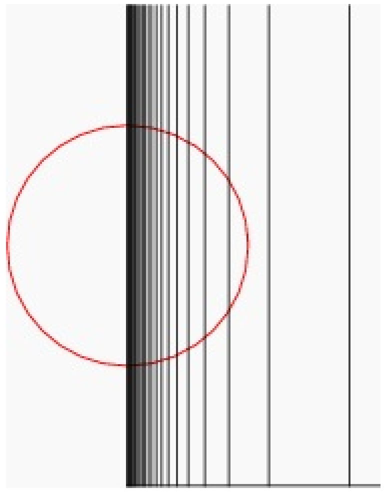
דוגמאות:

1. במרחב $\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית כל יחידון מהווה מרכיב קשירות.
2. במרחב $GL_n(\mathbb{R})$ בטופולוגיה המושרית מ-$\mathbb{R}^{n^2}$ יש שני מרכיבי קשירות: אוסף המטריצות עם דטרמיננטה חיובית, ואוסף המטריצות עם דטרמיננטה שלילית.

הערה: לא ניתן ללמוד על קשירות מקשירות מקומית, וגם לא להפך. נראה דוגמאות לכך:

1. <u>מרחב קשיר מקומית אבל לא קשיר:</u> $X=\{a,b\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. המרחב אינו קשיר כי $X=\{a\}\cup\{b\}$, אבל הוא קשיר מקומית כי לכל סביבה של $x\in X$ ניתן לבחור $V=\{x\}$.
2. <u>מרחב קשיר אבל לא קשיר מקומית:</u> "**מרחב המסרק**" הוא המרחב $(\{0\}\times[0,1])\cup\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]\right)\cup([0,1]\times\{0\})$:[24]

[24] כפי שניתן לראות באיור הבא, במערכת צירים זה הקטע $[0,1]$ בציר ה-x, הקטע $[0,1]$ בציר ה-y, ועוד $\mathbb{N}$ העמודות המקבילות לציר ה-y בגובה $[0,1]$, שמרחק כל אחת מציר ה-y הוא $\frac{1}{n}$.



(מוויקיפדיה)

כאשר הטופולוגיה בו היא זו המושרית מ-$\mathbb{R}^2$. כל ישר מ-$2+\mathbb{N}$ הישרים במרחב הוא קשיר כי הוא קטע, וכן כל הישרים הללו נחתכים עם הישר $[0,1]\times\{0\}$, ולכן מלמת כוכב המרחב כולו קשיר.

לעומת זאת המרחב אינו קשיר מקומית בנקודה במרכז העיגול האדום שבאיור. כך למשל כל סביבה של הנקודה $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ מכילה קבוצת בסיס מהצורה $\left[0,\frac{1}{n}\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$ (חתוכה עם המסרק) ל-n מספיק גדול, ולכן ניתן להציג אותה כאיחוד די פשוט של שתי פתוחות זרות.

14 קשירות מסילתית

הגדרות:

- יהי X מרחב טופולוגי. פונקציה רציפה $\alpha:[a,b]\to X$ ל-$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, נקראת **מסילה**.
- יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $p,q\in X$. נאמר כי מסילה $\alpha:[a,b]\to X$ **מחברת** את p,q, אם $\alpha(a)=p,\ \alpha(b)=q$.
- מרחב טופולוגי X נקרא **קשיר מסילתית**, אם לכל זוג נקודות בו קיימת מסילה המחברת אותן.
- ניתן להגדיר יחס שקילות על מרחב טופולוגי, על־ידי $x\sim y$ אם ורק אם יש מסילה המחברת ביניהן. למחלקות השקילות של יחס זה נקרא **מרכיבי קשירות מסילתית**.
- יהי X מרחב טופולוגי ותהי $x\in X$. אומרים כי X **קשיר מסילתית מקומית** ב-x, אם לכל סביבה W של x קיימת V פתוחה וקשירה מסילתית המקיימת $x\in V\subset W$.
- אומרים כי X **קשיר מסילתית מקומית**, אם הוא כזה בכל $x\in X$.

טענה:

1. אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.
2. אם X קשיר מסילתית ו-$f: X \to Y$ רציפה, אז $f(X)$ קשירה מסילתית.
3. מכפלה כלשהי של מרחבים היא קשירה מסילתית אם ורק אם כל אחד מהמרחבים קשיר מסילתית.[25]
4. אם X קשיר וקשיר מסילתית מקומית, אז הוא קשיר מסילתית.

הוכחה:

1. נניח כי X קשיר מסילתית ונניח בשלילה שהוא אינו קשיר. מההנחה שהוא אינו קשיר נובע שקיימת פונקציה $f: X \to \{0,1\}$ רציפה ועל. לכן קיימים $x, y \in X$ כך ש-$f(x) = 0,\ f(y) = 1$. מההנחה ש-X קשיר מסילתית נובע שקיימת מסילה $\alpha : [0,1] \to X$ כך ש-$\alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y$.

   נתבונן בהרכבה $f \circ \alpha : [0,1] \to \{0,1\}$. מההנחות נובע שהיא רציפה ועל, כלומר המרחב $[0,1]$ אינו קשיר, בסתירה להיותו קטע.
2. יהיו $f(p), f(q) \in f(X)$. מהנתון כי X קשיר מסילתית נובע שיש מסילה $\alpha : [0,1] \to X$ המקיימת $\alpha(0) = p,\ \alpha(1) = q$. מכאן כי $f \circ \alpha : [0,1] \to f(X)$ היא מסילה המחברת את $f(p), f(q)$.
3. יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של מרחבים ויהי $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ מרחב המכפלה שלהם עם טופולוגיית המכפלה.

   <u>כיוון ראשון</u>: נניח שמרחב המכפלה קשיר מסילתית. לכל $\beta \in I$ ההטלה $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ רציפה, ומכאן שבהינתן זוג נקודות ב-X_β כלשהו, נוכל להרכיב את ההטלה על המסילה שמוגדרת במרחב המכפלה ולקבל את המסילה הדרושה ל-X_β.

   <u>כיוון שני</u>: נניח שכל X_α קשיר מסילתית ויהיו $(p_\alpha)_{\alpha \in I}, (q_\alpha)_{\alpha \in I}$ איברים במכפלה. לכל $\alpha \in I$ יש מסילה $g_\beta : [0,1] \to X_\beta$ המחברת את הקואורדינטות p_β, q_β, כלומר $g_\beta(0) = p_\beta,\ g_\beta(1) = q_\beta$.

   נגדיר פונקציה $g : [0,1] \to \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ על־ידי $t \mapsto (g_\alpha(t))_{\alpha \in I}$. היא רציפה בכל קואורדינטה ולכן רציפה, וברור כי $g(0) = (p_\alpha)_{\alpha \in I},\ g(1) = (q_\alpha)_{\alpha \in I}$.
4. בהתאם לקשירות המסילתית המקומית, לכל $x \in X$ נסמן את הסביבה הקשירה־מסילתית ב-U_x. תהי $y \in X$. נגדיר את A להיות רכיב הקשירות המסילתית של y. לכל $a \in A$ יש סביבה קשירה מסילתית U_a, ולכן A פתוחה.

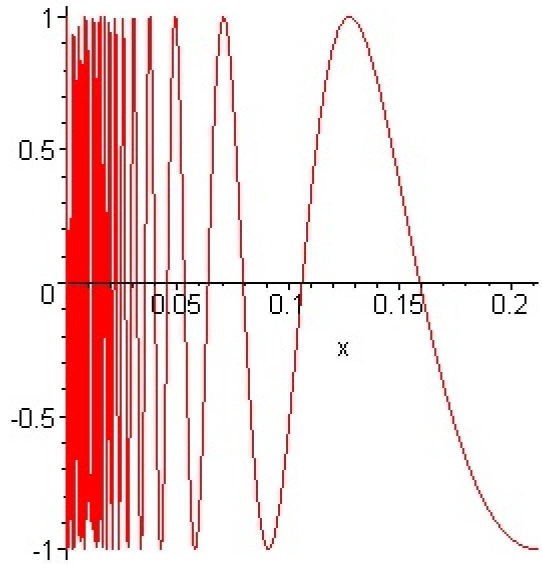
   נשים לב כי $X - A = \bigcup_{x \in X - A} U_x$, ולכן $X = A \cup (X - A)$ כאיחוד זר של פתוחות, ולכן בהכרח אחת מהן ריקה. אבל $y \in A$ ולכן $X - A = \emptyset$, כלומר $A = X$. ■

הערה: ראינו שקשירות מסילתית גוררת קשירות. אולם ההפך לא נכון. גם קשירות מסילתית מקומית לא גוררת קשירות מסילתית, וגם לא להפך. נראה דוגמאות לכך.

1. <u>מרחב קשיר אבל לא קשיר מסילתית</u>: נגדיר את המרחב $X = \overline{\Gamma\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$, כאשר $\Gamma\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) =: \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) | 0 < x < 1\right\}$.[26]

[25] מדובר במרחב המכפלה עם טופולוגיית המכפלה. הטענה אינה נכונה בהכרח בטופולוגיית הקופסה.

[26] כפי שניתן לראות באיור, הסגור של גרף הפונקציה $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, הוא הגרף יחד עם הקטע $[-1,1]$ בציר ה-y.



- X קשיר: הגרף $\Gamma\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ קשיר, כי בשתי הקואורדינטות שלו הוא תמונה של קבוצה קשירה תחת פונקציה רציפה - בקואורדינטה הראשונה זו הזהות ובקואורדינטה השניה זו $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, ובאופן כללי מכפלת מרחבים קשירים היא קשירה. באופן כללי סגור של קבוצה קשירה הוא קבוצה קשירה, ולכן $X=\overline{\Gamma\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$ קשיר.
- X אינו קשיר מסילתית: נראה שלא קיימת מסילה המחברת בין $(0,0)$ ל-$\left(\frac{1}{\pi},0\right)=\left(\frac{1}{\pi},\sin(\pi)\right)$. נניח בשלילה כי $\alpha:[0,1]\to X$ מסילה המקיימת $\alpha(0)=(0,0)\,,\,\alpha(1)=\left(\frac{1}{\pi},0\right)$. נסמן את שתי הקואורדינטות שלה $\alpha(t)=(\beta(t),\gamma(t))$.
מרציפות α נובע ממשפט ערך הביניים שקיימת סדרה $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, כך שעליה β תקבל את ערכי הביניים $\ldots,\frac{2}{(2n+1)\pi},\ldots,\frac{2}{5\pi},\frac{2}{3\pi}$. כלומר $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית יורדת, כך שמתקיים $\beta(t_n)=\frac{2}{(2n+1)\pi}$. הסדרה t_n יורדת וחסומה ולכן מתכנסת, ומכאן שגם הסדרה $\gamma(t_n)$ צריכה להתכנס. אולם נשים לב כי $\gamma(t_n)=\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)=(-1)^n$, בסתירה לרציפות γ.

2. <u>מרחב קשיר מסילתית מקומית אבל לא קשיר מסילתית</u>: זוג קטעים ממשיים זרים.
3. <u>מרחב קשיר מסילתית אבל לא קשיר מסילתית מקומית</u>: מרחב המסרק שהגדרנו לעיל.

מסקנה: לכל $1<n$, המרחבים $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ אינם הומאומורפיים.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים הומאומורפיזם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. נתבונן בצמצום $f|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{f(0)\}$. צמצום של פונקציה רציפה הוא פונקציה רציפה, ולכן אם התחום קשיר גם הטווח צריך להיות קשיר. אבל ברור כי $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ קשיר ל-$1<n$, בעוד $\mathbb{R}\setminus\{f(0)\}$ אינו קשיר. ■

חלק V
קומפקטיות

הגדרות:

- יהי X מרחב טופולוגי, תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ סדרה ויהי $x \in X$. אומרים כי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **מתכנסת** ל-x, אם כל סביבה של x מכילה את כל $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ למעט, אולי, מספר סופי של מקרים.
- מרחב טופולוגי X נקרא **קומפקטי סדרתית**, אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה מתכנסת.
- יהי X מרחב טופולוגי ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב-X. אומרים שאוסף זה הוא **כיסוי פתוח** של X, אם $X = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$.
- מרחב טופולוגי X נקרא **קומפקטי**, אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת־כיסוי סופי.
- יהי X מרחב טופולוגי ויהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות סגורות ב-X. אומרים שמתקיימת **תכונת החיתוך הסופי** לאוסף, אם חיתוך כל תת־אוסף סופי לא ריק.

טענה:

1. מרחב טופולוגי X הוא קומפקטי אם ורק אם כל אוסף של קבוצות סגורות המקיים את תכונת החיתוך הסופי, מקיים גם שהחיתוך של האוסף כולו לא ריק.
2. יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי ותהי $f : X \to Y$ רציפה, אזי גם $f(X)$ קומפקטי.

מטענה זו נובע שקומפקטיות היא תכונה טופולוגית, כלומר נשמרת תחת הומאומורפיזם.

3. קבוצה סגורה במרחב קומפקטי, היא קומפקטית בטופולוגיה המושרית עליה.
4. קבוצה קומפקטית במרחב האוסדורף, היא סגורה.
5. **משפט טיכונוף:** אם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים קומפקטיים, אזי גם מרחב המכפלה $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ בטופולוגיית המכפלה הוא מרחב קומפקטי.
   זה משפט קשה, ואת ההוכחה שלו ניתן בהמשך.

הוכחה:

1. <u>כיוון ראשון</u>: נניח כי X קומפקטי וכי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של סגורות המקיים את תכונת החיתוך הסופי. נניח בשלילה שהחיתוך של האוסף כולו הוא ריק.
   מההנחה בשלילה נובע שהאוסף $\{X - V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מהווה כיסוי פתוח של X, כי מתקיים:

$$\bigcup_{\alpha\in I} X - V_\alpha = X - \bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha = X - \emptyset = X$$

מקומפקטיות X קיים תת־כיסוי סופי, שנסמן $\{X - V_i\}_{i=1,\dots,n}$. מכאן שמתקיים:

$$X = \bigcup_{i=1,\dots,n} X - V_i = X - \bigcap_{i=1,\dots,n} V_i \implies \bigcap_{i=1,\dots,n} V_i = \emptyset$$

בסתירה לתכונת החיתוך הסופי.

<u>כיוון שני:</u> נניח שכל אוסף של סגורות שמקיים את תכונת החיתוך הסופי, החיתוך של האוסף כולו אינו ריק. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X, ונניח בשלילה שאין לו תת־כיסוי סופי.

מההנחה בשלילה נובע שאוסף הסגורות $\{X-U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מקיים את תכונת החיתוך הסופי, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\bigcap_{i=1,\ldots,n} X-U_i = X-\bigcup_{i=1,\ldots,n} U_i \neq \emptyset$$

לכן מההנחה נובע שהחיתוך של כל האוסף $\{X-U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אינו ריק. אבל מתקיים $X=\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$, ולכן:

$$\emptyset = X-\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} X-U_\alpha$$

וזו סתירה.

2. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של $f(X)$. מהיות $f(X)$ תת־מרחב של Y נובע שקבוצה פתוחה בו היא מהצורה $W\cap f(X)$ ל-W פתוחה ב-Y. יהי לפיכך $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף הפתוחות המקיימות $U_\alpha = W_\alpha\cap f(X)$. מכאן כי האוסף $\left\{f^{-1}(W_\alpha)\right\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X, כי לכל $x\in X$ קיים $f(x)\in Y$ שעבורו קיימת $f(x)\in W_\alpha$ ולכן $x\in f^{-1}(W_\alpha)$, וכן מרציפות f נובע שכל $f^{-1}(W_\alpha)$ פתוחה. מקומפקטיות X נובע שקיים תת־כיסוי סופי של X מהצורה $\left\{f^{-1}(W_i)\right\}_{i=1}^{k}$, $i\in I$. מכאן נובע שהאוסף $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ כיסוי פתוח של $f(X)$.
3. תהי A סגורה במרחב קומפקטי X, ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A. כבהוכחה של 2, יהי $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מתאים של פתוחות ב-X. מכאן כי האוסף $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}\cup\{X-A\}$ הוא כיסוי פתוח של X, ומקומפקטיות X קיים תת־כיסוי סופי מהצורה $\{W_i\}_{i=1}^{k}\cup\{X-A\}$, $i\in I$, ומכאן שהאוסף $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ תת־כיסוי סופי של A.
4. נוכיח כי $X-A$ פתוחה. תהי $x\in X-A$, ונמצא סביבה פתוחה של x שמוכלת ב-$X-A$.

מהיות X האוסדורף נובע שלכל $a\in A$ קיימות פתוחות U_a,V_a זרות ולא ריקות שמפרידות $x\in U_a$, $a\in V_a$. לכן האוסף $\{V_a\cap A\}_{a\in A}$ הוא כיסוי פתוח של A, ומקומפקטיות A נובע שקיים תת כיסוי סופי $\{V_i\cap A\}_{i=1}^{k}$.

כעת נקבל כי $U=\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ היא סביבה פתוחה של x שמוכלת ב-$X-A$, וזאת כי היא חיתוך סופי של פתוחות ולכן פתוחה, והיא לא נחתכת עם A כי כל U_i זרה ל-V_i. ■

מסקנה: יהי X מרחב קומפקטי ויהי Y מרחב האוסדורף, אזי כל העתקה רציפה $f:X\to Y$ שהיא חח"ע ועל, היא הומאומורפיזם.

הוכחה: הכל נתון למעט העובדה ש-$f^{-1}:Y\to X$ רציפה. נראה את הטענה השקולה ש-f היא העתקה סגורה. כלומר לכל $A\subset X$ סגורה, $f(A)\subset Y$ סגורה.

X קומפקטי $\overset{3}{\Longleftarrow}$ $A\subset X$ סגורה ולכן גם קומפקטית $\overset{2}{\Longleftarrow}$ f רציפה ולכן $f(X)$ קומפקטית $\overset{4}{\Longleftarrow}$ Y האוסדורף ולכן $f(X)\subset Y$ סגורה. ■

דוגמה: כל תת־קבוצה במרחב $X=\{a,b\}$ עם הטופולוגיה הטריוויאלית, היא דוגמה לקבוצה קומפקטית ולא סגורה במרחב קומפקטי.[27]

15 קומפקטיות במרחבים מטריים

הגדרות:

- יהי (X,d) מרחב מטרי. סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$ נקראת **סדרת קושי**, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי, כך שלכל $N<n,m$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.
- מרחב מטרי נקרא **שלם**, אם לכל סדרת קושי קיים גבול במרחב.
- מרחב מטרי נקרא **חסום לחלוטין**, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים למרחב כיסוי סופי של כדורים ברדיוס ε.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי, אז התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי.
2. X קומפקטי סדרתית.
3. X שלם וחסום לחלוטין.

הערה: מהאיפיון השלישי נובע שכל קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$ כלשהו,[28] היא קומפקטית.

הוכחה: $(2 \Leftarrow 1)$

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ סדרה, ונניח בשלילה שלא קיימת לה תת־סדרה מתכנסת. נוסיף ללא הגבלת הכלליות את ההנחה שכל האיברים שונים זה מזה.[29]

לכל n טבעי קיימת קבוצה פתוחה U_n כך ש-$x_n\in U_n$. מהיות X מרחב מטרי נוכל להניח שמדובר בקבוצה בעלת רדיוס מספיק קטן, כך שלכל $k\neq n$ מתקיים $x_k\notin U_n$.[30] כי אם לא הייתה קבוצה כזאת עבור x_n כלשהו, אז x_n הייתה נקודת הצטברות של הסדרה, כלומר x_n הייתה גבול של תת־סדרה כלשהי, בניגוד להנחה שאין תת־סדרה מתכנסת.

נגדיר $U_0=X-\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. זו קבוצה פתוחה כי אם היה $y\in X-\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שכל סביבה שלו מכילה x_n כלשהו, אז y הייתה נקודת הצטברות של הסדרה, בניגד להנחה שאין תת־סדרה מתכנסת.

מכאן שהאוסף $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{U_0\}$ הוא כיסוי פתוח של X, ומקומפקטיות X נובע שיש תת־כיסוי סופי מהצורה $\{U_i\}_{i=1}^{m}$. אבל תת־כיסוי זה לא מכיל את כל איברי הסדרה אלא רק את $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ המתאימים, ולכן לא ייתכן שזה תת־כיסוי ל-X. סתירה.

$(3 \Leftarrow 2)$

תחילה נראה שהמרחב שלם: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ סדרת קושי. מקומפקטיות סדרתית נובע בפרט שקיימת תת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$x_0\in X$ כלשהו. אבל מהיותה

[27] המרחב קומפקטי כי כל מרחב טופולוגי סופי הוא קומפקטי.

[28] קבוצה חסומה במרחב מטרי היא קבוצה שמוכלת בכדור פתוח.

[29] כי ניתן לקחת נציג מכל קבוצת איברים שווים ולקבל סדרה חדשה שבה כל האיברים שונים. לו היה רק מספר סופי של כאלה, קל לוודא שיש תת־סדרה מתכנסת בניגוד להנחה בשלילה.

[30] במרחב טופולוגי כללי לא ניתן להניח כך. למשל מרחב טופולוגי אינסופי עם הטופולוגיה הטריוויאלית.

סדרת קושי נובע שגבול של תת־סדרה הוא גבול של הסדרה כולה, ולכן קיים לסדרה גבול, כלומר המרחב שלם.

כעת נראה שהמרחב חסום לחלוטין: נניח בשלילה שהמרחב אינו חסום לחלוטין, כלומר קיים $\varepsilon > 0$ שעבורו לא ניתן לכסות את X במספר סופי של כדורים ברדיוס ε. נבנה סדרה שאין לה תת־סדרה מתכנסת, ובכך נגיע לסתירה.

נקבע $x_1 \in X$ ונבנה סדרה. נבחר $x_2 \in X - B_\varepsilon(x_1)$ וכן הלאה. כלומר באופן כללי נבחר $x_k \in X - \bigcup_{i=1}^{k-1} B_\varepsilon(x_i)$. נשים לב שקיים x_k כזה לכל k מתוך ההנחה שכל אוסף סופי של כדורים ברדיוס ε אינו מכסה את המרחב. אם כך נקבל סדרה $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, שקל לראות שהמרחק בין כל זוג איברים שונים בה הוא לפחות ε ולכן לא יכולה להיות לה תת־סדרה מתכנסת, בסתירה לקומפקטיות הסדרתית של X.

$(3 \Longleftarrow 2)$ תהי $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ סדרה. מהיות X חסום לחלוטין נובע שעבור $\varepsilon = 1$ קיים אוסף סופי של כדורים פתוחים ברדיוס 1 המהווה כיסוי של X. ברור שקיים איזשהו כדור פתוח B_1 המכיל אינסוף איברי הסדרה, כלומר יש תת־סדרה $\{x_n^1\}_{n=1}^\infty \subset B_1$. מהיות X חסום לחלוטין נובע שגם עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ קיים ל-X כיסוי של כדורים פתוחים ברדיוס $\frac{1}{2}$, ולכן קיים כדור $B_{\frac{1}{2}}$ שנחתך עם B_1, כך שיש תת־סדרה (של התת־סדרה) המקיימת $\{x_n^2\}_{n=1}^\infty \subset B_1 \cap B_{\frac{1}{2}}$. באופן איטרטיבי, לכל k טבעי קיים כדור $B_{\frac{1}{k}}$ כך שמתקיים $\{x_n^k\}_{n=1}^\infty \subset \bigcap_{i=1}^{k-1} B_{\frac{1}{i}}$. נשים לב שהקוטר של כל קבוצה מהצורה $\bigcap_{i=1}^{k-1} B_{\frac{1}{i}}$ הוא לכל היותר $\frac{2}{k}$.[31]

לכל כדור $B_{\frac{1}{k}}$ נבחר נציג x_n^k ונקבל סדרה מהצורה $\{x_n^k\}_{k=1}^\infty$ (סדרה ב-k). קל לראות שזו סדרת קושי, ולכן מההנחה ש-X שלם נובע שיש לתת־סדרה זו גבול במרחב. מכאן ש-X קומפקטי סדרתית.

$(2 \Longleftarrow 1)$ לצורך ההוכחה הזו נגדיר מונח חדש.

הגדרה: יהי X מרחב מטרי ויהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח כלשהו של X. נאמר כי $\varepsilon > 0$ כלשהו נקרא **מספר לבג** של $\mathcal{U}$, אם לכל כדור ברדיוס ε ב-X קיימת פתוחה $U \in \mathcal{U}$ המכילה את הכדור כולו.

למה: אם X מרחב מטרי קומפקטי סדרתית, אז לכל כיסוי פתוח שלו יש מספר לבג.

הוכחה: יהי X מרחב מטרי קומפקטי סדרתית ויהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח שלו. נניח בשלילה שאין לו מספר לבג. לכן לכל n טבעי קיימת נקודה $x_n \in X$ וכדור פתוח $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ שאינו מוכל כולו באף אחד מאיברי הכיסוי.

נתבונן בסדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. מקומפקטיות סדרתית של X נובע שקיימת תת־סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in X$. מהיות $\mathcal{U}$ כיסוי נובע שקיימת פתוחה $U \in \mathcal{U}$ המכילה את x_0. מהיות U פתוחה נובע שקיים $r > 0$ כך שמתקיים $x_0 \in B_r(x_0) \subset U$.

כעת נבחר k טבעי מספיק גדול כך שמתקיים גם $d(x_0, x_{n_k}) < \frac{r}{2}$ וגם $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$ ונקבל כי $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_r(x_0) \subset U \in \mathcal{U}$, וזו סתירה. ■

נשתמש בתוצאה זו כדי להשלים את הוכחת $1 \Longleftarrow 2$. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X קומפקטי סדרתית. יהי ε מספר לבג של הכיסוי.

[31] קוטר הוא סופרימום המרחקים בין זוגות כלשהם של נקודות בקבוצה.

נתבונן בקבוצה $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) | x \in X\}$, שהיא כמובן כיסוי פתוח של המרחב. מהגדרת מספר לבג נובע שלכל $x \in X$ קיימת U_α כך שמתקיים $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$. לכן מספיק למצוא תת־כיסוי סופי של $\mathcal{B}$.

נניח בשלילה שלא קיים תת־כיסוי סופי ל-$\mathcal{B}$. נקבע $x_1 \in X$ ונגדיר איטרטיבית, כמו בחלק קודם של ההוכחה, לכל k טבעי את $x_k \in X - \bigcup_{i=1}^{k-1} B_\varepsilon(x_i)$, ונקבל סדרה $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ שהמרחק בין כל שני איברים שונים בה גדול מ-$\frac{\varepsilon}{2}$, ולכן לא תיתכן לה תת־סדרה מתכנסת, סתירה. ■

הערה: הראינו שבמרחב מטרי קומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרתית. אולם במרחב טופולוגי כללי לא ניתן ללמוד מקומפקטיות על קומפקטיות סדרתית, ולא להיפך. נראה דוגמאות לכך.

1. מרחב טופולוגי קומפקטי שאינו קומפקטי סדרתית: נסמן $I = [0,1]$ ונגדיר את המרחב $X = I^I$. כלומר זו מרחב מכפלה של I־ים מאורך I, עם טופולוגיית המכפלה.

   בהמשך נוכיח את משפט טיכונוף שממנו ינבע כי X הוא קומפקטי, כמכפלה של מרחבים קומפקטיים. נראה כי X אינו קומפקטי סדרתית.

   נתייחס למרחב X כאל אוסף הפונקציות $\{f : I \to I\}$. זהו מרחב ולכן מוגדרת בו התכנסות של סדרת פונקציות. נשאיר כתרגיל להוכיח שמתקיים כי סדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-f, אם ורק אם לכל $t \in I$ מתקיים $f_n(t) \to f(t)$.

   לכל $t \in I$ נתבונן בפיתוח הבינארי שלו, כלומר נציג אותו $t = 0.t_1t_2...$ ל- $t_i \in \{0,1\}$. נגדיר לכל n טבעי העתקה $f_n(t) = t_n$, ונראה שלסדרה זו אין תת־סדרה מתכנסת.

   תהי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ תת־סדרת אינדקסים כלשהי. כפי שהזכרנו, כדי להראות שהתת־סדרה המתאימה $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת, די להראות שקיים $t' \in I$ שעבורו $\{f_{n_k}(t')\}$ אינה מתכנסת.

   נגדיר $t' = 0.t_1t_2...$ כאשר לכל k זוגי $t_{n_k} = 0$ ולכל k אי־זוגי $t_{n_k} = 1$. בשאר המקומות נבחר t_i שרירותי. נבחין כי הסדרה $\{f_{n_k}(t')\}_{k=1}^{\infty}$ היא $0,1,0,1,...$ ולכן לא יכולה להתכנס.

2. מרחב טופולוגי קומפקטי סדרתית שאינו קומפקטי: נסמן $I = [0,1]$ ונתבונן במרחב $X = \{0,1\}^I$ כאשר $\{0,1\}$ מרחב דיסקרטי. המרחב X הוא קומפקטי, כפי שנובע ממשפט טיכונוף שנוכיח בהמשך. נתבונן בתת־מרחב שלו Y שכולל את כל ה-$x =: (x_\alpha)_{\alpha\in[0,1]} \in X$ שעבורם מתקיים $x_\alpha = 1$ לכל היותר במספר בן־מניה של מקרים.

   - נראה כי Y אינו קומפקטי: לכל $\alpha \in [0,1]$ נסמן $U_\alpha = \{x \in Y | x_\alpha = 0\}$. כלומר ה-$x$־ים שעבורם x_α נמצא מחוץ לקבוצה בת המניה הנ"ל.
     נשים לב שלכל $\alpha \in [0,1]$ מתקיים כי $U_\alpha = Y \cap \pi_\alpha^{-1}(\{0\})$, ולכן היא פתוחה. כמו־כן הקבוצה $\{U_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ היא כיסוי פתוח ל-Y, כי לכל $x \in Y$ יש קבוצה בת־מניה לכל היותר של אינדקסים שבהם הוא 1, ולכן קיים $\beta \in [0,1]$ כלשהו (כי $[0,1]$ אינו בן־מניה) שעבורו $x_\beta = 0$ ומכאן כי $x \in U_\beta$. אבל ברור מאליו שלכיסוי זה אין תת־כיסוי סופי, ולכן Y אינו קומפקטי.
   - נראה כי Y קומפקטי סדרתית: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ סדרה כלשהי. לכל x_n בסדרה יש קבוצה לכל היותר בת־מניה של אינדקסים בהם הוא 1,

נגדיר את J להיות איחוד כל הקבוצות הללו על כל איברי הסדרה. J איחוד בן־מניה של קבוצות בנות־מניה ולכן היא בת־מניה. נתבונן במרחב המכפלה $\prod_{\alpha\in J}\{0,1\}_{\alpha}$. ממשפט טיכונוף שנוכיח בהמשך נובע כי זה מרחב קומפקטי, ומהיות J בת־מניה נובע כי מרחב זה מטריזבילי.[32] לכן מהקומפקטיות נובעת גם קומפקטיות סדרתית.

16 קומפקטיות ורציפות בממשיים

משפט: יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי ותהי $f:X\to\mathbb{R}$ העתקה רציפה. אזי מתקיים:

1. f חסומה ב-$\mathbb{R}$
2. f מקבלת מקסימום ומינימום
3. אם X מטריזבילי, אז f רציפה במידה־שווה ביחס למטריקה המשרה.[33]

הוכחה:

1. קל לראות כי הקבוצה $\{(-n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא כיסוי פתוח של $\mathbb{R}$.
מרציפות f נובע כי $\left\{f^{-1}\left((-n,n)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ כיסוי פתוח של X. מקומפקטיות X נובע שקיים תת־כיסוי סופי מהצורה $\left\{f^{-1}\left((-n_i,n_i)\right)\right\}_{i=1}^{k}$. כלומר מתקיים $X=\bigcup_{i=1}^{k}f^{-1}\left((-n_i,n_i)\right)$, ומכאן כי $f\left(X\right)\subset\left(-n_k,n_k\right)$ (כאשר n_k הוא הקטע המקסימלי) ולכן f חסומה.
2. נסמן $M=\sup_{x\in X}\left|f\left(x\right)\right|$. הראינו כי $M<\infty$, כעת יש להראות כי M מתקבל כערך של f. נתבונן באוסף $\left\{f^{-1}\left([M-\varepsilon,M]\right)\right\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}}$. מרציפות f נובע שקבוצות אלו סגורות, וקל לראות שמתקיימת לגביהן תכונת החיתוך הסופי. מקומפקטיות X נסיק שגם החיתוך כולו אינו ריק, משמע קיים $x\in X$ המקיים $x\in\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}}f^{-1}\left([M-\varepsilon,M]\right)$, ולכן בהכרח $f\left(x\right)=M$. באותו אופן ניתן לראות כי f מקבלת גם מינימום.
3. תהי d מטריקה על X שמשרה את הטופולוגיה שלו. יהי $0<\varepsilon$. נתבונן באוסף $\left\{f^{-1}\left(\left(t-\frac{\varepsilon}{2},t+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, שמרציפות f נובע שהוא כיסוי פתוח של X. מקומפקטיות X נובע שקיים לכיסוי זה מספר לבג, נבחר את δ להיות מספר לבג זה. מתכונת מספר לבג נובע שלכל $x,y\in X$ המקיימים $y\in B_{\delta}\left(x\right)$ קיים $t\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $B_{\delta}\left(x\right)\subset f^{-1}\left(\left(t-\frac{\varepsilon}{2},t+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$, משמע $f\left(B_{\delta}\left(x\right)\right)\subset\left(t-\frac{\varepsilon}{2},t+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ולכן $d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)<\varepsilon$. ■

[32] על־ידי המטריקה $d\left(x,y\right)=:\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i}d_i\left(x_i,y_i\right)$.

[33] **הגדרה:** בהינתן מרחבים מטריים $\left(X,d\right)$, $\left(Y,\rho\right)$ והעתקה $f:X\to Y$, אומרים כי f **רציפה במידה־שווה** אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$, כך שלכל $x_1,x_2\in X$ אם $d\left(x_1,x_2\right)<\delta$ אז $\rho\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)<\varepsilon$.

17 משפט טיכונוף

משפט: מכפלה כלשהי של מרחבים טופולוגיים קומפקטיים, היא קומפקטית בטופולוגיית המכפלה.

הערה: משפט זה שקול לאקסיומת הבחירה. במהלך ההוכחה נציין את השימוש באקסיומת הבחירה.[34]

סקירת ההוכחה: נוכיח את המשפט על דרך השלילה. נניח בשלילה שמרחב המכפלה אינו קומפקטי, לכן יש כיסוי פתוח $\mathcal{O}$ שאין לו תת־כיסוי סופי.

נבנה איבר x במכפלה שמקיים תכונה משונה למדי: כל קבוצת בסיס של טופולוגיית המכפלה שמכילה את x, <u>אינה</u> ניתנת לכיסוי על־ידי מספר סופי של איברי $\mathcal{O}$.

זו תכונה לגמרי לא הגיונית, כי מהיות $\mathcal{O}$ כיסוי נובע שיש קבוצת בסיס $O \in \mathcal{O}$ שמכילה את x. לכן O היא סביבה של x שמכוסה על־ידי עצמה, מן הסתם, וזו סתירה לתכונה של x.

את הקיום של x הנ"ל נבנה באינדוקציה. תחילה אינדוקציה סטנדרטית, עבור אוספים סופיים ובני־מניה, ולבסוף נשלים את ההוכחה למקרה הכללי באינדוקציה טרנספיניטית (ובמקרה הכללי נשתמש באסיומת הבחירה).

טענה 1: יהיו X_1, X_2 מרחבים טופולוגיים ונניח כי X_1 קומפקטי, ויהי $\mathcal{O}$ כיסוי פתוח של $X_1 \times X_2$.

אזי קיימת $x_1 \in X_1$, כך שלכל סביבה פתוחה $U \subset X_1$ של x_1, הקבוצה $U \times X_2$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

הוכחה: נניח בשלילה שאין x_1 כנ"ל. לכן לכל $x \in X_1$ קיימת סביבה פתוחה U_x של x, כך שהקבוצה $U_x \times X_2$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

האוסף $\{U_x\}_{x\in X_1}$ הוא כיסוי פתוח של X_1, ומקומפקטיות X_1 יש לו תת־כיסוי סופי מהצורה $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$.[35] נשים לב שמתקיים $X_1 \times X_2 = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \times X_2$.

מההנחה בשלילה שבראשית הוכחה זו נובע שכל $U_{x_i} \times X_2$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$, ולכן $X_1 \times X_2$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$, בסתירה להנחה בשלילה הכללית של־$\mathcal{O}$ אין תת־כיסוי סופי. ■

טענה 2: יהיו X_1, X_2 מרחבים טופולוגיים ונניח כי שניהם קומפקטיים, ויהי $\mathcal{O}$ כיסוי פתוח של $X_1 \times X_2$.

נשים לב שבפרט X_1 קומפקטי. לכן אנו עומדים בתנאי הטענה הקודמת וקיימת $x_1 \in X_1$ כנ"ל.

אזי קיימת גם $x_2 \in X_2$, כך שלכל סביבה פתוחה $V \subset X_2$ של x_2 ולכל סביבה פתוחה $U \subset X_1$ של x_1, הקבוצה $U \times V$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

הוכחה: נניח בשלילה שאין x_2 כנ"ל. לכן לכל $y \in X_2$ קיימת סביבה פתוחה V_y של y וסביבה פתוחה U_y של x_1 המתאימה ל-y, כך שהקבוצה $U_y \times V_y$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

[34] בערך Tychonoff's theorem בוויקיפדיה מצויה הוכחה של אקסיומת הבחירה מתוך משפט טיכונוף.
[35] הסימון פה לא מושלם כי x_1 כאן אינו x_1 מתחילת ההוכחה, אבל זה לא יפריע.

האוסף $\{V_y\}_{y\in X_2}$ הוא כיסוי פתוח של X_2, ומקומפקטיות X_2 יש לו תת־כיסוי סופי מהצורה $\{V_{y_j}\}_{j=1}^m$.

נגדיר $U=\bigcap_{j=1}^m U_{y_j}$. מתקיים $U\times X_2=\bigcup_{j=1}^m U\times V_{y_j}\subset\bigcup_{j=1}^m U_{y_j}\times V_{y_j}$.

מההנחה בשלילה שבהוכחה זו נובע שכל $U_{y_j}\times V_{y_j}$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$, ולכן $U\times X_2$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$, סתירה לטענה 1. ■

- **מסקנת ביניים - משפט טיכונוף למכפלות סופיות:** מכפלה סופית של מרחבים טופולוגיים קומפקטיים, היא קומפקטית בטופולוגיית המכפלה.

הערה: עקרונית אין צורך להוכיח את המסקנה הזו בנפרד, כי מיד נוכיח את המשפט באופן כללי. אבל ההוכחה למכפלות סופיות תיתן אינטואיציה להמשך.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על מספר המרחבים. למקרה $n=2$ מתקיים כי אם $\mathcal{O}$ כיסוי פתוח כלשהו של $X_1\times X_2$ ל-X_1,X_2 קומפקטיים, ובשלילה אין לו תת־כיסוי סופי, אז מטענה 2 נובע שיש $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ כך שלכל סביבה פתוחה $U\subset X_1$ של x_1 ולכל סביבה פתוחה $V\subset X_2$ של x_2 הקבוצה $U\times V$ אינה מכוסה סופית על־ידי $\mathcal{O}$, אבל זה כמובן לא הגיוני כי $\mathcal{O}$ כיסוי של כל $X_1\times X_2$.

וכעת קל להסיק את המקרה הסופי הכללי באינדוקציה.■

טענה 3: יהיו X_1,X_2,X_3 מרחבים טופולוגיים ונניח כי X_2 קומפקטי, ויהי $\mathcal{O}$ כיסוי פתוח של $X_1\times X_2\times X_3$.

נניח עוד שקיים $x_1\in X_1$, כך שלכל סביבה פתוחה $U\subset X_1$ שמכילה את x_1, הקבוצה $U\times X_2\times X_3$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

אזי קיימת $x_2\in X_2$, כך שלכל סביבה פתוחה $V\subset X_2$, $U\subset X_1$ המכילות את x_1,x_2 בהתאמה, הקבוצה $U\times V\times X_3$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

הוכחה: נניח בשלילה שאין x_2 כנ"ל. לכן לכל $y\in X_2$ קיימת סביבה פתוחה V_y של y וסביבה פתוחה U_y של x_1 המתאימה ל-y, כך שהקבוצה $U_y\times V_y\times X_3$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

האוסף $\{V_y\}_{y\in X_2}$ הוא כיסוי פתוח של X_2, ומקומפקטיות X_2 יש לו תת־כיסוי סופי מהצורה $\{V_{y_j}\}_{j=1}^m$.

נגדיר $U=\bigcap_{j=1}^m U_{y_j}$. מתקיים:

$$U\times X_2\times X_3=\bigcup_{j=1}^m U\times V_{y_j}\times X_3\subset\bigcup_{j=1}^m U_{y_j}\times V_{y_j}\times X_3$$

מההנחה בשלילה שבהוכחה זו נובע שכל $U_{y_j}\times V_{y_j}\times X_3$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$, ולכן $U\times X_2\times X_3$ מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$, סתירה לטענה 1. ■

הוכחת משפט טיכונוף למכפלות בנות־מניה: נראה שאם $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ אוסף של מרחבים קומפקטיים, אז המכפלה $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ היא מרחב קומפקטי בטופולוגיית המכפלה.

יהי $\mathcal{O}$ כיסוי פתוח כלשהו של מרחב המכפלה, ונניח בשלילה שאין לו תת־כיסוי סופי.

נבנה באינדוקציה איבר $x \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ שכל סביבה שלו אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$, וברגע שנמצא איבר כזה נקבל סתירה כפי שהוסבר בסקירה בתחילת ההוכחה.

נסמן באופן כללי את "זנבות" המכפלה $Y_k =: \prod_{k\leq i\in\mathbb{N}} X_i$. כעת נבנה את האיבר המבוקש $x =: (x_1, x_2, ...)$ באינדוקציה.

x_1: נתבונן ב-$X_1 \times Y_2$. טענה 1 קובעת שיש $x_1 \in X_1$, כך שלכל סביבה פתוחה $U_1 \subset X_1$ של x_1, הקבוצה $U_1 \times Y_2$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

x_2: נתבונן ב-$X_1 \times X_2 \times Y_3$. טענה 3 קובעת שיש $x_2 \in X_2$, כך שלכל סביבה פתוחה $U_2 \subset X_2$ של x_2 ולכל סביבה פתוחה $U_1 \subset X_1$ של x_1, הקבוצה $U_1 \times U_2 \times Y_3$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

...

x_n: נתבונן ב-$X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1} \times X_n \times Y_{n+1}$. מהנחת האינדוקציה יש נקודה $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1}$ כך שלכל אוסף סביבות פתוחות $U_i \subset X_i$ של x_i, $i = 1, ..., n-1$ בהתאמה, הקבוצה $\prod_{i=1}^{n-1} U_i \times Y_n$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$. טענה 3 קובעת[36] שיש $x_n \in X_n$ כך שלכל סביבה פתוחה $U_n \subset X_n$ של x_n הקבוצה $\prod_{i=1}^{n-1} U_i \times X_n \times Y_n$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

אם כך האיבר $x =: (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מוגדר. נראה שהוא אכן מקיים את התכונה הרצויה. נשים לב שבטופולוגיית המכפלה סביבה של x היא מהצורה $\prod_{i\in\mathbb{N}} W_i$, כאשר $W_i = X_i$ לכל i, למעט מספר סופי של מקרים.

נסמן ב-N את האינדקס המקיים שלכל $n > N$ מתקיים $W_n = X_n$, ונקבל שהקבוצה הפתוחה $\prod_{i=1}^{N} W_i \times \prod_{i=N+1}^{\infty} X_i$ לא מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$ לפי בניית x, וזו סתירה כפי שהסברנו בסקירה בתחילת ההוכחה. ■

הוכחת משפט טיכונוף הכללי: נראה שאם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים קומפקטיים, אז המכפלה $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ היא מרחב קומפקטי בטופולוגיית המכפלה.[37]

יהי $\mathcal{O}$ כיסוי פתוח כלשהו של מרחב המכפלה, ונניח בשלילה שאין לו תת־כיסוי סופי.

כעת נניח את אקסיומת הבחירה, השקולה למשפט הסידור הטוב, ונניח שקיים סדר טוב על קבוצת האינדקסים I. מהיות I סדורה היטב נוכל לבנות באינדוקציה טרנספיניטית איבר $x \in \prod_{\alpha\in I} X_I$ שכל סביבה שלו אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$, וברגע שנמצא איבר כזה נקבל סתירה כפי שהוסבר בסקירה בתחילת ההוכחה.

יהי $\alpha \in I$. נניח שלכל $\beta \in I$ המקיים $\beta < \alpha$ הגדרנו את הרכיב $x_\beta \in X_\beta$, כך שלכל סביבות פתוחות $U_\beta \subset X_\beta$ המכילות את x_β־ים, על כל $\alpha > \beta$, הקבוצה $\prod_{\beta<\alpha} U_\beta \times \prod_{\alpha\leq\beta} X_\beta$ אינה מכוסה סופית על־ידי $\mathcal{O}$.

טענה 3 קובעת שיש $x_\alpha \in X_\alpha$ כך שלכל סביבה פתוחה $U_\alpha \subset X_\alpha$ של x_α הקבוצה $\prod_{\beta<\alpha} U_\beta \times X_\alpha \times \prod_{\alpha<\beta} X_\beta$ אינה מכוסה סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$.

אם כך האיבר $x =: (x_\alpha)_{\alpha\in I}$ מוגדר, וכמו במקרה של מכפלות בנות־מניה ניתן לראות שכל סביבה של x לא מכוסה סופית על־ידי $\mathcal{O}$, וזו סתירה. ■

[36] בסימוני טענה 3, "X_1" הוא $X_1 \times ... \times X_{n-1}$ כאן, "X_2" הוא X_n כאן, ו-"X_3" הוא Y_{n+1} כאן.
[37] למעט הנחת אקסיומת הבחירה, לא יהיה הבדל מהותי בין הוכחה זו לבין ההוכחה למכפלות בנות־מניה.

דוגמה נגדית למשפט טיכונוף בטופולוגיית הקופסה: המרחב $[0,1]$ קומפקטי, אולם נראה שבטופולוגיית הקופסה המרחב $[0,1]^{\mathbb{N}}$ אינו קומפקטי, על־ידי בניית כיסוי פתוח שאין לו תת־כיסוי סופי.

נסמן $U_0=\left[0,\frac{2}{3}\right)$, $U_1=\left(\frac{1}{3},1\right]$. קל לראות שאלו קבוצות פתוחות ב-$[0,1]$, וכי שתיהן יחד מהוות כיסוי.

כל $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ ניתן לייצג כפונקציה $f:\mathbb{N}\to[0,1]$. אם כך לכל איבר במכפלה שמיוצג על־ידי f כלשהי, נגדיר $U_f=\prod_{n\in\mathbb{N}}U_{f(n)}$. האוסף $\{U_f|f:\mathbb{N}\to[0,1]\}$ מהווה כיסוי פתוח של $[0,1]^{\mathbb{N}}$. מצד שני לא ניתן לקבל את כל איברי $[0,1]^{\mathbb{N}}$ מתוך אף תת־קבוצה סופית של אוסף זה.

18 קומפקטיות במרחבי פונקציות רציפות

הגדרות:

- יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. נגדיר את הקבוצה $C(X)=:\{f:X\to\mathbb{C}|f \text{ is continuous}\}$, ונגדיר עליה את "מטריקת הסופרימום" $\rho(f,g)=:\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$.
  ניתן להראות שתחת מטריקה זו, $C(X)$ הוא מרחב מטרי שלם.
- $\mathcal{F}\subset C(X)$ נקראת **רציפה במידה אחידה**, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$ ולכל $f\in\mathcal{F}$, אם $d(x,y)<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
- $\mathcal{F}\subset C(X)$ נקראת **חסומה**, אם קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $f\in\mathcal{F}$ ולכל $x\in X$ מתקיים $|f(x)|<M$.

משפט ארזלה־אסקולי: לכל תת־קבוצה $\mathcal{F}\subset C(X)$ שהיא חסומה ורציפה במידה אחידה, קיימת סדרה מתוכה שמתכנסת.

מסקנה: תת־קבוצה $\mathcal{F}\subset C(X)$ היא קומפקטית, אם ורק אם היא סגורה, חסומה ורציפה במידה אחידה.

משפט זה הוכח בקורס קודם.

19 קומפקטיות במרחבי האוסדורף

תזכורת:

- מרחב טופולוגי נקרא **האוסדורף**, אם כל זוג נקודות שונות ניתנות להפרדה.
- מרחב טופולוגי נקרא **נורמלי**, אם כל זוג קבוצות סגורות וזרות ניתנות להפרדה.
  - מרחב טופולוגי הוא נורמלי אם ורק אם לכל קבוצה סגורה A, לכל סביבה U של A קיימת V פתוחה כך שמתקיים $A\subset V\subset\overline{V}\subset U$.

טענה: מרחב האוסדורף קומפקטי הוא נורמלי.

הוכחה: יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי, ויהיו $A,B\subset X$ סגורות וזרות. נרצה למצוא להן הפרדה.

מהיות X האוסדורף נובע שלכל זוג $a \in A$, $b \in B$ קיימות $U_{a,b}$, $V_{a,b}$ פתוחות וזרות, עבורן $a \in U_{a,b}$, $b \in V_{a,b}$.

לכל $b \in B$, האוסף $\{U_{a,b} \cap A\}_{a \in A}$ מהווה כיסוי פתוח של A. הראינו שקבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית בטופולוגיה המושרית עליה. לכן A קיים תת־כיסוי סופי מהצורה $\{U_{a_i,b} \cap A\}_{i=1}^{n}$.

עבור b הנ"ל נגדיר $\tilde{U}_b = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i,b} - B$. קל לראות שזו קבוצה פתוחה (איחוד של פתוחות, פחות סגורה) וזרה ל-B. נגדיר $\tilde{V}_b = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i,b}$. קל לראות שזו קבוצה פתוחה (חיתוך סופי של פתוחות), ומכיוון שכל $V_{a_i,b}$ זרה ל-$U_{a_i,b}$, אז גם $\tilde{V}_b$ זרה ל-$\tilde{U}_b$. אם כך קיבלנו כי $\tilde{U}_b, \tilde{V}_b$ פתוחות וזרות, ומפרידות את A מ-b.

כעת נשחרר את b, ונקבל שהאוסף $\left\{\tilde{V}_b \cap B\right\}_{b \in B}$ מהווה כיסוי פתוח של B. מקומפקטיות B (כקבוצה סגורה במרחב קומפקטי) קיים תת־כיסוי סופי מהצורה $\left\{\tilde{V}_{b_j} \cap B\right\}_{j=1}^{m}$.

כעת נגדיר $V = \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{V}_{b_i}$, $U = \bigcap_{j=1}^{m} \tilde{U}_{b_j}$. הן פתוחות וזרות, וניתן לראות מהבנייה כי U, V מפרידות את A, B בהתאמה. ■

הגדרה: מרחב טופולוגי נקרא **קומפקטי מקומית**, אם לכל נקודה בו קיימת קבוצה קומפקטית המכילה סביבה של x.

דוגמה: $\mathbb{Q}$ אינו קומפקטי מקומית, כי כל סביבה פתוחה של 0, למשל, מכילה קטע מהצורה $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$. ניקח סדרת קושי שיש לה גבול לא רציונלי, ולא תהיה לה תת־סדרה מתכנסת.

טענה: מרחב האוסדורף הוא קומפקטי מקומית אם ורק אם לכל נקודה בו יש סביבה פתוחה בעלת סגור קומפקטי.

הוכחה: יהי X מרחב האוסדורף. בכיוון אחד, אם לכל נקודה יש קבוצה סגורה קומפקטית שמכילה אותה, אז בבירור מתקיימת קומפקטיות מקומית. נראה את הכיוון השני.

נניח ש-X גם קומפקטי מקומית ותהי $x \in X$. לכן קיימת סביבה קומפקטית $W \subset X$ המכילה את x. מהיות W סביבה נובע שקיימת פתוחה $U \subset W$ המכילה את x. מהיות X האוסדורף נובע שכל קבוצה קומפקטית בו היא סגורה, ולכן $x \in U \subset \overline{U} \subset W$. קיבלנו ש-$\overline{U}$ סגורה בקבוצה קומפקטית, ולכן קומפקטית בעצמה. ■

20 קומפקטיפיקציה

הגדרה: יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. אומרים כי Y הוא **קומפקטיפיקציה** של X, אם Y קומפקטי, $X \subset Y$ (אולי עד כדי הומאומורפיזם) וכן $\overline{X} = Y$.

הגדרה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי. נגדיר את **הקומפקטיפיקציה החד־נקודתית** של X באופן הבא:

נסמן ב-"∞" נקודה כלשהי שאינה ב-X. נגדיר קבוצה חדשה $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ ונגדיר עליה את הטופולוגיה:

$$\hat{\mathcal{T}} =: \mathcal{T} \cup \left\{\hat{X} - C | C \subset X \text{ is compact}\right\}$$

תרגיל: לבדוק שזו אכן טופולוגיה.

הערה: אם X אינו קומפקטי אז X צפוף ב-$\hat{X}$. וזאת כי כל פתוחה ב-$\hat{X}$ המכילה את ∞ היא מהצורה $\hat{X}-C$, ואם X אינו קומפקטי אז תמיד $\hat{X}-C\neq\{\infty\}$ ולכן מכיל נקודה ב-X.

טענה: $\left(\hat{X},\hat{\mathcal{T}}\right)$ מרחב קומפקטי.

הוכחה: יהי $\mathcal{O}$ כיסוי פתוח כלשהו של $\hat{X}$. ככיסוי, $\mathcal{O}$ צריך להכיל בפרט גם את ∞ ולכן יש בו לפחות קבוצה אחת מהצורה $\hat{X}-C$ ל-$C\subset X$ קומפקטית ב-X. נשים לב שמתקיים $\hat{X}=C\cup\left(\hat{X}-C\right)$. את C ניתן לכסות סופית על־ידי איברי $\mathcal{O}$ כי היא קומפקטית, ו-$\hat{X}-C$ פתוחה מהגדרת $\hat{\mathcal{T}}$ ובחרנו אותה להיות ב-$\mathcal{O}$, לכן סך הכל מתקבל תת־כיסוי סופי של איברי $\mathcal{O}$. ■

טענה: אם $(X,\mathcal{T})$ קומפקטי מקומית והאוסדורף, אזי $\left(\hat{X},\hat{\mathcal{T}}\right)$ האוסדורף.

הוכחה: יהיו $x,y\in\hat{X}$. אם $x,y\in X$ אז הן ניתנות להפרדה כי X האוסדורף, לכן נניח $x\in X$, $y=\infty$. מקומפקטיות מקומית של X קיימת סביבה קומפקטית $U\subset X$ של x. לכן נקבל שהפתוחות $U^{o},\hat{X}-U$ מפרידות את x,y. ■

חלק VI
דלילות (nowhere dense)

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. קבוצה $A \subset X$ נקראת **דלילה** אם $X - \overline{A}$ צפופה ב-X.
במילים אחרות: לכל קבוצה פתוחה ולא ריקה $U \subset X$ מתקיים כי $\left(X - \overline{A}\right) \cap U \neq \emptyset$.

דוגמה: הקבוצות $\mathbb{Z}, \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ דלילות ב-$\mathbb{R}$.

הערה: קל לראות שאם קבוצה $A \subset X$ לא צפופה באף קבוצה פתוחה $U \subset X$ (בטופולוגיה המושרית), אז היא דלילה.

הערה: קבוצה $A \subset X$ דלילה אם ורק אם ל-$\overline{A}$ פנים ריק. (ההוכחה מושארת כתרגיל).

הגדרה: אומרים שקבוצה $A \subset X$ היא מ**קטגוריה ראשונה**, אם היא איחוד בן־מניה לכל היותר של קבוצות דלילות. אחרת אומרים שהיא מ**קטגוריה שנייה**.[38]

דוגמה: הקבוצה $\mathbb{Q}$ אינה דלילה ב-$\mathbb{R}$, כי $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ולכן $\mathbb{R} - \overline{\mathbb{Q}} = \emptyset$. אולם היא בכל זאת מקטגוריה ראשונה, כי $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$ וזה איחוד בן־מניה של קבוצות דלילות.

21 משפט הקטגוריה של בייר

משפט: יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי האוסדורף או מרחב מטרי שלם. אזי לכל אוסף בן־מניה של קבוצות דלילות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתקיים כי $X - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ צפופה ב-X.

מסקנה: כל מרחב טופולוגי קומפקטי האוסדורף וכל מרחב מטרי שלם הם מקטגוריה שנייה.
כי אם הם היו מקטגוריה ראשונה אז הם היו איחוד בן־מניה של דלילות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כלשהן, והיינו מקבלים $X - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

הוכחה: [39]יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי האוסדורף, ויהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אוסף כלשהו של קבוצות דלילות במרחב. נניח ללא הגבלת הכלליות שכולן סגורות (כי נוכל לקחת את אוסף הסגורים שלהן).

כדי להראות כי $X - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ צפופה ב-X די להראות שלכל קבוצה פתוחה ולא ריקה $U \subset X$ מתקיים $\left(X - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap U \neq \emptyset$.

נשתמש בכך ש-X קומפקטי האוסדורף, ולכן כפי שהראינו לעיל נובע שהוא נורמלי.[40]

נתון כי A_1 דלילה וסגורה, ולכן מההגדרה נובע כי $U_1 =: U \cap (X - A_1) \neq \emptyset$ וזו קבוצה פתוחה. תהי $a_1 \in U_1$.

X נורמלי ולכן קיימת V_1 פתוחה המקיימת $a_1 \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1 \subset U$.

נשים לב כי $U_1 \cap A_1 = \emptyset$ וכי $\overline{V_1} \subset U_1$, ולכן $\overline{V_1} \cap A_1 = \emptyset$.

נתון כי A_2 דלילה וסגורה, ולכן מההגדרה נובע כי $U_2 =: (X - A_2) \cap V_1 \neq \emptyset$ וזו קבוצה פתוחה. תהי $a_2 \in U_2$.

X נורמלי ולכן קיימת V_2 פתוחה המקיימת $a_2 \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset U_2 \subset V_1 \subset U$.

---

[38] קטגוריה ראשונה במרחבים טופולוגיים היא המקבילה הטופולוגית למידה אפס במרחבים מטריים.
[39] נוכיח את הנוסח למרחבים טופולוגיים. ההוכחה למרחבים מטריים בנויה באופן דומה, בשינויים קטנים.
[40] בשלב זה בהוכחת הנוסח למרחבים מטריים משתמשים בכך שכל מרחב מטרי הוא נורמלי.

נשים לב כי $U_2 \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$ וכי $\overline{V_2} \subset U$, ולכן $\overline{V_2} \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$.

ובאופן כללי, לאחר n צעדים נקבל אוסף פתוחות $\{V_j\}_{j=1}^n$ המקיימות $\overline{V_j} \subset V_{j-1}$ וכן גם $\overline{V_n} \cap \left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \emptyset$.

לכן $\left\{\overline{V_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ הוא אוסף של סגורות המקיים את תכונת החיתוך הסופי, ומקומפקטיות X נובע שהחיתוך כולו אינו ריק.[41] תהי $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \subset U$.

נשים לב כי $a \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, ולכן $a \in \left(X - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap U$, כנדרש. ■

הגדרה: מרחב טופולוגי נקרא **מושלם**, אם כל נקודה בו היא נקודת הצטברות.

כלומר מרחב טופולוגי X הוא מושלם אם לכל $x \in X$ ולכל $U \subset X$ פתוחה המכילה את x קיים $y \in U$ כך ש-y $x \neq y$.

מסקנה: אם X מרחב טופולוגי קומפקטי האוסדורף וגם מושלם, אז הוא לא בן־מניה.

הוכחה: X מושלם והאוסדורף ולכן כל יחידון $\{x\}$ הוא קבוצה דלילה, כי מהיות המרחב האוסדורף $\overline{\{x\}}^o = \{x\}^o = \emptyset$. נניח בשלילה כי X קומפקטי ובן מניה, אזי מתקיים $X = \bigcup_{x\in X} \{x\}$ כאיחוד בן־מניה של קבוצות דלילות, בסתירה למסקנה ממשפט בייר. ■

[41] בשלב זה בהוכחת הנוסח למרחבים מטריים משתמשים בהנחת השלמות.

חלק VII
מרחבי מנה

תזכורת: תהי X קבוצה. אומרים שקבוצה $R\subset X\times X$ היא **יחס שקילות** על X, אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. לכל $x\in X$ מתקיים $(x,x)\in R$
2. לכל $x,y\in X$ מתקיים כי אם $(x,y)\in R$ אז גם $(y,x)\in R$
3. לכל $x,y,z\in X$ מתקיים כי אם $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$ אז גם $(x,z)\in R$

באופן כללי, אם $(x,y)\in R$ מסמנים $x\sim y$.

בהינתן קבוצה X עם יחס שקילות R עליה, **מחלקת שקילות** של איבר $x\in X$ מוגדרת להיות $\{y\in X|x\sim y\}=:[x]$. לכל $x\in X$ מתקיים $[x]\neq\emptyset$, כי $x\in[x]$.

בהינתן קבוצה X עם יחס שקילות R עליה, מסמנים את אוסף כל מחלקות השקילות של X ב-${}^{X}\!/_{R}$. קל לראות שהאוסף ${}^{X}\!/_{R}$ מגדיר **חלוקה** של X.[42]

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי ויהי R יחס שקילות עליו. נגדיר העתקה $P:X\to {}^{X}\!/_{R}$ על־ידי $x\mapsto[x]$.

נרצה להפוך את ${}^{X}\!/_{R}$ למרחב טופולוגי. נעשה זאת על־ידי בחירת הטופולוגיה החזקה ביותר שתחתיה P רציפה. לשם כך נגדיר קבוצה $U\subset {}^{X}\!/_{R}$ להיות פתוחה אם ורק אם $P^{-1}(U)\subset X$ פתוחה.

הערה: ההעתקה P אינה בהכרח העתקה פתוחה.

ניקח למשל את המרחב $[0,1]$ ונגדיר יחס שקילות $R=\{(x,x),(0,1),(1,0)|x\in[0,1]\}$ (כלומר מזהים את הנקודות $0,1$ כנקודה אחת במרחב הטופולוגי של מחלקות השקילות). הקבוצה $\left(\frac{1}{2},1\right]$ פתוחה ב-$[0,1]$, אבל $P^{-1}\left(P\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)\right)=\{0\}\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$, וזו קבוצה שאינה פתוחה ב-$[0,1]$. לכן $P\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)$ אינה פתוחה ב-${}^{[0,1]}\!/_{R}$.

למה: יהי X מרחב טופולוגי ויהי R יחס שקילות עליו. אזי:

1. אם X קומפקטי אז גם ${}^{X}\!/_{R}$ קומפקטי.
2. אם X קשיר או קשיר מסילתית, אז גם ${}^{X}\!/_{R}$ קשיר או קשיר מסילתית, בהתאמה.

הוכחה: תכונות אלו הן תכונות טופולוגיות, כלומר נשמרות תחת העתקה רציפה, ומתקיים $P(X)={}^{X}\!/_{R}$. תחת הטופולוגיה שהגדרנו על ${}^{X}\!/_{R}$ זו העתקה רציפה, ולכן התמונה משמרת את התכונות הללו. ■

למה: יהיו X מרחב טופולוגי, יהי R יחס שקילות עליו ותהי $P:X\to {}^{X}\!/_{R}=:\overline{X}$ שהגדרנו.

יהי Y מרחב טופולוגי נוסף ותהי $f:X\to Y$ העתקה רציפה, שהיא קבועה על מחלקות השקילות של X. אזי:

1. קיימת העתקה רציפה $\overline{f}:\overline{X}\to Y$ כך ש-$\overline{f}\circ P=f$.
2. אם $\overline{f}$ הנ"ל חח"ע ועל וגם f העתקה פתוחה (או סגורה), אזי $\overline{f}$ היא הומאומורפיזם.

[42]כלומר אוסף תתי־קבוצות זרות בזוגות שאיחודן מכסה את X.

3. אם $\overline{f}$ הנ"ל חח"ע ועל וגם X קומפקטי ו-Y האוסדרוף, אזי $\overline{f}$ היא הומאומורפיזם.

הוכחה:

1. נגדיר את הפונקציה $\overline{f}:\overline{X}\to Y$ על־ידי $[x]\mapsto f(x)$. מההנחה כי f קבועה על מחלקות השקילות נובע כי $\overline{f}$ מוגדרת היטב. נוודא שזו העתקה רציפה.
תהי A פתוחה ב-Y. צריך להראות כי $\overline{f}^{-1}(A)$ פתוחה ב-$\overline{X}$. כלומר, לפי הגדרת הטופולוגיה על $\overline{X}$, צריך להראות כי $P^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(A)\right)$ פתוחה ב-X.
נשים לב שמתקיים:
$$\overline{f}^{-1}(A)=\{[x]\,|f(x)\in A\}=P\left(f^{-1}(A)\right)$$
מההנחה ש-f קבועה על מחלקות השקילות נובע כי:
$$f^{-1}(A)=P^{-1}\left(P\left(f^{-1}(A)\right)\right)=P^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(A)\right)$$
ומההנחה ש-f רציפה נובע כי קבוצה זו פתוחה ב-X.
2. צריך להראות כי $\overline{f}^{-1}$ רציפה, לשם כך נראה כי $\overline{f}$ העתקה פתוחה. תהי A פתוחה ב-$\overline{X}$, נראה כי $\overline{f}(A)$ פתוחה ב-Y. מההנחה ש-f קבועה על מחלקות השקילות נובע כי $\overline{f}(A)=f\left(P^{-1}(A)\right)$. אבל מהיות A פתוחה נובע כי $P^{-1}(A)$ פתוחה, ומההנחה כי f העתקה פתוחה נובע ש-$f\left(P^{-1}(A)\right)$ פתוחה.
3. הראינו לעיל שכל העתקה רציפה $X\to Y$ שהיא חח"ע ועל, ל-X קומפקטי ו-Y האוסדורף, היא הומאומורפיזם. ■

דוגמה כללית: יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A,B\subset X$ עם העתקה $f:A\to B$ כלשהי.
נגדיר יחס שקילות על X, על־ידי $a\sim a'$ אם ורק אם $f(a)=f(a')$.
אם f היא העתקה על, אז המרחב $X/\sim_f$ הוא "הדבקה" של A ל-B במרחב X.

דוגמאות:

1. $X=[a,b]\cup[c,d]$ קטעים ממשיים, $f:\{b,c\}\to\{c\}$. מתקיים $X/\sim_f\cong[a,d-c+b]$. כלומר זה הומאומורפי לקטע שאורכו כסכום אורכי שני הקטעים.
2. $X=[0,1]$, $f:\{0,1\}\to\{0\}$. מתקיים $X/\sim_f\cong S^1$.
3. $X=[0,1]\times[0,1]$, $f:\{0\}\times[0,1]\to\{1\}\times[0,1]$, $(0,t)\mapsto(1,t)$. מתקיים כי $X/\sim_f$ הומאומורפי לגליל בגובה 1 ובהיקף 1.
4. נסמן את דיסק היחידה $\mathbb{D}=\left\{x\in\mathbb{R}^2|\,\|x\|\le1\right\}\subset\mathbb{R}^2$. נגדיר עליו יחס שקילות $x\sim y$ אם ורק אם $x,y\in S^1$. כלומר כל נקודות השפה S^1 שקולות.
טענה: $\mathbb{D}/\sim\cong S^2$
הוכחה: נסמן $X=S^1\times[-1,1]$. זה הגליל בגובה 2. נגדיר העתקה $g:X\to S^2$ על־ידי $(x_1,x_2,t)\mapsto\left(\sqrt{1-t^2}x_1,\sqrt{1-t^2}x_2,t\right)$. העתקה זו מכווצת כל מעגל בגובה t על הגליל, למעגל בגובה t על הספרה.

g מגדירה שתי מחלקות שקילות לא טריוויאליות על הגליל:

$$\left\{(x_1,x_2,1)\,|x_1,x_2\in S^1\right\}$$

$$\left\{(x_1,x_2,-1)\,|x_1,x_2\in S^1\right\}$$

כל שאר האיברים בגליל מועתקים לאיבר יחיד ב-S^2.
g רציפה וקבועה על מחלקות השקילות, ולכן מהלמה נובע שקיימת $\overline{g}:{}^{X}\!/\!_{\sim g}\to S^2$ רציפה, חח"ע ועל. X קומפקטי ו-$\mathbb{D}$ האוסדורף, ולכן מהלמה נובע כי $\overline{g}$ היא הומאומורפיזם.
נגדיר העתקה $f:X\to\mathbb{D}$ על־ידי $\left(\frac{t+1}{2}x_1,\frac{t+1}{2}x_2\right)\mapsto(x_1,x_2,t)$.
העתקה זו מעבירה את הגליל למעגלים על $\mathbb{D}$.
f חח"ע בכל מקום, למעט בנקודה האחרונה (עבור $t=1$). מחלקת השקילות הלא־טריוויאלית היחידה היא $\left\{(x_1,x_2,-1)\,|x_1,x_2\in S^1\right\}$, וכל שאר האיברים בגליל מועתקים לאיבר יחיד על S^2.
לכן כמקודם קיימת $\overline{f}:{}^{X}\!/\!_{\sim f}\to\mathbb{D}$ רציפה, חח"ע ועל, ומהיות X קומפקטי ו-$\mathbb{D}$ האוסדורף, נובע כי $\overline{f}$ הומאומורפיזם.
נסיק מכאן:

$$S^2\cong{}^{X}\!/\!_{\sim g}\cong{}^{(X/\sim f)}\!/\!_{\sim g}\cong{}^{\mathbb{D}}\!/\!_{\sim}$$

כאשר המעבר השני נובע מכך שהיחס $f\sim$ מוכל ביחס $g\sim$, והסימון ${}^{\mathbb{D}}\!/\!_{\sim}$ הוא ליחס השקילות שהגדרנו בראשית הדוגמה. ■

הערה: בדרך דומה ניתן להראות שכל $\mathbb{D}_n=\{x\in\mathbb{R}^n|\,\|x\|\leq 1\}\subset\mathbb{R}^n$ ניתן להדביק באופן שיהיה הומאומורפי ל-S^n.

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. אומרים כי X הוא **יריעה n־ממדית**, אם לכל $x\in X$ קיימת סביבה הומאומורפית ל-$\mathbb{R}^n$.

דוגמאות:

1. הספרה S^n היא יריעה n־ממדית. (נוכיח בהמשך).
2. תהי G חבורה ותהי $H\leq G$ תת־חבורה. מגדירים את ${}^{G}\!/\!_{H}$ כאוסף מחלקות השקילות המתקבלות מהיחס $x\sim y\iff xH=yH\iff x^{-1}y\in H$.

   טענה: ${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}\cong S^1$. (מחלקות השקילות בחבורת המנה הן $\{r+\mathbb{Z}|r\in\mathbb{R}\}$).

   הוכחה: נגדיר העתקה $f:\mathbb{R}\to S^1$ על־ידי $t\mapsto(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$. מתקיים כי f רציפה וקבועה על מחלקות השקילות, ולכן קיימת העתקה רציפה $\overline{f}:{}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}\to S^1$ שהיא חח"ע ועל. ההעתקה f פתוחה ולכן $\overline{f}$ הומאומורפיזם. ■

   הערה: באופן דומה, הטורוס (בייגל) הומאומורפי ל-${}^{\mathbb{R}^2}\!/\!_{\mathbb{Z}^2}$.

חלק VIII
החבורה היסודית

תזכורת: קבוצה G עם פעולת כפל דו־מקומית $\cdot : G \times G \to G$, נקראת **חבורה**, אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. **אסוציאטיביות:** לכל $g_1, g_2, g_3 \in G$ מתקיים $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.
2. **קיום איבר נייטרלי לכפל** (או **יחידה**)**:** קיים $e \in G$ כך שלכל $g \in G$ מתקיים $e \cdot g = g \cdot e = g$.
3. **קיום הופכי:** לכל $g \in G$ קיים $h \in G$ כך שמתקיים $g \cdot h = h \cdot g = e$. נהוג לסמן את ההופכי של g ב-g^{-1}.

בהינתן חבורות G, H והעתקה $\varphi : G \to H$, אומרים כי φ היא **הומומורפיזם של חבורות**, אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$.[43]
2. עבור e_G איבר יחידה של G ו-e_H איבר יחידה של H, מתקיים $\varphi(e_G) = e_H$.

מבוא: כמו בכל בנייה של חבורה, כדי לבנות את החבורה היסודית נדרשת קבוצה ופעולה דו־מקומית מתאימה.

הפרק הבא יוקדש להגדרת הקבוצה באמצעות מושג חדש, "הומוטופיה", והפרק שלאחריו יוקדש לפעולה שנגדיר, "שרשור".

22 הומוטופיה

סימון: נסמן מעתה והלאה $I =: [0,1] =: \{t \in \mathbb{R} | 0 \le t \le 1\}$.

הגדרה: בהינתן מרחב טופולוגי X, **מסילה** היא העתקה רציפה מהצורה $f : I \to X$.

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. **הומוטופיה** היא משפחה של מסילות $\{f_t : I \to X | t \in [0,1]\}$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

1. קיימים $x_0, x_1 \in X$ כך שלכל $t \in [0,1]$ מתקיים $f_t(1) = x_1$, $f_t(0) = x_0$.
2. ההעתקה $F : I \times I \to X$ המוגדרת על־ידי $(s,t) \mapsto f_t(s)$ העתקה רציפה.

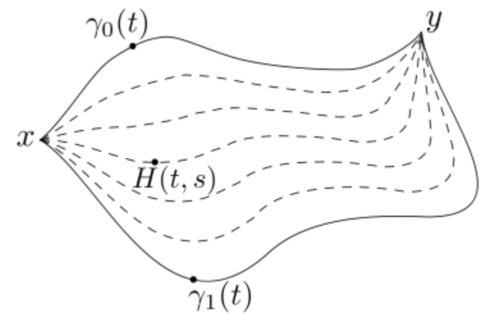
הגדרה: אומרים שזוג מסילות $f, g : I \to X$ הן **הומוטופיות**, אם קיימת הומוטופיה $\{f_t\}$ כך שמתקיים כי $f_1 = g$, $f_0 = f$.[44][45]

---

[43] נשים לב שהכפל שבצד שמאל הוא הכפל המוגדר ב-G, ואילו הכפל בצד ימין הוא הכפל המוגדר ב-H.

[44] בפרט הנקודות x_0, x_1 צריכות להיות $x_1 = f(1) = g(1)$, $x_0 = f(0) = g(0)$.

[45] השתמשנו במינוח "f, g הומוטופיות", למרות שאין סימטריה בין f ל-g בהגדרה. בהמשך נראה שאם f הומוטופית ל-g אז גם g הומוטופית ל-f.



בשרטוט (מוויקיפדיה) נראות זוג המסילות γ_0,γ_1 המקיימות $\gamma_i(1)=y$, $\gamma_i(0)=x$. המסילות הללו הומוטופיות כי ההעתקה $H(t,s)=\gamma_s(t)$ רציפה. ברור אינטואיטיבית שלו היה "חור" באמצע היריעה, המסילות γ_0,γ_1 לא היו הומוטופיות. נוכיח זאת בהמשך.

טענה: בכל קבוצה קמורה במרחבי $\mathbb{R}^n$,[46] מסילות בעלות אותה נקודת התחלה וסיום הן הומוטופיות.

הוכחה: יהיו $f,g:I\to A\subset\mathbb{R}^n$ ל-A קמורה, מסילות המתחילות ב-x_0 ונגמרות ב-x_1.

נגדיר הומוטופיה $\{f_t:I\to A\}$ על־ידי $f_t(s)=tg(s)+(1-t)f(s)$. תמונת ההומוטופיה הזו אכן בתוך A מהנחת הקמירות. קל לראות כי $f_1=g$, $f_0=f$. כמו כן ברור שההעתקה $F(s,t)=tg(s)+(1-t)f(s)$ רציפה כהרכבה של העתקות רציפות. ■

טענה: יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $x_0,x_1\in X$. נתבונן באוסף כל המסילות המקיימות $f(1)=x_1$, $f(0)=x_0$.

נגדיר על קבוצה זו יחס על־ידי הומוטופיה. כלומר $f\sim g$ אם ורק אם הן הומוטופיות. אזי יחס זה הוא יחס שקילות.

הוכחה: צריך להראות שהיחס $\sim$ מקיים רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.

- **רפלקסיביות:** בהינתן מסילה f ניקח את ההומוטופיה הקבועה $\left\{f_t|\forall_{t\in[0,1]}\,f_t=f\right\}$. קל לראות שזו הומוטופיה ולכן $f\sim f$.
- **סימטריות:** יהיו f,g מסילות ונניח כי $f\sim g$ על־ידי ההומוטופיה $\{f_t\}$. כלומר $f_1=g$, $f_0=f$.

  נגדיר את ההומוטופיה $\{f_{1-t}\}$ ונקבל את אותה קבוצה ללא כל שינוי, אלא ש-$f_1=f$, $f_0=g$. כלומר גם $g\sim f$.
- **טרנזיטיביות:** יהיו $f,g,h:I\to X$ מסילות. נניח כי $f\sim g$ על־ידי ההומוטופיה $\{f_t\}$ (כלומר $f_1=g$, $f_0=f$) עם ההעתקה $F:I\times I\to X$ הנדרשת, ונניח שגם $g\sim h$ על־ידי ההומוטופיה $\{g_t\}$ (כלומר $g_1=h$, $g_0=g$) עם ההעתקה $G:I\times I\to X$ הנדרשת.

[46] **הגדרה:** אומרים כי $A\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה **קמורה**, אם לכל $a,b\in A$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים $ta+(1-t)b\in A$.

כדי להראות כי $f \sim h$ נגדיר הומוטופיה $\{h_t\}$ על־ידי $h_t = \begin{cases} f_{2t} & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g_{2t-1} & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$.

הומוטופיה זו מוגדרת היטב בנקודה $t = \frac{1}{2}$, כי $f_1 = g = g_0$. קל לראות כי $h_0 = f_0 = f$, $h_1 = g_1 = h$.

נותר אם כך להראות שההעתקה $H(s,t) = h_t(s)$ רציפה. נשים לב שמתקיים:

$$H|_{t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} = F(s, 2t)$$

$$H|_{t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]} = G(s, 2t-1)$$

וההעתקות F, G הנ"ל רציפות כהרכבה של העתקות רציפות. הלמה הבאה תסיים את ההוכחה ש-H העתקה רציפה.

למה: יהיו $\alpha : A \subset X \to Y$, $\beta : B \subset X \to Y$ העתקות רציפות בין מרחבים טופולוגיים, ונניח כי A, B קבוצות סגורות.

אם מתקיים $\alpha|_{A \cap B} = \beta|_{A \cap B}$, אזי ההעתקה $\gamma : A \cup B \subset X \to Y$ המוגדרת על־ידי $\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in A \\ \beta(x) & x \in B \end{cases}$, גם היא רציפה. ■

הגדרה: בהינתן מרחב טופולוגי X ונקודה $x_0 \in X$, **לולאה** היא מסילה $f : I \to X$ המתחילה ומסתיימת באותה נקודה. כלומר $f(0) = f(1)$.

כפי שראינו הומוטופיה מגדירה יחס שקילות על אוסף הלולאות בבסיס $x_0 \in X$. נסמן אם כך ב-$[f]$ את מחלקת השקילות של לולאה f.

את אוסף מחלקות השקילות של לולאות ב-$x_0 \in X$, נסמן $\pi_1(X, x_0)$. זוהי הקבוצה של החבורה היסודית. כעת נגדיר את הפעולה בה.

23 שרשור

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי ומסילות $f, g : I \to X$ כלשהן המחוברות בקצותיהן. כלומר $f(1) = g(0)$. נסמן ב-$\pi_1(X, x_i, x_j)$ את אוסף המסילות בין x_i ל-x_j.

שרשור הוא פעולה מהצורה $\star : \pi_1(X, x_0, x_1) \times \pi_1(X, x_1, x_2) \to \pi_1(X, x_0, x_2)$, המוגדרת על־ידי:

$$f \star g(s) =: \begin{cases} f(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

למה: שרשור שומר על מחלקות הומוטופיה.

כלומר: נניח כי $f_0 \sim f_1$ וגם $g_0 \sim g_1$. אם f_0, g_0 מחוברות בקצותיהן (כלומר $f_0(1) = g_0(0)$), אזי $f_0 \star g_0 \sim f_1 \star g_1$.

הוכחה: נניח כי $f_0 \sim f_1$ על־ידי ההומוטופיה $\{f_t\}$ וכן $g_0 \sim g_1$ על־ידי ההומוטופיה $\{g_t\}$. נגדיר הומוטופיה $\{f_t \star g_t\}$, ונראה שזו ההומוטופיה המבוקשת.

צריך להראות שההעתקה $H : I \times I \to X$ המוגדרת על־ידי $H(s,t) = f_t \star g_t(s)$ רציפה. מההגדרה מתקיים:

$$H(s,t) =: f_t \star g_t(s) = \begin{cases} f_t(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g_t(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}.1\right] \end{cases} = \begin{cases} F(2s,t) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1,t) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

ומכאן כי היא רציפה (מנימוק דומה לזה שהזכרנו בהוכחת הטרנזיטיביות לעיל). ■

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי ותהי $f : I \to X$ מסילה. **רה־פרמטריזציה** של f היא הרכבה $f \circ \varphi : I \to X$, כאשר $\varphi : I \to I$ מסילה המקיימת $\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = 0$.

טענה: $f \sim f \circ \varphi$

הוכחה: נשים לב כי זוג המסילות $\varphi, Id : I \to I$ הומוטופיות על ידי ההומוטופיה $\varphi_t(s) = ts + (1-t)\varphi(s)$. מכאן שגם $f \circ \varphi \sim f \circ I = f$ על־ידי $\{f \circ \varphi_t\}$. ■

24 החבורה היסודית

הגדרה: כפי שהזכרנו לעיל, בהינתן מרחב טופולוגי X ונקודה $x_0 \in X$, מוגדר אוסף מחלקות השקילות של לולאות ב-x_0 שסימנו $\pi_1(X, x_0)$.

נגדיר על קבוצה זו פעולה דו־מקומית $\star : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ על־ידי שרשור $[f] \star [g] = [f \star g]$.[47]

נגדיר את איבר היחידה e להיות מחלקת השקילות של הלולאה הקבועה $e(s) = x_0$.

נגדיר את האיבר ההופכי ללולאה $f : I \to X$ על־ידי $\overline{f}(s) = f(1-s)$.

נרצה להראות שמתקבלת חבורה - **החבורה היסודית**.

- נראה שהפעולה מוגדרת היטב: צריך להראות שההגדרה $[f] \star [g] = [f \star g]$ אינה תלויה בבחירת הנציגים f, g של מחלקת השקילות.

  אבל הראינו שאם $\tilde{f} \sim f$ וכן $\tilde{g} \sim g$, אז $\tilde{f} \star \tilde{g} \sim f \star g$. לכן $\left[\tilde{f}\right] \star [\tilde{g}] = \left[\tilde{f} \star \tilde{g}\right] = [f \star g] = [f] \star [g]$.

- נראה שמתקיימים המאפיינים של חבורה:

1. <u>אסוציאטיביות</u>: יהיו f, g, h לולאות. צריך להראות כי $([f] \star [g]) \star [h] = [f] \star ([g] \star [h])$. לשם כך נוכיח טענה זו באופן כללי למסילות.

   טענה: יהיו f, g, h מסילות המקיימות $f(1) = g(0)$ וכן $g(1) = h(0)$. אזי $(f \star g) \star h \sim f \star (g \star h)$.

   הוכחה: נתבונן ברה־פרמטריזציה מהצורה הבאה:

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ s - \frac{1}{4} & s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 2s - 1 & s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

[47] במקרה של שרשור מסילות כלליות פעולת השרשור אינה בהכרח דו־מקומית. מכיוון שכאן עוסקים בלולאות זו אכן פעולה דו־מקומית.

נוכיח שמתקיים $\left(\left(f\star g\right)\star h\right)\circ\varphi=f\star\left(g\star h\right)$ ובזאת נסיים, כי צד שמאל הומוטופי ל-$\left(f\star g\right)\star h$ (כפי שהוכחנו לכל רה־פרמטריזציה).

נתבונן היטב בהגדרה של שרשור ונסיק את שני השוויונים הבאים:

$$\left(f\star g\right)\star h\left(s\right)\underset{\text{by def}}{=}\begin{cases} f\star g\left(2s\right) & s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ h\left(2s-1\right) & s\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}\qquad(1)$$

$$f\star g\left(s\right)\underset{\text{by def}}{=}\begin{cases} f\left(2s\right) & s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ g\left(2s-1\right) & s\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}\qquad(2)$$

נציב את שוויון 2 בתוך שוויון 1 ונקבל:

$$\left(f\star g\right)\star h\left(s\right)=\begin{cases} f\left(4s\right) & s\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\\ g\left(4s-1\right) & s\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\\ h\left(2s-1\right) & s\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

באותו אופן ניתן לראות מההגדרה כי $f\star\left(g\star h\right)\circ\varphi$ מקיימת את אותן משוואות.

■

2. <u>קיום איבר יחידה</u>: נראה שהלולאה הקבועה $e\left(s\right)=x_0$ היא איבר היחידה.

נשים לב שבהינתן מסילה כללית $f:I\to X$, אם נגדיר מסילה קבועה $C_1:I\to X$ על־ידי $C_1\left(s\right)=f\left(1\right)$, אז מתקיים $f\star C_1\sim f\circ\varphi\sim f$, כאשר φ היא הרה־פרמטריזציה:

$$\varphi\left(s\right)=\begin{cases} 2s & s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 1 & s\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

באותו אופן אם נגדיר מסילה קבועה $C_0:I\to X$ על־ידי $C_0\left(s\right)=f\left(0\right)$, אז מתקיים $C_0\star f\sim\varphi\circ f\sim f$, כאשר φ היא הרה־פרמטריזציה:

$$\varphi\left(s\right)=\begin{cases} 0 & s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 2s & s\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

לכן כאשר $f:I\to X$ לולאה שבסיסה ב-x_0 ומתקיים $C_0=C_1=e$, זה אכן איבר יחידה.

3. <u>קיום הופכי</u>: תהי f לולאה, נראה שהלולאה $\overline{f}\left(s\right)=f\left(1-s\right)$ היא ההופכית שלה.

נשים לב שלכל מסילה f, מתקיים $f\star\overline{f}\sim C_{f(0)}$, בגלל ההומוטופיה $\{f_t\}$ המתקבלת על־ידי $f_t\left(s\right)=\begin{cases} f\left(s\right) & s\in\left[0,t\right]\\ f\left(1-s\right) & s\in\left[t,1\right]\end{cases}$.[48] באופן דומה גם מתקיים $\overline{f}\star f\sim C_{f(1)}$.

לכן כאשר $f:I\to X$ לולאה שבסיסה ב-x_0 = $f\left(0\right)=f\left(1\right)$, זה אכן איבר הופכי.

[48] המסילה ה-t בהומוטופיה זו הולכת על f עד t, ואז חוזרת לנקודת המוצא.

■

משפט: יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $x_0, x_1 \in X$ שייכים לאותו רכיב קשירות מסילתית.
אזי $\pi_1(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$ (איזומורפיות כחבורות).

הוכחה: x_0, x_1 באותו רכיב קשירות מסילתית ולכן יש מסילה $h : [0,1] \to X$ המקיימת $h(0) = x_0,\ h(1) = x_1$.

נגדיר העתקה $\beta : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ על־ידי $[f] \mapsto [\overline{h} \star f \star h]$ (כאשר $\overline{h}(s) = h(1-s)$), ונראה שהיא האיזומורפיזם המבוקש.

1. ראשית נראה שאכן מתקבלת לולאה שבסיסה ב-x_1.
שרשור של מסילות נותן מסילה. נותר להראות $\overline{h} \star f \star h(0) = \overline{h} \star f \star h(1) = x_1$.
נסמן $g(s) = f \star h(s)$ ונקבל מהגדרת שרשור:

$$\overline{h} \star g(s) = \begin{cases} \overline{h}(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

לכן עבור $s = 0$ אכן מתקיים $\overline{h} \star g(0) = \overline{h}(0) = h(1) = x_1$.
נקבל עוד מהגדרת שרשור:

$$g(s) = f \star h(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ h(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

ולכן עבור $s = 1$ מתקיים $\overline{h} \star g(1) = g(1) = h(1) = x_1$.

2. נראה ש-β הומומורפיזם של חבורות:

$$\beta([f] \star [g]) = \beta([f \star g]) = \left[\overline{h} \star f \star g \star h\right] =$$

$$= \left[\overline{h} \star f \star h \star \overline{h} \star g \star h\right] =$$

$$= \left[\overline{h} \star f \star h\right] \star \left[\overline{h} \star g \star h\right] = \beta([f]) \star \beta([g])$$

כאשר המעבר השני נובע מהעובדה הכללית למסילות $h \star \overline{h} \sim e$.

3. נראה של-β קיימת העתקה הופכית (ביחס להרכבה), ומכך נסיק שהיא חח"ע ועל.
נגדיר העתקה $\overline{\beta} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ על־ידי $f \mapsto h \star f \star \overline{h}$. נרכיב:

$$\beta \circ \overline{\beta}([f]) = \beta\left(\left[h \star f \star \overline{h}\right]\right) = \left[\overline{h} \star h \star f \star \overline{h} \star h\right] = [f]$$

■

מסקנה: החבורה היסודית של כל מרחב (או קבוצה) X קשיר מסילתית אינה תלויה בבחירת נקודת הבסיס, עד־כדי איזומורפיזם. לכן במקרה כזה נסמן $\pi_1(X)$.

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. כל לולאה הומוטופית ל-e נקראת **נול־הומוטופית**.

הגדרה: מרחב טופולוגי X נקרא **פשוט־קשר**, אם הוא קשיר מסילתית וגם $\pi_1(X)$ טריוויאלית. כלומר $\pi_1(X) = \{[e]\}$.

ניתן להגדיר באופן שקול מרחב פשוט־קשר, על־ידי כך שכל הלולאות בו הן נול־הומוטופיות.

טענה: מרחב הוא פשוט־קשר אם ורק אם כל זוג מסילות בעלות אותן נקודות התחלה וסיום הן הומוטופיות.

הוכחה: (כיוון ראשון)

נניח כי X פשוט קשר, ויהיו $f, g : I \to X$ מסילות בעלות נקודות התחלה וסיום x_0, x_1 בהתאמה.

השרשור $f \star \overline{g} : I \to X$ הוא לולאה שבסיסה x_0, ומהיות X פשוט־קשר נובע כי $f \star \overline{g} \sim C_{x_0}$. מכאן נובע $f \star C_{x_0} \sim f \star (\overline{g} \star g) = (f \star \overline{g}) \star g \sim C_{x_0} \star g$ ולכן $f \sim g$.

(כיוון שני)

אם $f, g : I \to X$ מסילות בעלות נקודות התחלה וסיום x_0, x_1 בהתאמה והן לא הומוטופיות, נקבל כי הלולאות $f \star \overline{g}, g \star \overline{f}$ שבסיסיהן x_0, x_1 אינן הומוטופיות, ולכן החבורה היסודית אינה טריוויאלית. ■

24.1 החבורות היסודיות של מרחבים הומאומורפיים

מבוא: בפסקה זו נראה כי החבורות היסודיות של מרחבים הומאומורפיים הן איזומורפיות. עובדה זו תשמש כלי נוסף לבדיקת הומאומורפיות של מרחבים.

הגדרה: יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ויהיו $x_0 \in X, y_0 \in Y$. תהי גם $\varphi : X \to Y$ העתקה רציפה המשמרת $x_0 \mapsto y_0$.

אזי ההעתקה φ משרה העתקה חדשה $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ המוגדרת על־ידי $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$.

הערות:

1. φ_* מוגדרת היטב, כי אם $f, g : I \to X$ לולאות הומוטופיות אז $\varphi \circ f, \varphi \circ g$ גם הן הומוטופיות.
2. φ_* היא הומומורפיזם של חבורות, כי $[\varphi \circ f \star g] = [\varphi \circ f] \star [\varphi \circ g]$.

טענה: נניח כי X, Y, Z מרחבים טופולוגיים, עם נקודות x_0, y_0, z_0 בהתאמה.

יהיו גם $X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\varphi} Z$ העתקות רציפות המעתיקות $x_0 \mapsto y_0 \mapsto z_0$. אזי:

1. $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$. כלומר ללולאה $f : I \to X$ בבסיס x_0 המועתקת על־ידי $\varphi \circ \psi_*$ ללולאה מהצורה $I \to Z$ בבסיס z_0, מתקיים:

$$(\varphi \circ \psi_*)([f]) = \varphi_*([\psi_*([f])])$$

2. להעתקת הזהות הטופולוגית $Id : X \to X$, ההעתקה $Id_* : \pi_1(X, x_0) \to (X, x_0)$ היא העתקת הזהות של החבורות.

(ההוכחה מושארת כתרגיל)

טענה: יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ויהיו $x_0 \in X, y_0 \in Y$. תהי גם $\varphi : X \to Y$ הומאומורפיזם המשמר $x_0 \mapsto y_0$.

אזי ההעתקה המתאימה $\varphi_* : \pi_1 (X, x_0) \to \pi_1 (Y, y_0)$ היא איזומורפיזם של חבורות.

(ההוכחה מושארת כתרגיל)

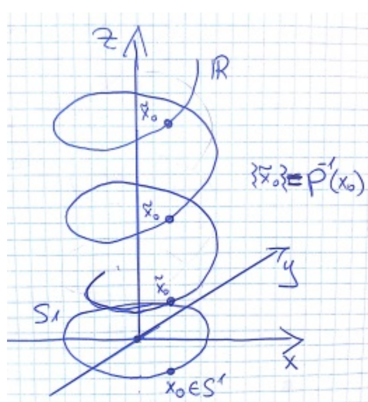
מסקנה יסודית: אם החבורות היסודיות של שני מרחבים טופולוגיים אינן איזומורפיות, אז המרחבים אינם הומאומורפיים.

25 מרחבי כיסוי

הגדרה: יהיו E, X מרחבים טופולוגיים. אומרים שהעתקה רציפה ועל $p : E \to X$ היא **העתקת כיסוי**, אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $U \subset X$ המכילה את x, כך ש-$p^{-1} (U) \subset E$ היא איחוד זר של פתוחות $\{V_\alpha\}_\alpha$, כך שלכל α, הצמצום $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ מהווה הומאומורפיזם על U.

במקרה שקיימת העתקת כיסוי, אומרים ש-E הוא **מרחב כיסוי** של X.

דוגמה: $\mathbb{R}$ מרחב כיסוי של S^1, עם העתקת הכיסוי $p : \mathbb{R} \to S^1$ המוגדרת $s \mapsto (\cos (2\pi s), \sin (2\pi s))$.
האיור הבא ממחיש זאת:



קל לראות שלכל $x_0 \in S^1$, נוכל לבחור את $U \subset S^1$ להיות למשל קטע פתוח באורך $\frac{1}{3}$ סביב x_0 על המעגל, ונקבל שהקבוצה $p^{-1} (x_0) \subset \mathbb{R}$ היא איחוד הקטעים באורך $\frac{1}{3}$ סביב $\tilde{x}_0$־ים כל הדרך עד למעלה. כל קטע כזה ב-$\mathbb{R}$ הוא איזשהו קטע פתוח סביב $\tilde{x}_0$ כלשהי, ולכן הומאומורפי ל-U.

הגדרה: נניח כי $p : E \to X$ העתקת כיסוי, ונניח כי X קשיר מסילתית וכי E מרחב פשוט קשר. כלומר $\pi_1 (E)$ טריוויאלית.

אומרים כי E הוא **מרחב כיסוי אוניברסלי** של X (עד כדי הומאומורפיזם), אם לכל העתקת כיסוי $p' : E' \to X$ אחרת, קיימת העתקת כיסוי $q : E \to E'$ המקיימת $p' \circ q = p$.

במילים אחרות, הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[dl, "p'"] \\ X & \end{tikzcd}$$

25.1 הרמה

הגדרה: נניח כי מרחב טופולוגי E הוא מרחב כיסוי של מרחב טופולוגי X על ידי העתקת כיסוי $p:E\to X$. יהי Y מרחב טופולוגי כלשהו ותהי $f:Y\to X$ העתקה רציפה.

אומרים שהעתקה $\tilde{f}:Y\to E$ היא **הרמה** של f, אם מתקיים $p\circ\tilde{f}=f$.

במילים אחרות, הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

משפט: יהי E מרחב כיסוי של מרחב X על ידי העתקת כיסוי $p:E\to X$. אזי לכל מסילה $f:I\to X$ המתחילה ב-x_0 ולכל $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$, קיימת ויחידה הרמה למסילה $\tilde{f}:I\to E$ המתחילה ב-$\tilde{x}_0$.

הוכחה: תהי $f:I\to X$ מסילה שבסיסה $x_0\in X$.

- <u>קיום</u>: יהי $\tilde{x}_0\in E$ המקיים $p(\tilde{x}_0)=x_0$. מהגדרת העתקת כיסוי, לכל $x\in X$ יש סביבה פתוחה U_x מתאימה. ניקח את האוסף $\mathcal{U}=\{U_x\}_{x\in X}$ המהווה כיסוי פתוח של X.

  ניקח חלוקה של הקטע I מהצורה $0=s_0<s_1<...<s_n=1$, ונדאג שהיא תהיה מספיק חזקה כך שכל תת קטע $[s_i,s_{i+1}]$ יהיה מספיק קטן כך שיתקיים $f([s_i,s_{i+1}])\subset U_i$ לאיזו $U_i\in\mathcal{U}$.[49]

  כעת נגדיר את ההרמה $\tilde{f}:I\to E$ בתהליך אינדוקטיבי: תחילה נגדיר $\tilde{f}(0)=\tilde{x}_0$. נניח באינדוקציה כי $\tilde{f}$ מוגדרת על איחוד קטעי החלוקה $[0,s_i]$. מתקיים $f([s_i,s_{i+1}])\subset U_i$, ומהיות p העתקת כיסוי נובע שקיים ל-$p^{-1}(U_i)$ כיסוי $\{V_\beta\}_\beta$ כך שלכל β מתקיים $p|_{V_\beta}:V_\beta\to U_i$ הומאומורפיזם. מתקיים כי $\tilde{f}(s_i)\in V'$ לאיזו $V'\in\{V_\beta\}_\beta$, ולכן נוכל להגדיר $\tilde{f}|_{[s_i,s_{i+1}]}=(p|_{V'})^{-1}\circ f$. מהיות $p|_{V'}$ הומאומורפיזם נובע שההעתקה נותרת רציפה.

  ברור מההגדרה שאכן מתקיים $p\circ\tilde{f}=f$ על כל I, שכן שוויון זה מתקיים מקומית לכל $s\in I$ מבניית $\tilde{f}$.

[49] <u>נימוק</u>: האוסף $\left\{f^{-1}(U_X)\right\}_{x\in X}$ מהווה כיסוי פתוח של I. ראינו שלמרחב מטרי קומפקטי סדרתית, לכל כיסוי פתוח יש מספר לבג. כלומר מספר $\varepsilon>0$ כך שכל כדור פתוח ברדיוס ε מוכל בקבוצה כלשהי מהכיסוי. נבחר אם כך חלוקה $0=s_0<s_1<...<s_n=1$ כך שאורך כל אינטרוול הוא $\frac{\varepsilon}{2}$, ונקבל שלכל i מתקיים $[s_i,s_{i+1}]\subsetneqq B_\varepsilon\left(\frac{s_{i+1}+s_i}{2}\right)\subset f^{-1}(U_i)$ לאיזו $U_i\in\mathcal{U}$. כלומר $f([s_i,s_{i+1}])\subset U_i$.

- יחידות: גם זאת נראה באינדוקציה. נניח כי $\tilde{f}, \tilde{f}' : I \to E$ זוג הרמות של $f : I \to X$ שבסיס שתיהן הוא $\tilde{x}_0 \in E$ המקיים $p(\tilde{x}_0) = x_0$, כלומר $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0)$.

  נניח אינדוקטיבית כי $\tilde{f} = \tilde{f}'$ על איחוד קטעי החלוקה $[0, s_i]$. בהינתן $V' \subset p^{-1}(U_i)$ בסימוני מקודם, הגדרנו $\tilde{f}|_{[s_i, s_{i+1}]} = (p|_{V'})^{-1} \circ f$.

  מההנחה כי $\tilde{f}'$ הרמה של f נובע כי $p \circ \tilde{f}' = f$ בפרט על $[s_i, s_{i+1}]$. אבל $p|_{V'}$ היא הומאומורפיזם, ולכן נסיק $\tilde{f}' = (p|_{V'})^{-1} \circ f = \tilde{f}$. ■

משפט: יהי E מרחב כיסוי של מרחב X על ידי העתקת כיסוי $p : E \to X$. אזי לכל הומוטופיה $F : I \times I \to X$ המתחילה ב-x_0 ולכל $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, קיימת ויחידה הרמה להומוטופיה $\tilde{F} : I \times I \to E$ המתחילה ב-$\tilde{x}_0$.

הוכחה: תהי $F : I \times I \to X$ הומוטופיה שבסיסה $x_0 \in X$. כלומר $F(0, t) = x_0$.

- קיום: יהי $\tilde{x}_0 \in E$ המקיים $p(\tilde{x}_0) = x_0$. מהגדרת העתקת כיסוי, לכל $x \in X$ יש סביבה פתוחה U_x מתאימה. ניקח את האוסף $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ המהווה כיסוי פתוח של X.

  נתונים שני עותקים של I, אז נבחר חלוקות של שניהם $\begin{matrix} 0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = 1 \\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1 \end{matrix}$

  כך שאם נסמן $I_i \times J_i =: [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ מתקיים כי $F(I_i \times J_j) \subset U_{ij}$ לאיזו $U_{ij} \in \mathcal{U}$.[50]

  כעת נגדיר את ההרמה $\tilde{F} : I \to E$ בתהליך אינדוקטיבי, והפעם האינדוקציה תהיה לא על קטעים אלא על ריבועים. כלומר: תחילה נגדיר $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$, ואז נגדיר את $I_i \times J_1$ לפי הסדר $i = 1, ..., m$ ואז נגדיר את $I_i \times J_2$ לפי הסדר $i = 1, ..., m$, וכן הלאה עד שנגדיר את $I_i \times J_n$ לפי הסדר $i = 1, ..., m$.

  נניח באינדוקציה כי $\tilde{F}$ מוגדרת על האיחוד $\bigcup_{\substack{1 \le i \le i_0 - 1 \\ 1 \le j \le j_0 - 1}} I_i \times J_j$. מתקיים כי $F(I_{i_0} \times J_{j_0}) \subset U_{i_0 j_0}$, ומהיות p העתקת כיסוי נובע שקיים ל-$p^{-1}(U_{i_0 j_0})$ כיסוי $\{V_\beta\}_\beta$ כך שלכל β מתקיים $p|_{V_\beta} : V_\beta \to U_{i_0 j_0}$ הומאומורפיזם. מתקיים כי $\tilde{F}(s_{i_0}, t_{j_0}) \in V'$ (נזכור $I_{i_0} \times J_{j_0} =: [s_{i_0}, s_{i_0+1}] \times [t_{j_0}, t_{j_0+1}]$) לאיזו $V' \in \{V_\beta\}_\beta$, ולכן נוכל להגדיר $\tilde{F}|_{I_{i_0} \times J_{j_0}} = (p|_{V'})^{-1} \circ F$. מהיות $p|_{V'}$ הומאומורפיזם נובע שההעתקה נותרת רציפה.

  ובאותו אופן גם כאן קל לראות כי $p \circ \tilde{F} = F$.

- יחידות: נניח כי $\tilde{F}, \tilde{F}' : I \times I \to E$ זוג הרמות של $F : I \to X$. נשים לב שלכל $s \in I$ מתקיים $\tilde{F}, \tilde{F}' : I \times \{t\} \to E$ הן מסילות המהוות הרמה של המסילה $F : I \times \{t\} \to X$, ולכן היחידות נובעת מהמשפט הקודם. ■

מסקנה: נניח כי $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ העתקת כיסוי, כלומר $e_0 \mapsto x_0$ תחת p, אזי ההעתקה המושרית $p^* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(X, x_0)$ היא הומומורפיזם חח"ע.

הוכחה: ראינו כבר שההעתקה המושרית המתקבלת על ידי $f \mapsto p \circ f$ היא הומומורפיזם. נראה את החח"ע על ידי כך שנראה כי הגרעין טריוויאלי.

נניח כי $p \circ \tilde{f} \sim C_{x_0}$ על ידי ההומוטופיה $F : I \times I \to X$. נרים אותה להומוטופיה $\tilde{F} : I \times I \to E$, ומיחידות ההרמה נסיק $\tilde{f} \sim C_{e_0}$. ■

---

[50] מאותו נימוק כמקודם, שכן גם $I \times I$ מרחב מטרי קומפקטי סדרתית.

26 החבורה היסודית של המעגל

מבוא: המעגל $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ קשיר מסילתית, ולכן החבורה היסודית שלו אינה תלויה בבחירת הנקודה. בפרק זה נרצה לחשב את החבורה במפורש, בעזרת מרחב הכיסוי $\mathbb{R}$ של S^1.

נראה שהחבורה הזו איזומורפית לחבורת השלמים $\mathbb{Z}$. כפי שנראה, המשמעות של זה תהיה שמחלקות ההומוטופיה של לולאות על המעגל נגזרות ממספר הסיבובים סביב המעגל. כלומר כל הלולאות שמסתובבות n פעמים סביב המעגל שייכות למחלקת הומוטופיה אחת, ורק הן שייכות למחלקה זו.

משפט: החבורה היסודית של המעגל איזומורפית לחבורת השלמים.

הוכחה: נקבע את הנקודה $(1,0) \in S^1$ ונראה כי $\pi_1\left(S^1,(1,0)\right) \cong \mathbb{Z}$.

ראינו כי $\mathbb{R}$ מהווה מרחב כיסוי של S^1 על ידי ההעתקה $p(s)=e^{2\pi is}$. נגדיר העתקה $\phi:\mathbb{Z}\to\pi_1\left(S^1,(1,0)\right)$ על ידי $\phi(n)=\left[p\circ\tilde{f}_n\right]$, כאשר $\tilde{f}_n:I\to\mathbb{R}$ היא מסילה המתחילה ב-0 ומסתיימת ב-n. נשים לב כי ϕ מוגדרת היטב, שכן אם $\tilde{f}_n,\tilde{f}'_n:I\to\mathbb{R}$ מסילות בין 0 ל-n, מהיות $\mathbb{R}$ קמור נובע כי $\tilde{f}_n\sim\tilde{f}'_n$.[51]

- ϕ <u>הומומורפיזם</u>: מתקיים:

$$\phi(n+m)=\left[p\circ\tilde{f}_{n+m}\right]=\left[p\circ\tilde{f}_n\star\tilde{f}_m\right]=\left[p\circ\tilde{f}_n\right]\star\left[p\circ\tilde{f}_m\right]=\phi(n)\star\phi(m)$$

  כל השוויונים ברורים, למעט השוויון השני. כלומר יש להראות כי $p\circ\tilde{f}_{n+m}\sim p\circ\tilde{f}_n\star\tilde{f}_m$.

  נגדיר משפחה של העתקות $\{\tau_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|\tau_k(x)=x+k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. נשים לב שהמסילה $\tau_m\circ\tilde{f}_n:I\to\mathbb{R}$ היא מסילה בין m לבין $n+m$. לכן נובע כי $\tilde{f}_m\star\left(\tau_m\circ\tilde{f}_n\right):I\to\mathbb{R}$ מסילה בין 0 לבין $n+m$, ולכן $\tilde{f}_m\star\left(\tau_m\circ\tilde{f}_n\right)\sim\tilde{f}_{n+m}$. כלומר $p\circ\tilde{f}_{n+m}\sim p\circ\tilde{f}_m\star\left(\tau_m\circ\tilde{f}_n\right)$. אבל נשים לב כי $p\circ\tau_m\circ\tilde{f}_n\sim p\circ\tilde{f}_n$, כי האורך של שתיהן הוא n.

- ϕ <u>על</u>: תהי $f\in\pi_1\left(S^1,(1,0)\right)$. מהיות $\mathbb{R}$ מרחב כיסוי של S^1 נובע שקיימת הרמה יחידה $\tilde{f}:I\to\mathbb{R}$ המתאימה ל-f. אבל $e^{2\pi i\tilde{f}(1)}=p\circ\tilde{f}(1)=f(1)=(1,0)$, ולכן $\tilde{f}(1)\in\mathbb{Z}$. מכאן נסיק $[f]=\left[p\circ\tilde{f}\right]=\phi\left(\tilde{f}(1)\right)$.

- ϕ <u>חח"ע</u>: יהיו n,m שלמים שעבורם $\phi(n)=\phi(m)$. צריך להראות $n=m$. נתבונן במסילות $\tilde{f}_n,\tilde{f}_m:I\to\mathbb{R}$. מההנחה $\left[p\circ\tilde{f}_n\right]=\phi(n)=\phi(m)=\left[p\circ\tilde{f}_m\right]$ נובע כי $p\circ\tilde{f}_n\sim p\circ\tilde{f}_m$, על ידי הומוטופיה שנסמן $F:I\times I\to S^1$, כלומר $F(0,s)=p\circ\tilde{f}_n(s)\,,\ F(1,s)=p\circ\tilde{f}_m(s)$. אבל מהיות $\mathbb{R}$ מרחב כיסוי של S^1 נובע שקיימת הרמה יחידה להומוטופיה $\tilde{F}:I\times I\to\mathbb{R}$ המקיימת $p\circ\tilde{F}=F$, ומיחידות ההרמה נובע $\tilde{f}_n\sim\tilde{f}_m$. כלומר $n=m$. ■

[51] על ידי ההומוטופיה $f_t(s)=t\tilde{f}_n(s)+(1-t)\tilde{f}_n(s)$.

26.1 מסקנה: המשפט היסודי של האלגברה

משפט: לכל פולינום $p\in\mathbb{C}[x]$ שאינו קבוע קיים שורש ב-$\mathbb{C}$.

הוכחה: יהי $p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n$ פולינום כלשהו (ההנחה שהוא מתוקן לא מפריעה). נראה שאם לא קיים שורש אז p קבוע. כלומר נניח $0<|p(z)|$ לכל $z\in\mathbb{C}$ ונסיק ש-$n=0$.

סימון: נקצר ונסמן נרמול $\frac{z}{\|z\|}$ על־ידי $\frac{z}{\|\|}$.

1. נגדיר לולאות $f_r : I\to S^1\subset\mathbb{C}$ על־ידי $f_r(s)=\frac{p\left(re^{2\pi is}\right)/p(r)}{\|\|}$ לכל $r\in\mathbb{C}$. נשים לב ש-$f_r(0)=f_r(1)=1$, וכן שזוהי הומוטופיה בין $f_0(s)=1$ (הלולאה הקבועה 1) לבין כל $f_r(s)$.
2. יהי $r\in\mathbb{C}$ מספיק גדול כך שיתקיים $\max\left\{1,\sum_{i=1}^n a_i\right\}<r$. נתבונן במעגל ברדיוס r, כלומר $\{z\in\mathbb{C}|\,|z|=r\}$. לכל z במעגל מתקיים:

$$\left|t\left(\sum_{i=1}^n a_iz^{n-i}\right)\right|\le\left|\sum_{i=1}^n a_iz^{n-i}\right|\le\sum_{i=1}^n a_ir^{n-i}\le$$

$$\le r^{n-1}\sum_{i=1}^n a_i<r^{n-1}\cdot r=r^n=|z|^n$$

נגדיר את הפולינומים $p_t(z)=z^n+t\left(\sum_{i=1}^n a_iz^{n-i}\right)$ עבור $t\in[0,1]$. מאי־שוויון המשולש ומאי השוויון האחרון נובע:

$$|z^n|=\left|p_t(z)-t\left(\sum_{i=1}^n a_iz^{n-i}\right)\right|\le|p_t(z)|+\left|t\left(\sum_{i=1}^n a_iz^{n-i}\right)\right|$$

$$\Downarrow$$

$$|p_t(z)|\ge|z^n|-\left|t\left(\sum_{i=1}^n a_iz^{n-i}\right)\right|>0$$

3. נגדיר $g_t(s)=\frac{p_t\left(re^{2\pi is}\right)/p_t(r)}{\|\|}$ ל-$t\in[0,1]$. נשים לב כי:

$$p_0(z)=z^n\implies g_0(s)=e^{2\pi isn}$$
$$p_1(z)=p(z)\implies g_1(s)=f_r(s)$$

לכן זוהי הומוטופיה בין הלולאה הקבועה $g_0(s)=e^{2\pi isn}$ לבין $f_r(s)$.

4. משלב 3 נובע $e^{2\pi isn}=g_0(s)\sim f_r(s)$ ומשלב 1 נובע $f_r(s)\sim f_0(s)=1$. כלומר $e^{2\pi isn}\sim 1$.

אבל נשים לב כי הלולאה $e^{2\pi isn}$ מקיפה n פעמים את מעגל היחידה, והלולאה 1 היא הלולאה הקבועה. הראינו שהחבורה היסודית של המעגל איזומורפית ל-$\mathbb{Z}$ בהתאם למספר הסיבובים סביב מעגל היחידה, ולכן $n=0$. ■

26.2 מסקנה: משפט נקודת השבת של בראואר

משפט: נסמן את דיסק היחידה $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}|\,|z|\le1\}$. לכל העתקה רציפה מהצורה $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ קיימת נקודת שבת. כלומר קיימת $z\in\mathbb{D}$ כך ש-$f(z)=z$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $z \neq f(z)$ לכל $z \in \mathbb{D}$. מההנחה נובע שלכל זוג $(z, f(z))$ קיים ישר יחיד שראשיתו ב-$f(z)$ וחוצה את z. אם כך נגדיר העתקה $r : \mathbb{D} \to S^1$ כך ש-$r(z)$ היא נקודת החיתוך של הישר הנ"ל עם המעגל S^1. בפרט לכל $z \in S^1$ מתקיים $r(z) = z$. קל להשתכנע גאומטרית ש-r רציפה.

תהי $f_0 : [0,1] \to S^1$ לולאה שמקיפה את S^1 עם בסיס $x_0 \in \mathbb{D}$ כלשהו.

נתבונן בלולאות $f_t(s) = (1-t) f_0(s) + t x_0$. מקמירות $\mathbb{D}$ נובע שזוהי הומוטופיה בין f_0 לבין הלולאה הקבועה $C_{x_0} : [0,1] \to \{x_0\} \in \mathbb{D}$.

מרציפות r נובע כי $\{r \circ f_t(s)\}$ הומוטופיה בין $r \circ f_0$ לבין $r \circ C_{x_0}$. אבל נשים לב כי $f_0(s) \in S^1$ לכל s, ולכן $r \circ f_0 = f_0$, ומצד שני $r \circ C_{x_0}$ היא הלולאה הקבועה $r(x_0)$, סתירה. ■

26.3 מסקנה: $\mathbb{R}^2 \ncong \mathbb{R}^3$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ הומאומורפיזם. מכך נקבל שהצמצום מהצורה $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{f(0,0)\}$ הומאומורפיזם.

נשים לב שכל זוג לולאות ב-$\mathbb{R}^3 \setminus \{f(0,0)\}$ הומוטופיות ולכן $\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{f(0,0)\}\right)$ היא טריוויאלית.

לעומת זאת ב-$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, הלולאה שמקיפה את הראשית אינה הומוטופית ללולאה הקבועה, ולכן $\pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$ אינה טריוויאלית.[52]

הזכרנו כי אם החבורות היסודיות של זוג מרחבים אינן איזומורפיות אז המרחבים אינם הומאומורפיים, סתירה. ■

27 משפט זייפרד - ואן־קמפן

הגדרה: תהי $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_\alpha$ משפחה של חבורות. נגדיר את **חבורת המכפלה החופשית** של $\mathcal{G}$ להיות קבוצת ה"מילים" $\star_\alpha G_\alpha =: \{(g_1...g_m) \mid m \in \mathbb{N}\}$, כאשר לכל m טבעי, לכל $1 \leq i \leq m$ בוחרים $g_i \in G_\alpha \setminus \{e_{G_\alpha}\}$ כלשהו לאיזו $G_\alpha \in \mathcal{G}$, וכן לכל $1 \leq i \leq m-1$ האיברים g_i, g_{i+1} אינם באותה חבורה.

נסמן ב-e את המילה מאורך 0. היא תהיה איבר היחידה של $\star_\alpha G_\alpha$.

נגדיר על $\star_\alpha G_\alpha$ פעולת כפל צעד אחר צעד:

- עבור זוג מילים $(g), (h)$ שתיהן באורך 1:
  - אם g, h שייכים לאותה חבורה G_α, אז נבחן את $g \cdot h$:
    * אם $g \cdot h = e_{G_\alpha}$ נגדיר $(g) \cdot (h) = e$. (מילה באורך 0).
    * אם $g \cdot h \neq e_{G_\alpha}$ נגדיר $(g) \cdot (h) = (g \cdot h)$. (מילה באורך 1).
  - אם g, h לא שייכים לאותה חבורה, נגדיר $(g)(h) = (gh)$. (מילה באורך 2).
- עבור זוג מילים $(g_1...g_k), (h_1...h_l)$ באורכים כלשהם, נתחיל לבצע את התהליך שהסברנו לעיל על g_k, h_1, וכן הלאה עד שנסיים.

[52] ניתן להראות שלכל $x_0 \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $\pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}\right) \cong \pi_1\left(S^1\right) \cong \mathbb{Z}$.

הערה: קל לראות שקיים איבר יחידה, וכמו כן ההופכי של איבר $(g_1...g_m)$ כלשהו הוא $\left(g_m^{-1}...g_1^{-1}\right)$. כדי לוודא שזו אכן חבורה נותר להראות שפעולה זו אסוציאטיבית. ניתן לעשות זאת באמצעות התיחסות לכל איבר $(g_1...g_m)$ כפונקציה כלשהי, ולהסיק את הנדרש מאסוציאטיביות של הרכבת פונקציות. אבל לא נלמד זאת כאן.

דוגמאות:

1. **החבורה החופשית על שני יוצרים:** ניקח זוג חבורות $\langle a\rangle, \langle b\rangle$ להיות חבורות ציקליות אינסופיות, כלומר שני עותקים של $\mathbb{Z}$. אז המכפלה החופשית שלהן היא $\langle a\rangle \star \langle b\rangle = \left\langle e, a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\right\rangle = \{e, a^{n_1}b^{m_1}...a^{n_k}b^{m_k} | k\in\mathbb{N},\ n_i, m_i \in \mathbb{Z}\}$
2. ניקח זוג חבורות $\{1,a\}, \{1,b\}$ להיות שני עותקים של החבורה היחידה מגודל 2. אזי $\{0,a\}\star\{0,b\} = \{e,a,b,ab,ba,aba,bab,...\}$.

סימון: יהיו $H \le G$. נסמן ב-$N(H)$ את תת החבורה הנורמלית הקטנה ביותר של G המכילה את H.

הגדרה: יהיו G_1, G_2, L חבורות, ויהיו הומומורפיזמים $\varphi_1 : L \to G_1,\ \varphi_2 : L\to G_2$.

נגדיר יחס שקילות על $\varphi_1(L)\star\varphi_2(L) \le G_1 \star G_2$ על ידי $\varphi_1(l)\sim\varphi_2(l) \iff \varphi_1(l)(\varphi_2(l))^{-1} = e$ לכל $l \in L$. נסמן את אוסף האיברים הללו ב-$H \le G_1 \star G_2$.

נגדיר ונסמן את **המכפלה החופשית הממוזגת** של G_1, G_2 על ידי:

$$G_1 \star_L G_2 = {}^{G_1\star G_2}/_{N(H)}$$

טענה: בסימוני ההגדרה, קיימים שיכונים טבעיים $G_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} G_1\star_L G_2,\ G_2 \overset{i_2}{\hookrightarrow} G_1 \star_L G_2$.

תהי גם K חבורה כלשהי, כך שקיימים גם השיכונים $G_1 \xrightarrow{\psi_1} K,\ G_2 \xrightarrow{\psi_2} K$. אזי הדיאגרמה הבאה היא "pushout diagram":

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & G_1 \arrow[d, "i_1"] \\
G_2 \arrow[r, "i_2"'] & G_1 \star_L G_2
\end{tikzcd}$$

כלומר, אם $\phi : G_1 \star_L G_2 \to K$ הומומורפיזם, אז הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & G_1 \arrow[d, "i_1"'] \arrow[ddr, "\psi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, "\psi_2"'] & G_1 \star_L G_2 \arrow[dr, dotted, "\phi"] & \\
 & & K
\end{tikzcd}$$

הערה: אם $L=\{e\}$, אז $G_1\star_L G_2\cong G_1\star G_2$ וכן φ_1,φ_2 הומומורפיזמים טריוויאליים.

במקרה זה מתקבל ההומומורפיזם $\phi : G_1\star G_2\to K$ על ידי $(g_1...g_m)\mapsto(\psi_i(g_1)...\psi_i(g_m))$, כאשר לכל g_j, ההומומורפיזם ψ_i הוא המתאים לחבורה G_i המכילה את g_j, כאשר $i=1,2$ ו-$j=1,...,m$.

הערה: pushout diagram הוא מונח כללי מתורת הקטגוריות ולא נגדיר אותו כאן באופן פורמלי. לצרכים שלנו - בהקשר של מרחבים טופולוגיים וחבורות - קל לנחש מהי pushout diagram לפי הדוגמה שהראינו.

משפט: יהיו U,V זוג קבוצות פתוחות וקשירות מסילתית במרחב טופולוגי כלשהו, ונניח כי $U\cap V\neq\emptyset$ וגם הוא קשיר מסילתית.

קיימים השיכונים הטבעיים $U\cup V \overset{i_U}{\hookleftarrow} U \overset{j_U}{\hookleftarrow} U\cap V$ ו-$U\cup V \overset{i_V}{\hookleftarrow} V \overset{j_V}{\hookleftarrow} U\cap V$.

נניח שהדיאגרמה הבאה היא pushout diagram:

$$\begin{tikzcd}
U\cap V \arrow[r, "j_U"] \arrow[d, "j_V"'] & U \arrow[d, "i_U"] \\
V \arrow[r, "i_V"'] & U\cup V
\end{tikzcd}$$

אזי מתקיים כי $\pi_1(U\cup V)\cong\pi_1(V)\star_{\pi_1(U\cap V)}\pi_1(U)$.

כלומר, הדיאגרמה המתאימה של החבורות היסודיות גם היא pushout diagram:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U\cap V) \arrow[r, "j_{U*}"] \arrow[d, "j_{V*}"'] & \pi_1(U) \arrow[d, "i_{U*}"] \\
\pi_1(V) \arrow[r, "i_{V*}"'] & \pi_1(U\cup V)
\end{tikzcd}$$

כאשר ההעתקות $*$ הן הומומורפיזמים בין החבורות היסודיות המושרים מהשיכונים.

הוכחה חלקית: נתאר את מתווה ההוכחה למקרה הפרטי בו $U\cap V$ מרחב פשוט קשר. כלומר $\pi_1(U\cap V)\cong\{e\}$, ולכן $\pi_1(U)\star\pi_1(V)\cong\pi_1(U)\star_{\{e\}}\pi_1(V)$. כלומר מספיק להראות $\pi_1(U\cup V)\cong\pi_1(U)\star\pi_1(V)$.

נקבע $x_0\in U\cap V$. נסמן ב-$[\gamma]_U\in\pi_1(U,x_0)$ וב-$[\gamma]_V\in\pi_1(V,x_0)$ לולאות כלליות. בהתאם, נשים לב שאיבר כללי ב-$\pi_1(U,x_0)\star\pi_1(V,x_0)$ הוא מילה מהצורה $\left([\gamma_1]_{J_1}[\gamma_2]_{J_2}...[\gamma_k]_{J_k}\right)$, כאשר J_i הוא U או V.

נגדיר העתקה $\Phi:\pi_1(U,x_0)\star\pi_1(V,x_0)\to\pi_1(U\cap V,x_0)$, על ידי שרשור לולאות באופן הבא:

$$\left([\gamma_1]_{J_1}[\gamma_2]_{J_2}...[\gamma_k]_{J_k}\right)\mapsto[\gamma]_{J_1}\star[\gamma]_{J_2}\star...\star[\gamma]_{J_k}$$

קל לראות שהתמונה היא לולאה כלשהי ב-$\pi_1(U\cap V,x_0)$.

מתברר גם שההעתקה Φ היא הומומורפיזם חח"ע ועל.