משוואות דיפרנציאליות רגילות

.

מבוסס על הרצאות פרופ' יורם לסט ואליק עולמי (מתרגל)
בקורס "משוואות דיפרנציאליות רגילות" (80320)
האוניברסיטה העברית, סמסטר ב' 2015
להערות: $nachi.avraham@gmail.com$

נחי

תודה למי ששלח הערות ותיקונים: שחר אוריאל, נריה גוטשטיין, אלעד גולדפרב, רותם יערי, גל פורת, דוד שיפרוט

תוכן עניינים

1 מבוא

משוואה דיפרנציאלית היא משוואה הקושרת בין פונקציה לבין נגזרותיה.
משוואה דיפרנציאלית רגילה היא משוואה הקושרת בין פונקציה של משתנה יחיד לבין נגזרותיה.
בקורס זה נדון במשוואות דיפרנציאליות רגילות בלבד. משוואות דיפרנציאליות שאינן רגילות מכונות **משוואות דיפרנציאליות חלקיות**, והן משוואות הקושרות בין פונקציה בכמה משתנים לבין הנגזרות החלקיות שלה.

דוגמה: עבור $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כלשהי, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$ היא משוואה דיפרנציאלית חלקית.

עבור $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כלשהי, $\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x}=0$ היא משוואה דיפרנציאלית רגילה.

צורה כללית: משוואה דיפרנציאלית רגילה היא פונקציה כלשהי של $n+2$ משתנים שנסמן F, שהמשתנים שלה הם: משתנה ממשי x; פונקציה כלשהי f (שהיא פונקציה ממשית במשתנה x); n הנגזרות $f^{'},...,f^{(n)}$.

הצורה הכללית של משוואה כזאת היא:[1]

$$0=F\left(x,f\left(x\right),f^{'}\left(x\right),...,f^{(n-1)}\left(x\right),f^{(n)}\left(x\right)\right)$$

לרוב נדון במשוואות שניתן לבודד בהן את הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר. כלומר במשוואות שניתן לבטא $f^{(n)}\left(x\right)=F\left(x,f\left(x\right),...,f^{(n-1)}\left(x\right)\right)$.

הערה: נשים לב שצורה כללית זו אינה מגדירה בהכרח משוואה דיפרנציאלית יחידה. כלומר, ייתכנו משוואות דיפרנציאליות שונות שיש להן את אותה צורה כללית.

כך למשל $\left(f^{'}\left(x\right)\right)^2+xf^{'}\left(x\right)+4y=0$ היא משוואה דיפרנציאלית שהמשתנה שלה הוא $f^{'}\left(x\right)$, והיא ניתנת לביטוי בשני אופנים: $f^{'}\left(x\right)=\frac{-x\pm\sqrt{x^2-16f(f)}}{2}$.

המטרה המרכזית בקורס שלנו תהיה לנסות לאפיין לאלו משוואות קיים פתרון, לנסות למצוא את הפתרונות או לפחות למצוא מאפיינים שלהם, ולנסות לבדוק האם אלו כל הפתרונות.

[1] תמיד ניתן להעביר אגפים ולקבל שוויון עם 0 בצד אחד.

2 מינוח וסימונים

סימון: לצורך קיצור, נסמן $y=\phi\left(x\right)$. כלומר y יסמן פונקציה של x.

בהתאם, נכתוב משוואה דיפרנציאלית כללית בצורה $f\left(x,y,y^{'},...,y^{(n)}\right)=0$.

הגדרה: תהי $f\left(x,y^{'},...,y^{(n)}\right)=0$ משוואה דיפרנציאלית רגילה.

נאמר כי המשוואה היא **משוואה דיפרנציאלית לינארית**, אם f היא פונקציה לינארית במשתנים $y,y^{'},...,y^{(n)}$. במילים אחרות, היא משוואה מהצורה הכללית:

$$0=f\left(x,y^{'},...,y^{(n)}\right)=a_n\left(x\right)y^{(n)}+a_{n-1}\left(x\right)y^{(n-1)}+...+a_0\left(x\right)y+g\left(x\right)$$

עבור $g,a_0,...,a_n:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציות במשתנה x הקבועות מראש.

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית לינארית היא **הומוגנית** אם בסימון לעיל $g\left(x\right)=0$.

טרמינולוגיה: תהי $f\left(x,y^{'},...,y^{(n)}\right)=0$ משוואה דיפרנציאלית רגילה.

- **הסדר** של המשוואה הוא n.
- **פתרון** של המשוואה בקטע $\left(\alpha,\beta\right)\subset\mathbb{R}$, הוא פונקציה $\phi:\left(\alpha,\beta\right)\rightarrow\mathbb{R}$, המקיימת $f\left(x,\phi^{'}\left(x\right),...,\phi^{(n)}\left(x\right)\right)=0$.

הגדרה: תהי $f\left(x,y,y^{'},...,y^{(n)}\right)=0$ משוואה דיפרנציאלית כלשהי. נאמר כי יש לה **תנאי התחלה** (או **תנאי שפה)**, אם נתון ערכה של הפונקציות $y,y^{'},...,y^{(n)}$ בנקודה x_0 כלשהי.

חלק I
משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

בחלק זה נדון במשוואות שהסדר שלהן הוא 1. כלומר משוואות מהצורה $0=f\left(x,y,y^{'}\right)$.

3 משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון

דוגמה יסודית: הסוג הכי יסודי של משוואות מסוג זה (ושל משוואות דיפרנציאליות בכלל) הוא $y^{'}=h\left(x\right)$.

הפתרון של משוואות מסוג זה כבר ידוע לנו, והוא האינטגרל הלא־מסוים $y=\int^{x}h\left(t\right)dt+c$, שמוגדר עד כדי כל קבוע $c\in\mathbb{R}$. כמו כן ידוע כי זהו אוסף כל הפתרונות של משוואה זו.

הערה: הסימון $\int^{x}g\left(t\right)dt$ מתעלם מהגבול התחתון של האינטגרציה. אין בכך בעיה מהותית שכן הפתרון בין כה וכה מוגדר עד כדי קבוע, והבדל בין שני גבולות אינטגרציה תחתונים שונים הוא קבוע כלשהו. לכן אוסף הפתרונות לא משתנה כתלות בגבול האינטגרציה התחתון וניתן להתעלם ממנו.

הערה: נשים לב כי אם יש לנו תנאי התחלה $y\left(x_{0}\right)$, אז הפתרון נקבע ביחידות על ידי $c=y\left(x_{0}\right)$, שכן במקרה כזה מתקיים:

$$y\left(x_{0}\right)=\int_{x_{0}}^{x_{0}}h\left(t\right)dt+c=0+c=c$$

דוגמה: נקבע למשל $g\left(x\right)=\sin\left(2x\right)$. אוסף כל פתרונות המשוואה $y^{'}=g\left(x\right)$ הוא:

$$y=\int^{x}\sin\left(2t\right)dt=-\frac{1}{2}\cos\left(2x\right)+c$$

משפט: (**קיום ויחידות הפתרון של משוואות לינאריות מסדר ראשון**) יהיו $p\left(x\right),g\left(x\right)$ פונקציות רציפות על קטע פתוח $\left(\alpha,\beta\right)$, המכיל נקודה x_{0} כלשהי.

אזי לבעיית הערך ההתחלתי $y^{'}+p\left(x\right)y=g\left(x\right)$ קיים פתרון $y=\phi\left(x\right)$ יחיד על הקטע $\left(\alpha,\beta\right)$, המקיים את תנאי ההתחלה $y\left(x_{0}\right)=y_{0}$ עבור y_{0} כלשהו.

פתרון זה מתקבל באמצעות הנוסחה:

$$y=\frac{1}{\mu\left(x\right)}\left[\int^{x}\mu\left(t\right)g\left(t\right)dt+c\right]$$

כאשר $\mu\left(x\right)=\exp\left(\int^{x}p\left(t\right)dt\right)$.

פיתוח הפתרון: נפתח את הנוסחה במקרים פרטיים תחילה כדי להבין את הגישה, ולבסוף נראה את המקרה הכללי המופיע במשפט.

- **מקרה ראשון:** נניח תחילה כי $p(x) = a,\ g(x) = 0$. כלומר $y^{'} + ay = 0$.

  קיום: ניתן לנחש כי $y = ce^{-ax}$ הוא פתרון לכל $c \in \mathbb{R}$. אם נתון תנאי התחלה הפתרון נקבע באופן יחיד, שכן אם $y(x_0) = y_0$ תנאי התחלה, אז $y_0 = ce^{-ax_0}$ ומכאן ניתן לחלץ את c באופן יחיד.

  יחידות: נראה שכל הפתרונות הם מצורה זו. יהי y פתרון. אם $y = 0$ זהותית אז הוא מהצורה הנ"ל עבור $c = 0$. לכן נניח כי $y \neq 0$ באיזו נקודה.

  נשים לב כי y גזירה ולכן בפרט גם רציפה, ולכן קיים קטע בעל אורך חיובי שעל כולו $y \neq 0$. על קטע זה ניתן באמצעות העברת אגפים לכתוב את המשוואה $\frac{y^{'}}{y} = -a$. נשים לב כי $\frac{y^{'}}{y} = (\ln|y|)^{'}$, ולכן קיבלנו את המשוואה $(\ln|y|)^{'} = -a$. מכאן כי:

$$\ln|y| = \int^{x} (\ln|y(t)|)^{'}\, dt = \int^{x} (-a)\, dt = -at + c$$

  כעת אם נוציא אקספוננט נקבל $|y| = e^{-at+c} = e^{c}e^{-ax}$, ולכן עבור $\tilde{c} = \pm e^{c}$ קיבלנו את הצורה המבוקשת.

- **מקרה שני:** נניח כי $p(x) = a$ עם $g(x)$ כללית. כלומר $y^{'} + ay = g(x)$.

  קיום: תחילה נשים לב שמתקיים:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{ax}y) = e^{ax}y^{'} + ae^{ax}y = e^{ax}\left(y^{'} + ay\right) = e^{ax}g(x)$$

  כעת נבצע אינטגרציה ונקבל:

$$e^{ax}y = \int^{x} e^{at}g(t)\,dt + c$$

$$\Downarrow$$

$$y = e^{-ax}\left[\int^{x} e^{at}g(t)\,dt + c\right]$$

  וקיבלנו צורה כללית של פתרון.

  גם כאן עבור תנאי התחלה, ניתן לחץ את ערכו של c באופן יחיד מהמשוואה האחרונה.

  יחידות: נראה במקרה הכללי.

- **המקרה הכללי:** כעת נדון במשוואה $y^{'} + p(x)\,y = g(x)$ עבור $p(x), g(x)$ פונקציות רציפות כלשהן.

  קיום: כדי למצוא פתרון, תחילה נחפש פונקציה $\mu(x)$, שבדומה למקרה הקודם תקיים את השוויון:

$$\mu(x)\,g(x) = \mu(x)\left(y^{'} + p(x)\,y\right) = (\mu(x)\,y)^{'}$$

  שכן בשוויון זה ניתן לבצע אינטגרציה על שני הצדדים ולחלץ את הפתרון.

נשים לב כי $\left(\mu\left(x\right)y\right)^{'}=\mu\left(x\right)y^{'}+\mu^{'}\left(x\right)y$, ולכן נובע כי הדרישה היא:

$$\mu\left(x\right)\left(y^{'}+p\left(x\right)y\right)=\mu\left(x\right)y^{'}+\mu^{'}\left(x\right)y$$
$$\Downarrow$$
$$\mu\left(x\right)p\left(x\right)y=\mu^{'}\left(x\right)y$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\mu^{'}\left(x\right)}{\mu\left(x\right)}=p\left(x\right)$$

אבל $\frac{\mu^{'}\left(x\right)}{\mu\left(x\right)}=p\left(x\right)$ $=\left(\ln\left|\mu\left(x\right)\right|\right)^{'}$, ולכן נקבל כי $\ln\left|\mu\left(x\right)\right|=\int^{x}p\left(t\right)dt$,
ומכאן כי $\mu\left(x\right)=\exp\left(\int^{x}p\left(t\right)dt\right)$ היא הפונקציה שחיפשנו.
נשים לב כי רציפות $p\left(x\right)$ מבטיחה לנו כי $\mu\left(x\right)$ מוגדרת, וכן מהיות $\mu\left(x\right)$ אקספוננט נובע כי היא איננה מתאפסת.
כעת נוכל להסיק כי:

$$\left(\mu\left(x\right)y\right)^{'}=\mu\left(x\right)g\left(x\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\mu\left(x\right)y=\int^{x}\mu\left(t\right)g\left(t\right)dt+c$$
$$\Downarrow$$
$$y=\frac{1}{\mu\left(x\right)}\left[\int^{x}\mu\left(t\right)g\left(t\right)dt+c\right]$$

כאשר רציפות $g\left(x\right)$ מבטיחה לנו שבמעבר הראשון בו ביצענו אינטגרציה הפונקציה $\mu\left(x\right)$ מוגדרת וגזירה.
גם כאן עבור תנאי התחלה, ניתן לחלץ את ערכו של c מתוך המשוואה האחרונה.
יחידות: מהחישוב שעשינו ניתן לראות שמספיק להראות את יחידות $\mu\left(x\right)$ עד כדי כפל בקבוע. יחידות זו נובעת למשל מהמשוואה $\left(\ln\left|\mu\left(x\right)\right|\right)^{'}=p\left(x\right)$. ■

4 משוואות דיפרנציאליות לא לינאריות מסדר ראשון

רקע: נדון במשוואות מסדר ראשון מהצורה $y^{'}=f\left(x,y\right)$, עבור f רציפה אך לאו דווקא לינארית ב־y.

נשים לב שבסוג זה של משוואות קיימים גם מקרי־ביניים שבהם קיים פתרון, אך הוא נתון באמצעות **נוסחה בלתי מפורשת**, כלומר נתון קשר $\psi\left(x,y\right)=0$ שבו לא ניתן לבודד את y ולהציג אותו כפונקציה מפורשת של x.

דוגמה: בהמשך נראה שכל הפתרונות y של המשוואה הלא־לינארית $y^{'}=\frac{-x}{y}$ מקיימים את הקשר $x^{2}+y^{2}=c^{2}$. קל לגזור את הקשר הזה ולוודא שאכן מתקבל פתרון, אולם למעשה מתקבלת מכך אסופה של פתרונות. ברור כי $y=\pm\sqrt{c^{2}-x^{2}}$ הם זוג פתרונות, וכמו כן לכל $-c^{2}<t<c^{2}$ מתקבל גם פתרון מהצורה $y=\begin{cases}-\sqrt{c^{2}-x^{2}} & -c^{2}<x\leq t\\ \sqrt{c^{2}-x^{2}} & t<x<c^{2}\end{cases}$, או כל קומבינציה רציפה למקוטעין אחרת של הפונקציות הללו.

נשים לב שבהינתן ערך התחלתי $y\left(x_{0}\right)=y_{0}$, קל לחלץ ביחידות את הפתרון מתוך המשוואה. כלומר למרות שאוסף הפתרונות אינו מפורש, בהינתן ערך התחלתי ניתן למצוא פתרון יחיד מפורש.

משפט הקיום והיחידות לפתרון משוואות מסדר ראשון: תהי $f:(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח עוד כי f היא K-ליפשיצית במשתנה השני,[2] ותהי גם $(x_0,y_0)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$.

אזי קיים $h>0$ מספיק קטן שעבורו $(x_0-h,x_0+h)\subset(\alpha,\beta)$, וגם קיים פתרון יחיד $y=\phi:(x_0-h,x_0+h)\to\mathbb{R}$ למשוואה $y^{'}=f(x,y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

הערות: הוכחת המשפט מופיעה בנספח בסוף יחידה זו.

1. המשפט מבטיח תנאי מספיק לקיום פתרון מקומי, אולם גם אם לא מתקיימים תנאי המשפט ייתכן פתרון יחיד. כלומר התנאי במשפט מספיק אך לא הכרחי.
2. במקרה בו $f,\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות, אנו עומדים בתנאי המשפט, שכן במקרה זה f ליפשיצית במשתנה השני y:

לכל $x\in(\alpha,\beta)$ ולכל $y_1,y_2\in(\gamma,\delta)$, נבחר מלבן סגור $A\subset(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ המכיל את $(x,y_1),(x,y_2)$, ונקבל שעל A מתקיים:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\int\limits_{y_1}^{y_2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\right|\le\sup_{(x,y)\in A}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\}\cdot|y_1-y_2|$$

כלומר מרציפות $\frac{\partial f}{\partial y}$ על המלבן הסגור A נובע כי $K:=\sup\limits_{(x,y)\in A}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\}<\infty$, ולכן f היא K-ליפשיצית.

דוגמה: נתבונן במשוואה $y^{'}=y^{1/3}$ על הקטע $(0,\infty)$, עם תנאי ההתחלה $y(0)=0$.

נשים לב כי $y=0$ הוא פתרון של משוואה זו. כמו כן $y=\left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$ הוא פתרון של משוואה זו, שכן:

$$y^{'}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}=\left(\frac{2}{3}x\right)^{1/2}=\left(\left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}\right)^{1/3}=y^{1/3}$$

כאשר השוויון השני נובע לפי $\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\cdot\frac{3}{2}=\left(\frac{8}{27}\right)^{1/2}\left(\frac{9}{4}\right)^{1/2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$.

למעשה אוסף כל הפתרונות של משוואה זו הוא כל הפונקציות מהצורה:

$$y=\begin{cases}0 & 0\le x<x_0\\ \pm\left[\frac{2}{3}(x-x_0)\right]^{3/2} & x>x_0\end{cases}$$

עבור כל $0\le x_0\le\infty$.

ניתן לראות שכל פונקציה כנ"ל היא פתרון, כי עבור $0\le x<x_0$ מתקיים $y^{1/3}=0$ ואכן ברור גם כי $y^{'}=0$, ועבור $x>x_0$ מתקיים:

$$y^{'}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\cdot\frac{3}{2}(x-x_0)^{1/2}=\left(\frac{2}{3}(x-x_0)\right)^{1/2}=\left(\left(\frac{2}{3}(x-x_0)\right)^{3/2}\right)^{1/3}$$

[2] כלומר: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<K\cdot|y_1-y_2|$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$ ולכל $y_1,y_2\in(\gamma,\delta)$.

4.1 פתרון בהפרדת משתנים

נתבונן במשוואה מהצורה $M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0$ עבור M,N כלשהן.
נדון במקרה הפרטי $M(x,y)=M(x)\,,\,N(x,y)=N(y)$,[3] וכן גם נניח כי לפונקציות $M(x)\,,N(y)$ קיימות פונקציות קדומות.
אם כך ניתן לכתוב את המשוואה $M(x)+N(y)\frac{dy}{dx}=0$. באופן פורמלי "נכפול" ב־dx את המשוואה, ונקבל $M(x)\,dx+N(y)\,dy=0$. נבצע אינטגרציה dx על המשוואה ונקבל:

$$\int^{x} M(t)\,dt+\int^{x} N(t)\,y^{'}(t)\,dt=\int^{x} M(t)\,dt+\int^{y} N(s)\,ds=c$$

כאשר השוויון הראשון נובע ממשפט שינוי משתנה, כלומר מהצבה: מציבים $s=y(t)$ כך שמתקיים $ds=y^{'}dt$, ולכן נובע כי $\int^{x} N(s)\,y^{'}(s)\,ds=\int^{y} N(s)\,ds$.
לפיכך מתקבל קשר בין y לבין x, שניתן לנסות לחלץ ממנו ביטוי של y כפונקציה של x.
נשים לב שאם נתון תנאי התחלה $y(x_0)=y_0$, אז c נקבע חד־ערכית. שכן אם נסמן H_1,H_2 כפונקציות קדומות של M,N בהתאמה, אז מתקיים השוויון $H_1(x_0)+H_2(y_0)=c$.

דוגמה: $y^{'}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$ עם תנאי התחלה $y(0)=-1$.

כדי להשתמש בטכניקה של הפרדת משתנים נכתוב $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$, ובהעברת אגפים נקבל:

$$\begin{gathered}2(y-1)\,dy=\left(3x^2+4x+2\right)dx\\ \Downarrow\\ y^2-2y=x^3+2x^2+2x+c\\ \Downarrow\\ y^2-2y+1=x^3+2x^2+2x+1+c\\ \Downarrow\\ (y-1)^2=x^3+2x^2+2x+1+c\\ \Downarrow\\ y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+1+c}\end{gathered}$$

מתנאי ההתחלה $y(0)=-1$ נובע שבהכרח הפתרון הוא הענף השלילי.
כמו כן כן נובע כי $-1=1-\sqrt{+1+c}$ ולכן $c=3$. כלומר הפתרון הוא:

$$y=1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$$

4.2 משוואות מדויקות

סימון נגזרות: (סימוני d,∂) נניח כי $\psi(x,y)$ היא פונקציה גזירה. כידוע, ניתן לגזור את ψ לפי x ולפי y. את הנגזרות החלקיות הללו נסמן $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y)\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y)$ בהתאמה.

אם נניח גם כי y הוא פונקציה של x, אז ניתן להתייחס לפונקציה ψ כולה כפונקציה של x וניתן לגזור אותה לפי x. לא כנגזרת חלקית, אלא כנגזרת סטנדרטית של

[3] כלומר, M פונקציה של x בלבד וכן N פונקציה התלויה ב־x באמצעות y בלבד.

פונקציה בשני משתנים. כלומר, אם נסמן $g\left(x\right)=\psi\left(x,y\right)$ (כאשר $y=y\left(x\right)$) אז g גזירה, ומקיימת כידוע $g^{'}\left(x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(x,y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\right)y^{'}$. את הנגזרת הזו נסמן $\frac{d}{dx}\psi\left(x,y\right)$.

מבוא: תהי $\psi\left(x,y\right)=c$ פונקציה גזירה ברציפות הקושרת בין x לבין y (כאשר y הוא פונקציה של x). נובע מכלל השרשרת ומכללי גזירת פונקציות $\mathbb{R}^{2}\rightarrow\mathbb{R}$, כי הנגזרת מקיימת:

$$\frac{d}{dx}\psi\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(x,y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\right)\frac{dy}{dx}=0$$

נתעלם לרגע מהעובדה שהפונקציה ψ הייתה נתונה מראש, ונתבונן בשוויון האחרון של הנגזרת כבמשוואה דיפרנציאלית כללית, מהצורה:

$$M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)y^{'}=0$$

כלומר נתייחס לפונקציות $M=\frac{\partial}{\partial x}\psi,\,N=\frac{\partial}{\partial y}\psi$ כאל נעלמים, ולפיכך השוויון האחרון הוא משוואה דיפרנציאלית.

ברור כי אם נצליח מסיבה כלשהי לנחש את ψ, נקבל שהיא פתרון למשוואה. אם כך נדון בסוג מסוים של משוואות מהצורה הנ"ל, שעבורן נראה שיטה לפתרון.

הגדרה: תהי $M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)y^{'}=0$ משוואה על המלבן $R=\left(\alpha,\beta\right)\times\left(\gamma,\delta\right)\subset\mathbb{R}^{2}$. אומרים כי היא **משוואה מדויקת** אם קיים לה פתרון מהצורה $\psi\left(x,y\right)=c$. כלומר אם מתקיים כי $M\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(x,y\right),\,N\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\right)$.

משוואה מדויקת ניתן לפתור באופן שנפתח בהוכחת המשפט להלן.

משפט: משוואה $M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)y^{'}=0$ המוגדרת בתחום מלבני $\left(\alpha,\beta\right)\times\left(\gamma,\delta\right)\subset\mathbb{R}^{2}$ היא משוואה מדויקת, אם ורק אם מתקיים $\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)$.

הוכחה: (כיוון ראשון) נניח כי המשוואה מדויקת. לכן מתקיימים השוויונים:

$$\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(x,y\right)=\frac{\partial^{2}}{\partial y\partial x}\psi\left(x,y\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\right)=\frac{\partial^{2}}{\partial x\partial y}\psi\left(x,y\right)$$

ידוע כי בכל נקודה $\left(x,y\right)$ שבה הנגזרות השניות רציפות, אז הן מתחלפות. כלומר סדר הגזירה לא משנה, ולכן $\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)$, כנדרש.

(כיוון שני) נניח כי מתקיים השוויון $\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)$. נבנה פונקציה $\psi\left(x,y\right)$ שתהווה פתרון למשוואה. נגדיר:

$$\psi\left(x,y\right)=\int^{x}M\left(t,y\right)dt+h\left(y\right)$$

כאשר $h\left(y\right)$ היא פונקציה כלשהי שאינה תלויה ב־x אלא רק דרך y. נגזור לפי y ונקבל:

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\int^{x}M\left(t,y\right)dt+h^{'}\left(y\right)=\int^{x}\frac{\partial}{\partial y}M\left(t,y\right)dt+h^{'}\left(y\right)$$

כאשר השוויון השני נובע מכך שאנו מניחים שניתן להחליף סדר של גזירה ואינטגרציה. נסיק כי:

$$h^{'}\left(y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\right)-\int^{x}\frac{\partial}{\partial y}M\left(t,y\right)dt=N\left(x,y\right)-\int^{x}\frac{\partial}{\partial y}M\left(t,y\right)dt$$

ולכן נובע:

$$\frac{\partial}{\partial x}h^{'}\left(y\right)=\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)-\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)=0$$

כאשר השוויון האחרון הוא מההנחה $\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)$.

אם $\frac{\partial}{\partial x}h^{'}\left(y\right)=0$, משמעות הדבר היא כי $h^{'}\left(y\right)$ אינה תלויה ב־x כלל, ולכן ניתן לבצע אינטגרציה לפי y בלבד ולקבל:

$$h\left(y\right)=\int^{y}h^{'}\left(t\right)dt$$

נציב את כל השוויונים ונקבל את הפתרון שמגדיר לנו את המשוואה כמדויקת:

$$\psi\left(x,y\right)=\int^{x}M\left(t,y\right)dt+h\left(y\right)=\int^{x}M\left(t,y\right)dt+\int^{y}h^{'}\left(s\right)ds=$$

$$=\int^{x}M\left(t,y\right)dt+\int^{y}\left[N\left(x,s\right)-\int^{x}\frac{\partial}{\partial s}M\left(t,s\right)\right]ds$$

■

הערה: נוודא שאכן $\psi\left(x,y\right)$ שמצאנו בכיוון השני של הוכחת המשפט אכן פותרת את המשוואה $M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)y^{'}=0$. נחשב את נגזרותיה החלקיות:

$$\tfrac{\partial}{\partial x}\psi\left(x,y\right)=M\left(x,y\right)+\tfrac{\partial}{\partial x}\int^{y}\left[N\left(x,s\right)-\int^{x}\tfrac{\partial}{\partial s}M\left(t,s\right)\right]ds=$$

$$=M\left(x,y\right)+\int^{y}\left[\tfrac{\partial}{\partial x}N\left(x,s\right)-\tfrac{\partial}{\partial s}M\left(t,s\right)\right]ds=M\left(x,y\right)$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך שמההנחה $\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)$ נובע כי האינטגרנד הוא אפס. כמו כן:

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\int^{x}M\left(t,y\right)dt+N\left(x,s\right)-\int^{x}\frac{\partial}{\partial s}M\left(t,s\right)=$$

$$=\int^{x}\frac{\partial}{\partial y}M\left(t,y\right)dt+N\left(x,s\right)-\int^{x}\frac{\partial}{\partial s}M\left(t,s\right)=N\left(x,s\right)$$

דוגמה: $y\cos x+2xe^{y}+\left(\sin x+x^{2}e^{y}-1\right)y^{'}=0$.

ניכר שבמשוואה זו לא ניתן להפריד את המשתנים, כלומר לא ניתן להציג אותה בצורה $M\left(x\right)+N\left(y\right)y^{'}=0$, ולכן נשתמש במשפט כדי להראות כי זו משוואה מדויקת, ולמצוא את הפתרון באופן בו עשינו זאת במשפט (בכיוון השני).

נסמן:

$$M\left(x,y\right)=y\cos x+2xe^{y}$$

$$N\left(x,y\right)=\sin x+x^{2}e^{y}-1$$

מתקיים כי:

$$\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)=\cos x+2xe^{y}=\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)$$

כלומר זו משוואה מדויקת, ולכן באופן שפיתחנו את הפתרון $\psi\left(x,y\right)$ במשפט נוכל לפתח אותו כאן:

$$\psi\left(x,y\right)=\int^{x}M\left(t,y\right)dt+h\left(y\right)=y\sin x+x^{2}e^{y}+h\left(y\right)$$

ולכן נובע:

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\right)=\sin x+x^{2}e^{y}+h^{'}\left(y\right)$$

כדי למצוא את $h\left(y\right)$ נשים לב כי סימנו:

$$N\left(x,y\right)=\sin x+x^{2}e^{y}-1$$

ולכן:

$$\begin{gathered}h^{'}\left(y\right)=\left(\sin x+x^{2}e^{y}-1\right)-\left(\sin x+x^{2}e^{y}\right)=-1\\ \Downarrow\\ h\left(y\right)=-y\end{gathered}$$

[נשים לב שהגרירה האחרונה נובעת מאינטגרציה, ולכן באופן כללי $h\left(y\right)=-y+c$, אולם איננו מחפשים את כל פתרונות $h\left(y\right)$ אלא רק פתרון כלשהו.]

אם כך נקבל בסך הכל את הפתרון:

$$\psi\left(x,y\right)=y\sin x+x^{2}e^{y}-y=c$$

4.3 גורם אינטגרציה

נניח כי המשוואה $M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)\frac{dy}{dx}=0$ אינה משוואה מדויקת. לצורך הפשטות נכתוב את המשוואה $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$.

נניח שקיימת פונקציה $\mu\left(x,y\right)$ (**גורם אינטגרציה**) שאינה אפס על תחום מסוים, כך שהמשוואה $\mu\left(x,y\right)\cdot\left(Mdx+Ndy\right)=0$ על התחום הנ"ל הופכת למשוואה מדויקת.
אזי ניתן לפתור (אולי באופן סתום) את המשוואה המוכפלת ב־μ כפי שפותרים משוואה מדויקת, והפתרון $\psi\left(x,y\right)=c$ המתקבל הוא פתרון גם של המשוואה המקורית.
נפתח את הפתרון המתקבל לאחר הכפלה בגורם האינטגרציה:
כדי שהמשוואה תהיה מדויקת, בהתאם למשפט שהראינו, יש לדרוש:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu M\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu N\right)=0\\ \Downarrow\\ M\frac{\partial}{\partial y}\mu+\mu\frac{\partial}{\partial y}M-N\frac{\partial}{\partial x}\mu-\mu\frac{\partial}{\partial x}N=0\\ \Downarrow\\ M\frac{\partial}{\partial y}\mu-N\frac{\partial}{\partial x}\mu+\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}M-\frac{\partial}{\partial x}N\right)=0\end{gathered}$$

כאשר המעבר הראשון הוא גזירה של מכפלה לפי כלל לייבניץ.
נשים לב שמתקבלת משוואה דיפרנציאלית חלקית ולא רגילה, שכן היא מערבת שתי נגזרות חלקיות שונות.

דוגמה: נתבונן במשוואה $\left(y^2+xy\right)dx-x^2dy=0$. נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right)=2y+x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)=-2x$$

מכאן שהמשוואה לא מדויקת. נבחר $\mu\left(x,y\right)=\left(xy^2\right)^{-1}$, ונקבל כי:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu M\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=-\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu N\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{1}{y^2}$$

מכאן כי $\mu\left(Mdx+Ndy\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$ היא משוואה מדויקת.
ניתן לפתור ולמצוא את הפתרון הסתום $\ln|x|+\frac{x}{y}=c$ על תחום בו $x,y\neq 0$.

4.3.1 מציאת גורם אינטגרציה במקרים מיוחדים

נדון במקרים בהם קיים גורם אינטגרציה מהצורה $\mu\left(x,y\right)=\mu\left(x\right)$ או $\mu\left(x,y\right)=\mu\left(y\right)$.
נפתח את המקרה הראשון, והמקרה השני יושאר כתרגיל.
במקרה $\mu\left(x,y\right)=\mu\left(x\right)$ מתקיים כי $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu M\right)=\mu\frac{\partial}{\partial y}M$, לכן כדי לקבל מצב בו המשוואה מדויקת צריך להתקיים:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu M\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu N\right)\\ \Downarrow\\ \mu\frac{\partial}{\partial y}M=\mu\frac{\partial}{\partial x}N+N\frac{\partial}{\partial x}\mu\\ \Downarrow\\ \frac{\partial}{\partial x}\mu=\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}M-\frac{\partial}{\partial x}N\right)\frac{1}{N}\end{gathered}$$

מההנחה כי $\mu(x,y)=\mu(x)$, מהמשוואה האחרונה נובע כי גם $N(x,y)=N(x)$.
כלומר, הפונקציה $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial}{\partial y}M-\frac{\partial}{\partial x}N\right)\mu$ היא פונקציה של x בלבד אם ורק אם המשוואה האחרונה היא משוואה לינארית מסדר ראשון ולכן ניתנת לפתרון.

4.4 משוואות בעלות קשר הומוגני

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ נקראת **הומוגנית**, אם הפונקציה $F(x,y)$ היא פונקציה של y/x. כלומר היא מהצורה $F\left(\frac{y}{x}\right)$.

דוגמה: נשים לב כי $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+2xy}{x^2}$ היא משוואה הומוגנית, שכן ברור כי $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)$.

פתרון למשוואה הומוגנית: נסמן $v=\frac{y}{x}$ ואז $F(v)=\frac{dy}{dx}=\frac{d(xv)}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$. בהעברת אגפים נקבל $\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}(F(v)-v)$, ונכתוב פורמלית $\frac{1}{x}dx=\frac{1}{F(v)-v}dv$.

נשים לב שבצורה האחרונה מתקבלת הפרדת משתנים, ולכן המשוואה פתירה. כלומר ניתן למצוא את v כפונקציה של x, ומכאן לקבל את y על ידי $y=xv$.

דוגמה: $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)$. נסמן $v=\frac{y}{x}$ ונסיק:

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{d(xv)}{dx}=\frac{dy}{dx}=v^2+2v$$
$$\Downarrow$$
$$x\frac{dv}{dx}=v^2+v$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+1}\right)dv=\frac{1}{x}dx$$

כעת נבצע אינטגרציה ונקבל:

$$\ln|v|-\ln|v+1|=\ln|x|+\ln|c|$$
$$\Downarrow$$
$$\ln\left|\frac{v}{v+1}\right|=\ln|cx|$$
$$\Downarrow$$
$$cx=\frac{v}{v+1}=\frac{y/x}{y/x+1}=\frac{y}{y+x}$$
$$\Downarrow$$
$$y=\frac{cx^2}{1-cx}$$

4.5 נספח: משפט הקיום והיחידות לפתרון משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון (שיטת האיטרציות של פיקארד)

משפט: תהי $f:(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח עוד כי f היא K־ליפשיצית במשתנה השני,[4] ותהי גם $(x_0,y_0)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ קבועה כלשהי המקיימת $y(x_0)=y_0$.

אזי קיים $h>0$ מספיק קטן שעבורו $(x_0-h,x_0+h)\subset(\alpha,\beta)$, וגם קיים פתרון יחיד $y=\phi:(x_0-h,x_0+h)\to\mathbb{R}$ לבעיית הערך ההתחלתי $y^{'}=f(x,y)$.

[4] כלומר: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<K\cdot|y_1-y_2|$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$ ולכל $y_1,y_2\in(\gamma,\delta)$.

הוכחת הקיום: יהי $D=[x_0\pm a]\times[y_0\pm b]$ מלבן סגור כלשהו בתוך תחום ההגדרה של f. הנחנו כי f רציפה בפרט על D, ולכן קיים M קבוע המקיים $|f(x,y)|\le M$ לכל $x,y\in D$. נסמן $h:=\min\{a,{}^{b}/_{M}\}$.

נשים לב שכל פתרון y של המשוואה $y^{'}=f(x,y)$ המקיים את תנאי ההתחלה, מקיים גם $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt$. לכן נבנה פתרון מהצורה הזאת, ונראה לבסוף שהפתרון שבנינו מקיים את המאפיינים שבמשפט.

נגדיר באופן אינדוקטיבי סדרת פונקציות $\{y_n\}_n$. עבור $n=1$ נגדיר:

$$y_1(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(t,y_0)\,dt$$

ובהנחה כי y_{n-1} מוגדרת, נגדיר:

$$y_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))\,dt$$

לצורך שלמות ההגדרה, נגדיר $y_0(x)=y_0$ (פונקציה קבועה).

נראה כי סדרה זו מתכנסת לגבול רציף וגזיר בסביבה כלשהי של x_0, וכי גבול זה מהווה פתרון של המשוואה $y^{'}=f(x,y)$ יחד עם תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

למה 1: לכל $|x-x_0|\le h$, לכל n מתקיים $|y_n(x)-y_0|\le b$.

הוכחה: נראה זאת באינדוקציה. נשים לב כי אם $|x-x_0|\le h$ וגם $|y(x)-y_0|\le b$, אז $(x,y(x))\in D$ ולכן $|f(x,y(x))|\le M$.

עבור $n=1$ מתקיים כי $|y_1(x)-y_0|\le b$, ולכן לכל $|x-x_0|\le h$ מתקיים:

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}f(t,y_0)\,dt\right|\le\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_0)\,dt|\le M|x-x_0|\le M\cdot h\le b$$

נניח את הלמה עבור $n-1$, ולכן נובע כי $|y_{n-1}(x)-y_0|\le b$, ולכן לכל $|x-x_0|\le h$ מתקיים באופן דומה:

$$|y_n(x)-y_0|\le\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_{n-1}(t))|\,dt\le M|x-x_0|\le b$$

■

למה 2: לכל $|x-x_0|\le h$, לכל n מתקיים $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\frac{MK^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n$.

הוכחה: נראה זאת באינדוקציה. עבור $n=1$ מתקיים:

$$|y_1(x)-y_0|\le\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_0)|\,dt\le M|x-x_0|$$

נניח את הלמה עבור $n-1$, כלומר נניח:

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| = \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}|x - x_0|^{n-1}$$

ונקבל כי:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))| \, dt \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} K |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \, dt \leq \int_{x_0}^{x} K \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}|t - x_0|^{n-1} \, dt =$$

$$= \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} |t - x_0|^{n-1} \, dt = \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n}|x - x_0|^n = \frac{MK^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n$$

כאשר האי־שוויון הראשון ברור, האי־שוויון השני נובע מ־K־ליפשיציות של f, האי־שוויון השלישי נובע מהנחת האינדוקציה, ושאר השוויונים הם חישובים ברורים. ■

למה 3: הטור $y_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(y_j(x) - y_{j-1}(x))$ מתכנס במידה שווה בקטע $[x_0 \pm h]$.

הוכחה: מהחסם שהראינו בלמה 2 נובע:

$$y_0 + \sum_{j=1}^{n}(y_j(x) - y_{j-1}(x)) \leq y_0 + \sum_{j=1}^{n}|y_j(x) - y_{j-1}(x)| \leq$$

$$\leq \frac{MK^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n \leq \frac{MK^{n-1}}{n!}h^n$$

וחסם זה הוא במידה שווה על כל $[x_0 \pm h]$.

קל לראות שאם $n \to \infty$ הביטוי הנ"ל חסום, לכן הטור מתכנס במידה שווה. ■

מסקנה: לכל n מתקיים $y_n(x) = y_0 + \sum_{j=1}^{n}(y_j(x) - y_{j-1}(x))$ כסכום טלסקופי.
כלומר, סדרת הפונקציות $\{y_n(x)\}_n$ היא סדרת הסכומים החלקיים של הטור הנ"ל, ולכן היא בהכרח מתכנסת במידה שווה.
אם כך נוכל להגדיר את הפונקציה הגבולית:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

ומתקבלת פונקציה רציפה, כגבול במידה שווה של פונקציות רציפות.

הערה: נשים לב שקיבלנו גם חסם על קצב ההתכנסות $y_n(x) \to y(x)$, שכן:

$$|y(x) - y_n(x)| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} (y_j(x) - y_{j-1}(x)) \right| \le \sum_{j=n+1}^{\infty} |y_j(x) - y_{j-1}(x)| \le$$

$$\le \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{MK^{j-1}}{j!} |x - x_0|^j \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{MK^{j-1}}{j!} h := \mathcal{E}_n$$

נראה כי הפונקציה $y(x)$ שהגדרנו פותרת את בעיית הערך ההתחלתי $y^{'} = f(x,y)$.
תחילה נשים לב שמתקיים:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך שמתקיים:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))|\, dt \le$$

$$\le K \int_{x_0}^{x} |y_n(t) - y(t)|\, dt \le K \int_{x_0}^{x} \mathcal{E}_n dt = K\mathcal{E}_n |x - x_0| \le K\mathcal{E}_n h \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

כאשר האי־שוויון באמצע נובע מכך ש־f היא K-ליפשיצית במשתנה y.
כעת נגזור לפי x את שני צידי השוויון הקודם שהתקבל, ונסיק:

$$y^{'}(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right) = f(x, y(x))$$

כפי שנובע מהמשפט היסודי של החדו"א. ■

הוכחת היחידות: נניח כי $u(x)$ פתרון נוסף של בעיית הערך ההתחלתי $y^{'} = f(x,y)$ עם התנאי $y(x_0) = y_0$. כלומר מתקיים $u^{'} = f(x,u)$ וכן $u(x_0) = y_0$.

יהי $\tilde{h} > 0$ מספיק קטן כך שלכל $|x - x_0| \le \tilde{h}$ מתקיים $|u(x) - y_0| \le b$. נראה שעל הקטע $[x_0 \pm h]$ מתקיים $u(x) = y(x)$.

נשים לב שמאינטגרציה של המשוואה מתקיים $u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$.

למה: לכל $|x - x_0| \le \tilde{h}$, לכל n מתקיים $|u(x) - y_n(x)| \le \frac{K^n b |x-x_0|^n}{n!}$, כאשר b הוא הקבוע המקיים שלכל $|x - x_0| \le \tilde{h}$ מתקיים גם $|y - y_0| \le b$.

הוכחה: נראה זאת באינדוקציה. עבור $n=1$ מתקיים:

$$|u(x)-y_1(x)|=\left|y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt-y_0-\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,dt\right|\leq$$

$$\leq\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,u(t))-f(t,y_0)|\,dt\leq K\int\limits_{x_0}^{x}|u(t)-y_0|\,dt\leq Kb\,|x-x_0|$$

נניח את הטענה עבור $n-1$, כלומר נניח:

$$|u(x)-y_{n-1}(x)|\leq\frac{K^{n-1}b\,|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

ונסיק באופן דומה כי:

$$|u(x)-y_n(x)|\leq\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,u(t))-f(t,y_{n-1}t)|\leq$$

$$\leq K\int\limits_{x_0}^{x}|u(t)-y_{n-1}(t)|\,dt\leq K\int\limits_{x_0}^{x}\frac{K^{n-1}b\,|t-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}dt=$$

$$=\frac{K^n b}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}|t-x_0|^{n-1}\,dt=\frac{K^n b}{(n-1)!}\frac{|x-x_0|^n}{n}=\frac{K^n b\,|x-x_0|^n}{n!}$$

■

כעת נובע שמתקיים $0\leq|u(x)-y_n(x)|\leq\frac{K^n b|x-x_0|^n}{n!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, כלומר בהכרח $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=y(x)$. ■

דוגמה: נתבונן במשוואה $y^{'}=ay$ עם תנאי ההתחלה $y(0)=1$. ברור שהפונקציה $y=e^{ax}$ היא פתרון. נחשב את הפתרון בשיטת האיטרציות:

$$y_0(x)=y_0=1$$
$$y_1(x)=y_0+\int_0^x a\,dt=1+ax$$
$$y_2(x)=y_0+\int_0^x a(1+at)\,dt=1+\int_0^x a\,dt+\int_0^x a^2t\,dt=1+ax+\frac{a^2x^2}{2}$$

ובאינדוקציה:

$$y_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{a^jx^j}{j!}$$

ומפיתוח טיילור של האקספוננט נובע:

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^jx^j}{j!}=e^{ax}$$

חלק II
משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

בחלק זה נדון במשוואות שהסדר שלהן הוא 2. כלומר משוואות מהצורה $f\left(x,y,y^{'},y^{''}\right)=0$.
נטפל רק במשוואות בהן ניתן לבודד את $y^{''}$, כלומר משוואות מהצורה $y^{''}=f\left(x,y,y^{'}\right)$.

דוגמה יסודית: הסוג הכי יסודי של משוואות מסוג כזה הוא $y^{''}=g\left(x\right)$. במקרה כזה קל לראות שמתקבל פתרון על ידי:

$$y=c_{1}+c_{2}x+\int^{x}\left[\int^{t}g\left(s\right)ds\right]dt$$

עבור $c_{1},c_{2}\in\mathbb{R}$ כלשהם.

הערה: ניכר גם אם נתון הערך של y בשתי נקודות זה לא מספיק כדי לקבוע פתרון יחיד.
למשל, לכל $c\in\mathbb{R}$ הפונקציה $y=c\cdot\sin x$ מהווה פתרון של בעיית הערכים ההתחלתיים $y^{''}=y$ עם $y\left(0\right)=0,\;y\left(\pi\right)=0$.
מיד ננסח משפט שיראה אלו שני ערכים נדרשים כדי לקבוע פתרון יחיד.

הערה: יש מקרים בהם הפונקציה $f\left(x,y,y^{'}\right)$ לא תלויה בכל שלושת המשתנים שלה, ובהם מתקבלות משוואות בעלות פתרון פשוט:

1. במקרה של $y^{''}=f\left(x,y^{'}\right)$ ההצבה $v=y^{'}$ נותנת משוואה מסדר ראשון $v^{'}=f\left(x,v\right)$. לאחר הפתרון של משוואה זו, הפתרון למשוואה מקורית מתקבל על ידי אינטגרציה של המשוואה $v=y^{'}$.
2. במקרה של $y^{''}=f\left(y,y^{'}\right)$ ניתן להציב $v=y^{'}$ ולקבל משוואה מסדר ראשון מהצורה $v^{'}=\frac{1}{v}f\left(y,v\right)$, שכן:

$$f\left(y,y^{'}\right)=y^{''}=v^{'}=\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dy}y^{'}=\frac{dv}{dy}v$$

ולכן אם נחלק ב־v נקבל:

$$v^{'}=\frac{1}{v}f\left(y,v\right)$$

משפט הקיום והיחידות לפתרון משוואות מסדר שני: תהי $f:R\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה עבור $R\subset\mathbb{R}^{3}$ תיבה כלשהו. נניח עוד כי f גזירה וכי הפונקציות $\frac{\partial f}{\partial y},\,\frac{\partial f}{\partial y^{'}}$ רציפות גם הן, ותהי גם $\left(x_{0},y_{0},y_{0}^{'}\right)\in R$.
אזי קיים $h>0$ מספיק קטן כך שעל קוביה ברדיוס h סביב x_{0} קיים פתרון יחיד למשוואה $y^{''}=f\left(x,y,y^{'}\right)$ עם תנאי ההתחלה $y\left(x_{0}\right)=y_{0}$ וכן $y^{'}\left(x_{0}\right)=y_{0}^{'}$.

הערה: לא נוכיח את המשפט. בהמשך נוכיח הכללה שלו עבור משוואות מסדר n כללי.

5 משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר שני

הצורה הכללית של משוואה לינארית מסדר שני, היא:

$$P\left(x\right)\frac{d^{2}y}{dx}+Q\left(x\right)\frac{dy}{dx}+R\left(x\right)y=G\left(x\right)$$

עבור P,Q,R,G פונקציות כלשהן במשתנה x.
במקרה בו $P\left(x\right)\neq0$ לכל x, ניתן ללא הגבלת הכלליות לכתוב את המשוואה בצורה:

$$y^{''}+Q\left(x\right)y^{'}+R\left(x\right)y=G\left(x\right)$$

וזו משוואה מהצורה $y^{''}=f\left(x,y,y^{'}\right)$ עבור $f\left(x,y,y^{'}\right)=-Q\left(x\right)y^{'}-R\left(x\right)y+G\left(x\right)$.
במקרה כזה נובע כי:

$$\frac{\partial f\left(x,y,y^{'}\right)}{\partial y}=-R\left(x\right)$$

$$\frac{\partial f\left(x,y,y^{'}\right)}{\partial y^{'}}=-Q\left(x\right)$$

ולכן אם Q,R,G פונקציות רציפות מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות.
במקרה כזה, אם נניח כי Q,R,G רציפות על קטע I, אזי התחום עליו יש פתרון למשוואה $y^{''}=f\left(x,y,y^{'}\right)$ הוא $I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.[5]

דוגמאות:

1. משוואה של מסה על קפיץ:

$$m\frac{d^{2}u}{dt^{2}}+c\frac{du}{dt}+ku=F\left(t\right)$$

2. משוואת בסל:

$$x^{2}y^{''}+xy^{'}+\left(x^{2}-v^{2}\right)y=0$$

עבור v קבוע.

3. משוואת לז'נדר:

$$\left(1-x^{2}\right)y^{''}-2xy^{'}+a\left(a+1\right)y=0$$

עבור a קבוע שלם.

[5] נשים לב שמשפט הקיום והיחידות קובע פתרון על סביבה כלשהי של $\left(x_{0},y_{0},y_{0}^{'}\right)$ ולא דווקא על כל $I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, אולם ניתן להראות כי פתרון זה הוא למעשה פתרון על כל $I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
סקיצה להוכחה: יהי $J\subset I$ קטע המכיל את x_{0}, שהוא המקסימלי עליו קיים פתרון יחיד. אם בשלילה $J\subsetneq I$, אז עבור נקודה ב־J שהיא מספיק קרובה לקצה, ממשפט הקיום והיחידות קיים פתרון יחיד שמתרחב אל מעבר לקטע J. אולם פתרון זה מתלכד עם הפתרון הכללי בתוך J, והוא ממשיך מחוץ ל־J, בסתירה לבחירת J כמקסימלי.

5.1 משוואות הומוגניות

הגדרה: תהי $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=g(x)$ משוואה לינארית מסדר שני. אז **המשוואה ההומוגנית** המתאימה לה היא אותה המשוואה עבור $g(x)=0$. כלומר, המשוואה ההומוגנית היא $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=0$.

משפט: יהי $\tilde{y}$ פתרון כלשהו של המשוואה $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=g(x)$.

אזי כל פתרון y אחר של המשוואה הנ"ל ניתן להציג בצורה $y=\tilde{y}+\hat{y}$, כאשר $\hat{y}$ הוא איזה פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה.

הוכחה: יהי y פתרון כלשהו. ברור מהלינאריות כי $y-\tilde{y}$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית, שכן:

$$(1):\ \tilde{y}^{''}+p(x)\tilde{y}^{'}+q(x)\tilde{y}=g(x)$$

$$(2):\ y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$(y-\tilde{y})^{''}+p(x)(y-\tilde{y})^{'}+q(x)(y-\tilde{y})=(2)-(1)=0$$

אם כך נקבע $\hat{y}=y-\tilde{y}$ ונקבל כי $y=\tilde{y}+\hat{y}$, כנדרש. ■

הגדרה: על מרחב הפונקציות הגזירות מוגדר אופרטור הגזירה D על ידי $D[\phi]=\frac{d}{dx}\phi$. כלומר, אופרטור זה מקבל פונקציה גזירה ומחזיר את הנגזרת שלה.

יהיו p,q פונקציות רציפות על קטע פתוח I. נגדיר אופרטור גזירה מסדר שני להיות $L=D^2+pD+q$. כלומר, האופרטור L מקבל פונקציה גזירה ϕ ומחזיר את הפונקציה $L[\phi]$ המוגדרת על ידי:

$$L[\phi](x)=\phi^{''}(x)+p(x)\phi^{'}(x)+q(x)\phi(x)$$

טענה: L שהגדרנו הוא אופרטור לינארי מעל $\mathbb{R}$.

ההוכחה מושארת כתרגיל פשוט.

משפט: (עיקרון הסופר־פוזיציה) תהי $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=g(x)$ משוואה מסדר שני. יהי L האופרטור המתאים לפונקציות p,q שבמשוואה.

יהיו y_1,y_2 פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה לה, אותה ניתן לכתוב $L[y]=0$. אזי כל קומבינציה לינארית שלהם היא גם פתרון של המשוואה $L[y]=0$.

הוכחה: נובע מלינאריות האופרטור L כי $L[c_1y_1+c_2y_2]=c_1L[y_1]+c_2L[y_2]=0$. ■

הגדרה: יהיו y_1,y_2 פתרונות של המשוואה $L[y]=0$ הנ"ל. אומרים כי פתרונות אלה הם **קבוצה יסודית של פתרונות** אם כל פתרון של המשוואה $L[y]=0$ הוא קומבינציה לינארית של y_1,y_2.

משפט: יהיו p,q פונקציות רציפות על קטע פתוח I עם האופרטור L המתאים להן, ויהיו y_1,y_2 פתרונות של המשוואה $L[y]=0$ על I.

אם קיים $x_0\in I$ מתקיים $y_1(x_0)y_2^{'}(x_0)-y_1^{'}(x_0)y_2(x_0)\neq 0$, אזי מרחב הפתרונות של המשוואה $L[y]=0$ הוא המרחב הנפרש על ידי y_1,y_2. כלומר, y_1,y_2 קבוצה יסודית של פתרונות.

הוכחה: יהי ϕ פתרון של המשוואה $L[y]=0$. נחפש $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ שעבורם $\phi=c_1y_1+c_2y_2$.

ממשפט הקיום והיחידות נובע כי הערכים $\phi(x_0),\phi^{'}(x_0)$ קובעים את הפתרון באופן יחיד.

אם ϕ הוא מהצורה $\phi=c_1y_1+c_2y_2$ עבור $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ כלשהם, יש לדרוש שיתקיימו המשוואות הבאות:

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=\phi(x_0)$$

$$c_1y_1^{'}(x_0)+c_2y_2^{'}(x_0)=\phi^{'}(x_0)$$

ובכתיב מטריציאלי:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1^{'}(x_0) & y_2^{'}(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \phi(x_0) \\ \phi'(x_0) \end{pmatrix}$$

כדי לקבל במפורש את הווקטור $\binom{c_1}{c_2}$ עלינו להפוך את המטריצה הנ"ל, וזה מתקיים אם ורק אם הדטרמיננטה אינה אפס. כלומר:

$$\det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1^{'}(x_0) & y_2^{'}(x_0) \end{pmatrix}=y_1(x_0)y_2^{'}(x_0)-y_1^{'}(x_0)y_2(x_0)\neq 0$$

כנדרש במשפט. ■

הגדרה: יהיו y_1,y_2 פונקציות גזירות כלשהן על קטע פתוח כלשהו. אופרטור ה**וורונסקיאן** W מוגדר על ידי:

$$W(y_1,y_2)=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{pmatrix}=y_1y_2^{'}-y_1^{'}y_2$$

טענה: יהיו p,q פונקציות רציפות על קטע פתוח I עם האופרטור L המתאים להן, ויהיו y_1,y_2 פתרונות של המשוואה $L[y]=0$ על I. אזי מתקיימת בדיוק אחת משתי אפשרויות: $W(y_1,y_2)\equiv 0$ קבוע, או $W(y_1,y_2)\neq 0$ על כל I.

הוכחה: נשים לב שמהיות y_1 פתרון של המשוואה ההומוגנית נובע כי:

$$0=y_2L[y_1]=y_2\left(y_1^{''}+py_1^{'}+qy_1\right)$$

ובאותו אופן עבור y_2 נובע:

$$0=y_1L[y_2]=y_1\left(y_2^{''}+py_2^{'}+qy_2\right)$$

נחסר את שתי המשוואות ונקבל:

$$0=y_2\left(y_1^{''}+py_1^{'}+qy_1\right)-y_1\left(y_2^{''}+py_2^{'}+qy_2\right)=$$

$$=y_1^{''}y_2+py_1^{'}y_2+qy_1y_2-y_1y_2^{''}-py_1y_2^{'}-qy_1y_2=$$

$$=y_1^{''}y_2+py_1^{'}y_2-y_1y_2^{''}-py_1y_2^{'}=y_1^{''}y_2-y_1y_2^{''}+p\underbrace{\left(y_1^{'}y_2-y_1y_2^{'}\right)}_{=W}$$

עוד נשים לב שמתקיים:

$$W\left(y_1,y_2\right)^{'}(x)=\left(y_1y_2^{'}-y_1^{'}y_2\right)^{'}=y_1^{'}y_2^{'}+y_1y_2^{''}-y_1^{''}y_2-y_1^{'}y_2^{'}=y_1y_2^{''}-y_1^{''}y_2$$

ולכן נובע כי מתקיימת המשוואה:

$$W^{'}+pW=0$$

כלומר הוורונסקיאן הוא פתרון של משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון $y^{'}+p(x)y=0$. כל הפתרונות של משוואה זו הם מהצורה $c\cdot\exp\left(-\int^x p(t)\,dt\right)$.

אם $c=0$ אז $W(y_1,y_2)\equiv 0$ קבוע ואם $c\neq 0$ אז $W(y_1,y_2)\neq 0$ על כל I. ■

משפט: יהיו p,q פונקציות רציפות על קטע פתוח I.

אזי קיימת קבוצה יסודית של פתרונות למשוואה $L[y]=0$ בקטע I. כלומר קיימים פתרונות y_1,y_2 של המשוואה הנ"ל, כך שכל פתרון אחר של המשוואה הוא מהצורה $c_1y_1+c_2y_2$ עבור $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ כלשהם.

הוכחה: נקבע $x_0\in I$. נתבונן במשוואה $L[y]=0$. נשתמש במשפט הקיום והיחידות, ונקבל שקיים y_1 פתרון המקיים את תנאי ההתחלה $y_1(x_0)=1,\ y_1^{'}(x_0)=0$, וקיים y_2 פתרון המקיים את תנאי ההתחלה $y_2(x_0)=0,\ y_2^{'}(x_0)=1$. לכן:

$$W\left(y_1,y_2\right)(x_0)=y_1(x_0)\,y_2^{'}(x_0)-y_1^{'}(x_0)\,y_2(x_0)=1\cdot 1-0\cdot 0=1\neq 0$$

ומכאן נובע כי y_1,y_2 מהווים קבוצה יסודית של פתרונות. ■

הגדרה: יהיו f,g פונקציות המוגדרות בקטע פתוח I. אומרים כי f,g הן **תלויות לינארית** אם קיימים $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ קבועים שאינם אפס, שעבורם מתקיים $k_1f+k_2g\equiv 0$.

משפט: יהיו f,g פונקציות גזירות בקטע פתוח I. אם יש $x_0\in I$ שעבורה $W(f,g)(x_0)\neq 0$ אזי f,g בלתי תלויות לינארית.

הוכחה: נניח בשלילה כי f,g תלויות לינארית. כלומר קיימים k_1,k_2 שאינם אפס עבורם מתקיים $k_1f+k_2g\equiv 0$. מכאן נובע שמתקיימת המערכת:

$$\begin{cases} k_1f(x)+k_2g(x)=0\\ k_1f^{'}(x)+k_2g^{'}(x)=0\end{cases}$$

ובכתיב מטריצִיאלי:

$$\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של המטריצה הזו היא $W(f,g)(x)$.

הנחנו כי $W(f,g)(x_0) \neq 0$ ולכן ניתן להפוך את המטריצה, להכפיל את שני הצדדים בהופכית, ומכאן נקבל שמתקיים $\binom{k_1}{k_2} = \binom{0}{0}$, בסתירה להנחה. ■

הערה: הכיוון השני של המשפט אינו נכון. כלומר ייתכן כי $W(f,g)(x_0) = 0$ לכל $x \in I$ עבור f, g שאינן תלויות לינארית.

לדוגמה, ניקח $f(x) = x|x|$[6] וניקח $g(x) = x^2$. לא קשה לראות שהן אינן תלויות לינארית, ובכל זאת מתקיים:

$$W(f,g) = fg' - f'g = x|x|2x - (x|x|)' x^2 = 2x^2|x| - 2x^3\text{sgn}(x) = 0$$

משפט: יהיו p, q פונקציות רציפות על קטע פתוח I עם האופרטור L המתאים להן, ויהיו y_1, y_2 פתרונות של המשוואה $L[y] = 0$ על I.

אזי y_1, y_2 הן בלתי תלויות לינארית אם ורק אם $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ לכל $x \in I$.

(ההוכחה מושארת כתרגיל)

5.1.1 הורדת סדר

משפט: נניח כי למשוואה $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ידוע פתרון y_1 כלשהו. אזי ניתן לדעת גם פתרון אחר y_2 שאינו תלוי לינארית ב־y_1 (ובכך למצוא קבוצה יסודית של פתרונות למשוואה).

הוכחה: נפתח את הפתרון השני מתוך הפתרון הקיים y_1. נניח כי הפתרון השני הוא מהצורה $y = v(x)y_1$, כאשר $v(x)$ פונקציה לא קבועה (אחרת הפתרון השני תלוי לינארית ב־y_1).

בהתאם מתקיים:

$$y' = v'y_1 + vy_1'$$

$$y'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

[6] לא קשה לראות כי זו פונקציה גזירה, וכי $f'(x) = \text{sgn}(x) \cdot 2x$.

נציב את הפונקציה הכללית שהנחנו כי היא פתרון במשוואה המקורית:

$$\left[v^{''}y_1+2v^{'}y_1^{'}+vy_1^{''}\right]+p\left[v^{'}y_1+vy_1^{'}\right]+qvy_1=0$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{v\left[y_1^{''}+py_1^{'}+qy_1\right]}_{=L[y_1]=0}+v^{'}\left[2y_1^{'}+py_1\right]+v^{''}y_1=0$$
$$\Downarrow$$
$$v^{'}\left[2y_1^{'}+py_1\right]+v^{''}y_1=0$$
$$\Downarrow$$
$$v^{'}\left[2\frac{y_1^{'}}{y_1}+p\right]+v^{''}=0$$

כאשר המעבר האחרון מוגדר בתחום בו $y_1\neq 0$.

זו משוואה לינארית מסדר ראשון במשתנה $v^{'}$, והפתרון שלה הוא:

$$v^{'}(x)=c\cdot\exp\left(-\int^{x}\left(p(t)+\frac{2y_1^{'}(t)}{y_1(t)}\right)dt\right)=$$

$$=c\cdot\exp\left(-\int^{x}p(t)\,dt-2\int\ln|y_1(t)|\,dt\right)=c\cdot\frac{1}{y_1(x)^2}\exp\left(-\int^{x}p(t)\,dt\right)$$

נסמן $u(x):=\exp\left(-\int^{x}p(t)\,dt\right)$ ואז הפתרון הוא $v^{'}(x)=cu(x)$, ועל ידי אינטגרציה נקבל:

$$v(x)=\int^{x}v(s)\,ds=c\int^{x}u(s)\,ds+k$$

אם כך פתרון נוסף שמצאנו הוא:

$$v(x)y_1(x)=\left[c\int^{x}u(s)\,ds+k\right]y_1(x)=cy_1(x)\int^{x}u(s)\,ds+ky_1(x)$$

הביטוי $ky_1(x)$ הוא עצמו פתרון שתלוי לינארית ב־$y_1(x)$, ולכן ניתן להתעלם מהרכיב הזה. לכן נקבל את הפתרון הנוסף:

$$y_2(x):=cy_1(x)\int^{x}u(s)\,ds$$

היות והפונקציה $\int^{x}u(s)\,ds$ לא קבועה, נובע כי y_1,y_2 בלתי תלויים לינארית. ■

דוגמה: $2x^2y^{''}+3xy^{'}-y=0$ על התחום $x>0$. נחלק ב־$2x^2$ ונקבל את המשוואה $y^{''}+\frac{3}{2x}y^{'}-\frac{y}{2x^2}=0$.

הפונקציה $y_1(x)=\frac{1}{x}$ היא פתרון. נפתח מתוכה פתרון בלתי תלוי נוסף:

$$y(x):=v(x)\,y_1(x)=\frac{v(x)}{x}$$

$$y^{'}(x)=\frac{v^{'}(x)}{x}-\frac{v(x)}{x^2}$$

$$y^{''}(x)=\frac{v^{''}(x)}{x}-\frac{2}{x^2}v^{'}(x)+\frac{2}{x^3}v(x)$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$2x^2\left[\frac{v^{''}(x)}{x}-\frac{2v^{'}(x)}{x^2}+\frac{2v(x)}{x^3}\right]+3x\left[\frac{v^{'}(x)}{x}-\frac{v(x)}{x^2}\right]-\frac{v(x)}{x}=$$

$$=2xv^{''}(x)+[-4+3]\,v^{'}(x)+\left[\frac{4}{x}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x}\right]v(x)=$$

$$=2xv^{''}(x)-v^{'}(x)\doteq 0$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון במשתנה $v^{'}$, ועל ידי הפרדת משתנים נקבל כי $v^{'}(x)=c\sqrt{2x}$ ולכן $v(x)=c\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+k$. נבחר c כזה כך ש־$c\frac{2\sqrt{2}}{3}=1$, ונקבל:

$$v(x)=x^{3/2}+k$$

לכן יש לנו פתרון:

$$y(x)=\left(x^{3/2}+k\right)y_1(x)=x^{3/2}y_1(x)+ky_1(x)$$

נתעלם מהפונקציה $ky_1(x)$, כפי שהסברנו בהוכחה, ונקבל פתרון בלתי תלוי:

$$y_2(x):=x^{3/2}y_1(x)=\frac{x^{3/2}}{x}=x^{1/2}$$

5.1.2 משוואות הומוגניות במקדמים קבועים

נדון במשוואות מהצורה $L[y]=ay^{''}+by^{'}+cy=0$ עבור $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.
נשים לב שזוהי הצבה של האופרטור D בפולינום $p(t)=at^2+bt+c$.
נניח כי יש פתרון מהצורה $y=e^{rx}$ עבור $r\in\mathbb{R}$ כלשהו. כלומר:

$$L[e^{rx}]=ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=e^{rx}\left[ar^2+br+c\right]=0$$

ברור כי $e^{rx}\neq 0$ לכל x בתחום, ולכן נבדוק מתי הפולינום $p(r)=ar^2+br+c$ מתאפס.
כלומר, לכל $\tilde{r}$ שמקיים $p(\tilde{r})=0$, נקבל את הפתרון $L\left[e^{\tilde{r}x}\right]=0$.
לשם כך נדון בשלושה מקרים אפשריים:

- **מקרה ראשון:** $b^2-4ac>0$

במקרה זה לפולינום $p(r)$ יש בדיוק שני פתרונות מהצורה:

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

מכאן נקבל כי e^{r_1x},e^{r_2x} פתרונות למשוואה $L[y]=0$.

כדי לגלות ששני הפתרונות הללו בלתי תלויים, נשים לב כי $W\left(e^{r_1x},e^{r_2x}\right)=(r_2-r_1)\,e^{(r_1+r_2)x}\neq 0$.

- **מקרה שני:** $b^2-4ac=0$

במקרה זה לפולינום $p(r)$ יש פתרון יחיד מהצורה:

$$r_1=\frac{-b}{2a}$$

לכן e^{r_1x} מהווה פתרון למשוואה $L[y]=0$.

כדי לגלות את הפתרון השני נוריד סדר כפי שהראינו בפסקה הקודמת. נפתח את הפתרון הנוסף. נניח כי הוא מהצורה $y=v(x)\,e^{\frac{-b}{2a}x}$ ואז:

$$y'(x)=v'(x)\,e^{\frac{-b}{2a}x}-v(x)\,e^{\frac{-b}{2a}x}\frac{b}{2a}$$

$$y''(x)=\left[v''(x)-\tfrac{b}{a}v'(x)+\tfrac{b^2}{4a^2}\right]e^{\frac{-b}{2a}x}$$

על ידי הצבה במשוואה וחלוקה בגורם $e^{\frac{-b}{2a}x}$, נקבל:

$$a\left(v''(x)-\tfrac{b}{a}v'(x)+\tfrac{b^2}{4a^2}v(x)\right)+b\left(v'(x)-\tfrac{b}{2a}v(x)\right)+cv(x)=$$

$$=av''(x)-\left(\tfrac{b^2}{4a}-c\right)v(x)=0$$

אבל $b^2-4ac=0$ ולכן גם $\frac{b^2}{4a}-c=0$, ולכן נקבל את המשוואה:

$$av''(x)=0$$

ומכאן קל לראות כי $v(x)$ היא מהצורה הכללית $v(x)=c_1x+c_2$, ולכן נוכל לקבל פתרון נוסף בלתי תלוי בפתרון $e^{\frac{-b}{2a}x}$ על ידי $y_2(x):=cxe^{\frac{-b}{2a}x}$ (כאשר התעלמנו מהקבוע c_2, כי $c_2e^{\frac{-b}{2a}x}$ הוא רכיב התלוי בפתרון הראשון).

- **מקרה שלישי:** $b^2-4ac<0$

במקרה זה לפולינום $p(r)$ יש פתרונות מרוכבים $r_1,r_2\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $r_1\neq r_2$. נסמן באופן כללי $r_{1,2}=\lambda\pm\mu i$ (שני פתרונות מרוכבים של פולינום ריבועי הם צמודים). לצורך מציאת פתרון נזכיר טענה שתעזור לנו.

טענה: יהיו $p,q:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות. תהי $y(x)=u(x)+v(x)\,i$ פתרון מרוכב של המשוואה $L[y]=y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0$. אזי הפונקציות u,v מהוות פתרונות ממשיים של אותה המשוואה, $L[y]=0$.

נשים לב כי במקרה שלנו $e^{(\lambda\pm\mu i)x}$ (בסימן חיובי או שלילי - לא משנה) הוא פתרון מרוכב של $L[y]=0$. נשים לב כי:

$$e^{(\lambda\pm\mu i)x}=e^{\lambda x}e^{\pm\mu i}=e^{\lambda x}\left[\cos(\mu x)\pm i\sin(\mu x)\right]$$

(cos פונקציה זוגית, ולכן הפעלתה על $-\mu x$ שווה להפעלתן על μx. כמו כן sin פונקציה אי־זוגית ולכן שני הסימנים מכסים את כל האפשרויות).

לכן מהטענה שהזכרנו נובע כי $e^{\lambda x}\cos(\mu x)\,,\,e^{\lambda x}\sin(\mu x)$ מהווים קבוצה יסודית של פתרונות. לכן נקבל פתרון כללי מהצורה $y(x)=c_1e^{\lambda x}\cos(\mu x)+c_2e^{\lambda x}\sin(\mu x)$.[7]

דוגמה: $y^{''}+5y^{'}+6y=0$ עם התנאי $y(0)=0$ וכן $y^{'}(0)=1$.

נקבע e^{rx} והפולינום המתקבל הוא $r^2+5r+6=(r+3)(r+2)$. לכן $r_1=-2, r_2=-3$ מהווים פתרונות בלתי תלויים, והפתרון הכללי הוא $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$.

מתנאי ההתחלה נובע $y(0)=c_1+c_2=0$ וכן $y^{'}(0)=-2c_1-3c_2=1$, ומזה נובע $c_1=1$ וכן $c_2=-1$.

5.2 משוואות לא הומוגניות

תזכורת: אם y_p פתרון כלשהו של המשוואה $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=g(x)$, אז כל פתרון y אחר הוא מהצורה $y=y_p+c_1y_1+c_2y_2$ כאשר y_1,y_2 הם קבוצה יסודית של פתרונות למשוואה ההומוגנית.

טענה: תהי $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=g(x)$, ונניח כי $g(x)=\sum_{i=1}^{m}g_i(x)$ עבור פונקציות $g_i(x)$ כלשהן. נניח עוד כי לכל $i=1,...,m$, למשוואה $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=g_i(x)$, ידוע פיתרון y_i.

אזי $y:=\sum_{i=1}^{m}y_i$ מהווה פתרון של המשוואה המקורית.

הוכחה: מלינאריות של הנגזרות ושל המשוואה נובע:

$$y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=\left(\sum_{i=1}^{m}y_i\right)^{''}+p(x)\left(\sum_{i=1}^{m}y_i\right)^{'}+q(x)\sum_{i=1}^{m}y_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}y_i^{''}+\sum_{i=1}^{m}p(x)y_i^{'}+\sum_{i=1}^{m}q(x)y_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i^{''}+p(x)y_i^{'}+q(x)y_i\right]=\sum_{i=1}^{m}g_i(x)=g(x)$$

■

[7] נשים לב כי לכאורה מתקבלים 4 פתרונות, כי ניתן לבחור $e^{(\lambda+i\mu)x}$ או $e^{(\lambda-i\mu)x}$ כפתרון מרוכב, ומכל אחד מהם לקבל שני פתרונות ממשיים. אכן, פתרונות אלו יהיו חייבים להיות תלויים לינארית.

5.2.1 משוואות לא הומוגניות במקדמים קבועים (שיטת הקבועים החופשיים)

נתבונן במשוואה מהצורה $ay^{''}+by^{'}+cy=g\left(x\right)$. נניח כי $g=\sum_{i=1}^{m}g_i$ כך שכל g_i היא מהצורה הכללית:

$$g_i\left(x\right)=e^{\alpha x}\left(a_nx^n+...+a_1x+a_0\right)\cdot\begin{cases}\cos\left(\beta x\right)\\ \sin\left(\beta x\right)\end{cases}$$

(כאשר $a_j,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, וכל אחד מהם יכול להיות גם אפס).

במקרה הזה נראה כי ניתן לנחש פתרון שיהיה סכום של איברים דומים (כלומר של פולינומים, אקספוננטים, סינוס או קוסינוס), ושיהיה נכון עד כדי כפל בקבוע. כלומר, נוכל לנחש פתרון כזה מוכפל בקבוע כלשהו, שנוכל "לתאם" באופן כזה שיפתור את המשוואה.

תחילה נראה שתי דוגמאות, ולאחר מכן נבנה את השיטה במסודר.

דוגמה: $y^{''}-3y^{'}-4y=3e^{2x}$. ננחש את הפתרון $y_p\left(x\right)=Ae^{2x}$ לאיזה $A\in\mathbb{R}$. מגזירת הפתרון פעם ראשונה ושנייה והצבה במשוואה נקבל $3e^{2x}=-6Ae^{2x}$, ולכן בהכרח $A=-\frac{1}{2}$.

דוגמה: $y^{''}-3y^{'}-4y=2\sin x$. במקרה זה ננחש את הפתרון $y_p\left(x\right)=A\sin x+B\cos x$ לאיזה $A,B\in\mathbb{R}$. מגזירת הפתרון פעם ראשונה ושנייה והצבה במשוואה נקבל:

$$2\sin x=\left(3B-5A\right)\sin x-\left(3A+5B\right)\cos x$$

מתקבלת מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים, ממנה נובע $A=-\frac{5}{17}$, $B=-\frac{3}{5}A$.

סיכום: נציג את הגישה הכללית לפתרון משוואה מדרגה שנייה בעלת מקדמים קבועים, מהצורה $ay^{''}+by^{'}+cy=g\left(x\right)$.

- עבור $g\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, מתקבל פתרון כללי:

$$y_p\left(x\right)=x^S\left(\sum_{j=0}^{n}A_jx^j\right)$$

- עבור $g\left(x\right)=e^{\alpha x}\cdot\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, מתקבל פתרון כללי:

$$y_p\left(x\right)=x^Se^{\alpha x}\left(\sum_{j=0}^{n}A_jx^j\right)$$

- עבור $g\left(x\right)=e^{\alpha x}\cdot\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\cdot\begin{cases}\sin\left(\beta x\right)\\ \cos\left(\beta x\right)\end{cases}$,[8] מתקבל פתרון כללי:

$$y_p\left(x\right)=x^Se^{\alpha x}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}A_jx^j\right)\sin\left(\beta x\right)+\left(\sum_{l=0}^{n}B_jx^j\right)\cos\left(\beta x\right)\right]$$

כאשר בכל המקרים $S=0,1,2$, והוא נקבע להיות המינימלי מביניהם שעבורו אף אחד מאיברי $y_p\left(x\right)$ איננו פתרון של המשוואה ההומוגנית.

[8] כלומר הכפלה ב-$\sin\left(\beta x\right)$ או ב-$\cos\left(\beta x\right)$.

5.2.2 וריאציה של פרמטרים

משפט: יהיו p,q,g פונקציות רציפות על קטע $I=(\alpha,\beta)$, ויהיו y_1,y_2 פתרונות בלתי תלויים לינארית של המשוואה ההומוגנית $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=0$, אזי פתרון למשוואה $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=g(x)$ מתקבל על ידי:

$$y_p(x)=-y_1(x)\int^x\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt+y_2(x)\int^x\frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt$$

כאשר $W(y_1,y_2)(x):=y_1(x)y_2^{'}(x)-y_1^{'}(x)y_2(x)$ הוא הוורונסקיאן המתאים.

הערה: ניתן לכתוב פתרון זה באופן שקול על ידי:

$$y_p(x)=\int^x\frac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}g(t)\,dt$$

פיתוח: נפתח את הפתרון למשוואה מתוך שני הפתרונות של המשוואה ההומוגנית.

נניח כי הפתרון הוא מהצורה $y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$, כאשר u_1,u_2 פונקציות כלשהן במשתנה x. מכאן:

$$y_p^{'}(x)=u_1^{'}y_1+u_2^{'}y_2+u_1y_1^{'}+u_2y_2^{'}$$

מתקבלות יותר מידי דרגות חופש בפתרון זה, ולכן נניח כי $u_1^{'}y_1+u_2^{'}y_2=0$ ונראה אם נגיע לפתרון. אם כך נקבל:

$$y_p^{'}(x)=u_1y_1^{'}+u_2y_2^{'}$$

$$y_p^{''}(x)=u_1^{'}y_1^{'}+u_2^{'}y_2^{'}+u_1y_1^{''}+u_2y_2^{''}$$

נציב הכל במשוואה המקורית:

$$g=\left(u_1^{'}y_1^{'}+u_2^{'}y_2^{'}+u_1y_1^{''}+u_2y_2^{''}\right)+p\cdot\left(u_1y_1^{'}+u_2y_2^{'}\right)+q\cdot(u_1y_1+u_2y_2)=$$

$$=u_1\left(y_1^{''}+py_1^{'}+qy_1\right)+u_2\left(y_2^{''}+py_2^{'}+qy_2\right)+u_1^{'}y_1^{'}+u_2^{'}y_2^{'}$$

נשים לב כי $y_i^{''}+py_i^{'}+qy_i=0$ עבור $i=1,2$, כי זו המשוואה ההומוגנית אותה פותרים y_1,y_2, ולכן נקבל:

$$g=u_1^{'}y_1^{'}+u_2^{'}y_2^{'}$$

אם כך קיבלנו מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases}u_1^{'}y_1+u_2^{'}y_2=0\\u_1^{'}y_1^{'}+u_2^{'}y_2^{'}=g\end{cases}$$

כאשר המשוואה הראשונה היא ההנחה שהוספנו כדי לנסות למצוא פתרון, וההנחה השנייה נובעת מהמשוואה המקורית.

בכתיב מטריציאלי המערכת היא:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{'} \\ u_2^{'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

לכן כאשר $W\left(y_1,y_2\right)\neq 0$ ניתן להפוך את המטריצה הנ"ל, ומהנוסחה הידועה להיפוך מטריצה נקבל את השוויונים:

$$u_2^{'}=\frac{y_1 g}{W(y_1,y_2)}$$

$$u_1^{'}=-\frac{y_2 g}{W(y_1,y_2)}$$

כעת בביצוע אינטגרציה נקבל את הפתרון שבמשפט. ■

דוגמה: נתבונן במשוואה $y^{''}-2y^{'}+y=\frac{e^x}{1+x^2}$. ראינו כי $y_1=e^x,\ y_2xe^x$ הם הפתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה.

אם כך נגדיר פתרון למשוואה על ידי:

$$y_p=u_1e^x+u_2xe^x$$

מההנחה הכללית $u_1^{'}e^x+u_2^{'}xe^x=0$ שתחתיה פיתחנו את הפתרון נובע כי:

$$y_p^{'}=u_1e^x+u_2\cdot\left(1+x\right)e^x$$

ומכאן כי:

$$y_p^{''}=u_1^{'}e^x+u_1e^x+u_2^{'}\cdot\left(1+x\right)e^x+u_2e^x+u_2\cdot\left(1+x\right)e^x=$$

$$=u_1e^x+u_2^{'}e^x+u_2\cdot\left(2+x\right)e^x$$

כאשר גם כאן בשוויון בשורה השנייה עשינו שימוש בהנחה הכללית הנ"ל.

נציב במשוואה המקורית:

$$\frac{e^x}{1+x^2}=y_p^{''}-2y_p^{'}+y_p=$$

$$=u_1e^x+u_2^{'}e^x+u_2\left(2+x\right)e^x-2\left(u_1e^x+u_2\left(1+x\right)e^x\right)+u_1e^x+u_2xe^x$$

נצמצם e^x משני הצדדים ונקבל את המשוואה:

$$\frac{1}{1+x^2}=u_1+u_2^{'}+u_2\left(2+x\right)-2\left(u_1+u_2\left(1+x\right)\right)+u_1+u_2x=u_2^{'}$$

כעת מההנחה הכללית שהזכרנו $u_1^{'}e^x+u_2^{'}xe^x=0$ נובע גם כי:

$$0=u_1^{'}e^x+\frac{xe^x}{1+x^2}=e^x\left(u_1^{'}+\frac{x}{1+x^2}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$u_1^{'}=-\frac{x}{1+x^2}$$

מכאן קל להסיק על ידי אינטגרציה:

$$\begin{cases} u_1'(x) = -\frac{x}{1+x^2} \\ u_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_1(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| \\ u_2(x) = \arctan(x) \end{cases}$$

כלומר קיבלנו פתרון למשוואה על ידי:

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| e^x + \arctan(x)\, xe^x$$

6 פיתרון משוואות בעזרת טורי חזקות

6.1 מבוא: טורי חזקות

הגדרה: **טור חזקות** הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ עבור $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ קבועים ועבור $x \in \mathbb{R}$ משתנה.

טענה: לכל טור חזקות קיים **רדיוס התכנסות** $0 \leq R \leq \infty$, שעבורו לכל $x \in (x_0 \pm R)$ הטור מתכנס ולכל $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty)$ הטור מתבדר. עבור $x = x_0 \pm R$ לא ניתן לדעת באופן כללי.

טענה: בהינתן שני טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ עם רדיוסי התכנסות R_a, R_b כלשהם, אזי:

1. לכל $c \in \mathbb{R}$ הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n (x-x_0)^n$ הוא בעל אותו רדיוס התכנסות R_a.
2. הסכום $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ הוא טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R \geq \min\{R_a, R_b\}$, שגבולו הוא סכום הגבולות.
3. המכפלה $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right)$ היא טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R \geq \min\{R_a, R_b\}$, שגבולו הוא **מכפלת קושי**:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n$$

טענה: כל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ניתן לגזור איבר־איבר, כלומר:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

כאשר השוויון האחרון נובע כי עבור $n=0$ המחובר הראשון הוא 0.

הגדרה: בהינתן פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה אינסוף פעמים, נגדיר את **פיתוח טיילור** שלה סביב x_0 להיות:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

טענה: נסמן $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$, אזי לכל n מתקיים $a_n=\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}$.[9]

מכאן כי פיתוח טיילור של פונקציה הוא יחיד.

הגדרה: פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת **אנליטית** בנקודה x_0, אם היא גזירה אינסוף פעמים, ואם גם פיתוח טיילור שלה סביב x_0 שווה לה בכל נקודה ברדיוס ההתכנסות.

כלומר, אם מתקיים:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

דוגמאות: ידוע כי $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ לכל $x\in\mathbb{R}$ (כפיתוח סביב $x_0=0$) ולכן זו פונקציה אנליטית בכל נקודה.

מנגד, הפונקציה e^{-x^2} אינה אנליטית, שכן קל לראות מגזירה של טור החזקות שלה איבר־איבר כי כל הנגזרות, למעט הראשונה, מתאפסות.

טענה: אם f,g פונקציות אנליטיות ב־x_0, אז גם $c_1f\pm c_2g$ אנליטית ב־x_0, ואם $g\neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ אנליטית ב־x_0.

טענה: אם f אנליטית ב־x_0 ולפיתוח טיילור שלה יש רדיוס התכנסות R, אזי f אנליטית בכל נקודה ברדיוס ההתכנסות הנ"ל.

6.2 פתרון משוואות הומוגניות בסביבת נקודות רגולריות

הגדרה: תהי $P\left(x\right)y^{''}+Q\left(x\right)y^{'}+R\left(x\right)y=0$ משוואה עבור P,Q,R אנליטיות.

נקודה $x_0\in\mathbb{R}$ נקראת **נקודה רגולרית** אם $P\left(x_0\right)\neq 0$ ונקראת **נקודה סינגולרית** אם $P\left(x_0\right)=0$.

משפט: תהי $x_0\in\mathbb{R}$ נקודה רגולרית של המשוואה $P\left(x\right)y^{''}+Q\left(x\right)y^{'}+R\left(x\right)y=0$, כאשר P,Q,R פונקציות אנליטיות. אזי קיים פתרון כללי מהצורה:

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$$

פתרון כללי זה ניתן לייצוג על ידי $y\left(x\right)=ay_1\left(x\right)+by_2\left(x\right)$, כאשר y_1,y_2 פונקציות אנליטיות בלתי תלויות לינארית. עבור ייצוג זה, רדיוס ההתכנסות של הפתרון הכללי y הוא לפחות המינימום בין הרדיוסים של y_1,y_2.

[9] לא קשה להראות באינדוקציה.

נוכיח משפט זה בהמשך.

דוגמה: נתבונן במשוואה $x^2y^{''}-2y=0$ סביב $x_0=0$. ניתן לנחש פתרון אחד $y_1=x^2$ ועל ידי הורדת סדר לקבל פתרון נוסף $y_2=\frac{1}{x}$.

נשים לב כי רק y_1 פונקציה אנליטית ב־0 ואילו y_2 אינה כזאת. ואכן, $x_0=0$ נקודה סינגולרית של המשוואה.

דוגמה: נתבונן במשוואה $y^{''}+y=0$ על כל $\mathbb{R}$. כלומר זו משוואה מהצורה שלנו, עבור $P=1,\,Q=0,\,R=1$.

אנו כבר מכירים את מרחב הפתרונות $Span\left\{\sin,\cos\right\}$, אולם כעת נמצא אותו בעזרת טורי חזקות.

נניח שיש לה פתרון אנליטי בנקודה $x_0=0$, כלומר $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

אם כך מתקיים:

$$y^{'}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}x^n$$

$$y^{''}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n$$

ואם נציב במשוואה נקבל:

$$0=y^{''}+y=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}+a_n\right]x^n$$

ונקבל מערכת של אינסוף משוואות:

$$0=\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}+a_n\qquad n=0,1,2,3,...$$

בהעברת אגפים נקבל יחס רקורסיבי:

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}$$

נשים לב שבהינתן a_0 נקבעים כל האיברים בעלי אינדקס זוגי, ובהינתן a_1 נקבעים כל האיברים בעלי אינדקס אי־זוגי, באופן הבא:

$$\begin{array}{cc}
a_2=-\frac{a_0}{2\cdot1}=-\frac{a_0}{2!} & a_3=-\frac{a_1}{3\cdot2}=-\frac{a_1}{3!}\\
a_4=-\frac{a_2}{4\cdot3}=\frac{a_0}{4!} & a_5=-\frac{a_1}{5\cdot4}=\frac{a_1}{5!}\\
\vdots & \vdots\\
a_{2n}=\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{a_0}{\left(2n\right)!} & a_{2n+1}=\left(-1\right)^n\cdot\frac{a_1}{\left(2n+1\right)!}
\end{array}$$

נסיק שהפתרון הוא:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{a_0}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=$$

$$=a_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}x^{2n}+a_1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=$$

$$=a_0\cos x+a_1\sin x$$

כפי שנובע מפיתוח טיילור של הפונקציות $\cos,\sin$.

6.2.1 משוואת Airy

המשוואה $y^{''}=xy$ על התחום $\mathbb{R}$, מכונה **משוואת Airy**.
זו משוואה לינארית מסדר שני בעלת מרחב פתרונות $Span\left\{y_1,y_2\right\}$. שני הפתרונות היסודיים שנפתח מיד מכונים **פונקציות Airy**.

פתרון: זו משוואה לינארית מסדר שני מהצורה $P\left(x\right)y^{''}+Q\left(x\right)y^{'}+R\left(x\right)y=0$, עבור $P\left(x\right)=1$ וכן $Q\left(x\right)=0$ וכן $R\left(x\right)=-x$. היות ו־$P\left(x\right)=1$ כל הנקודות רגולריות.

נחפש פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, ואז:

$$y^{'}=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}x^n$$

$$y^{''}=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(n+1\right)a_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n$$

נציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$

ובהעברת אגפים נקבל:

$$\begin{gathered}y^{''}=xy\\ \Downarrow\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^{n}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n}\\ \Downarrow\\ 2a_{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^{n}\\ \Downarrow\\ \begin{cases}2a_{2}=0\\ \left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}=a_{n-1} & n=1,2,3,...\end{cases}\\ \Downarrow\\ \begin{cases}a_{2}=0\\ a_{n+3}=\frac{a_{n}}{(n+3)(n+2)} & n=1,2,3,...\end{cases}\end{gathered}$$

מתקבל יחס רקורסיבי, שבו בהינתן a_0 נקבעים האיברים $a_3,a_6,a_9,...$, ובהינתן a_1 נקבעים האיברים $a_5,a_8,a_{11},...$.

נשים לב שהיות ומתקיים $a_2=0$ נובע כי $a_{3n+2}=0$ לכל n.

כמו כן מתקבלות הנוסחאות הכלליות:

$$\begin{gathered}a_{3}=\frac{a_{0}}{3\cdot2}\\ a_{6}=\frac{a_{3}}{6\cdot5}=\frac{a_{0}}{(6\cdot5)(3\cdot2)}\\ \vdots\\ a_{3n}=\frac{a_{0}}{(3n)(3n-1)(3n-3)\cdot...\cdot(6\cdot5)(3\cdot2)}\end{gathered}\qquad\begin{gathered}a_{4}=\frac{a_{1}}{4\cdot3}\\ a_{7}=\frac{a_{4}}{7\cdot6}=\frac{a_{1}}{(7\cdot6)(4\cdot3)}\\ \vdots\\ a_{3n+1}=\frac{a_{1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdot...\cdot4\cdot3}\end{gathered}$$

מכל זאת נקבל:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}x^{3n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n+1}x^{3n+1}=$$

$$=a_{0}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{\left(3n\right)\left(3n-1\right)\left(3n-3\right)\cdot...\cdot\left(6\cdot5\right)\left(3\cdot2\right)}}_{:=y_{1}}+$$

$$+a_{1}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{\left(3n+1\right)\left(3n\right)\left(3n-2\right)\left(3n-3\right)\cdot...\cdot4\cdot3}}_{:=y_{2}}$$

וקיבלנו פתרון כללי מהצורה $a_0y_1+a_2y_2$, כאשר y_1,y_2 אלו פונקציות Airy.

נשים לב שמשוואות אלה מקיימות:

$$\begin{cases} y_1(0)=1 & y_2(0)=0 \\ y_1^{'}(0)=0 & y_2^{'}(0)=1 \end{cases} \Longrightarrow W(y_1,y_2)(0)=1-0=1$$

6.3 פתרון משוואות הומוגניות בסביבת נקודות סינגולריות

תהי $L[y] := P(x)y^{''}+Q(x)y^{'}+R(x)y=0$ משוואה, כאשר P,Q,R פונקציות אנליטיות, ותהי $x_0\in\mathbb{R}$ נקודה סינגולרית של המשוואה.

הערה: נשים לב שגם אם ניתן לבודד ולבטא $y^{''}=f\left(x,y,y^{'}\right)$, לא ניתן להשתמש במשפט הקיום והיחידות בסביבת x_0, שכן מסינגולריות נובע שבביטוי זה נקבל את הצורה $y^{''}=q(x)y^{'}+r(x)y$ עבור $r(x)=-\frac{R(x)}{P(x)}$ ועבור $q(x)=-\frac{Q(x)}{P(x)}$, ומכאן כי $q(x),r(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}\infty$, כלומר f אינה ליפשיצית.

הגדרה: נקודה $x_0\in\mathbb{R}$ נקראת **סינגולרית רגילה**, אם היא סינגולרית וגם הפונקציות $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)},\ (x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ אנליטיות ב-x_0.

טענה: נקודה x_0 היא סינגולרית רגילה אם ורק אם קיימים שני הגבולות:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}\ ,\quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

דוגמה (משוואת לז'נדר): נתבונן במשוואה $\left(1-x^2\right)y^{''}-2xy^{'}+\alpha(\alpha+1)y=0$ עבור $\alpha\neq 0,-1$ קבוע.

ברור שהמקדמים אנליטיים, והנקודות הסינגולריות הן $x_0=\pm 1$. נבדוק האם $x_0=1$ היא סינגולרית רגילה:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{(1+x)}=2$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}=-\alpha(\alpha+1)\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(1+x)}=0$$

כלומר $x_0=1$ נקודה סינגולרית רגילה.

6.3.1 משוואת אוילר

נתבונן במשוואה $L[y]=x^2y^{''}+\alpha xy^{'}+\beta y=0$. ברור כי $x_0=0$ נקודה סינגולרית רגילה.
ננחש פתרון מהצורה $y=x^r$ לאיזה $r\in\mathbb{R}$. לפתרון זה מתקיים $y^{'}=rx^{r-1}$ וכן $y^{''}=r(r-1)x^{r-2}$. נציב:

$$L[x^r]=r(r-1)x^r+\alpha rx^r+\beta x^r=x^r(r(r-1)+\alpha r+\beta)=0$$

וקל לראות ששוויון זה מתקיים אם ורק אם $r(r-1)+\alpha r+\beta=0$. כלומר המרנו את הבעיה בבעיה של מציאת שורשי הפולינום:

$$F(r):=r(r-1)+\alpha r+\beta=r^2+(\alpha-1)r+\beta$$

לשם כך נדון בשלושה מקרים אפשריים:

- **מקרה ראשון:** $(\alpha-1)^2-4\beta>0$

במקרה זה מתקבלים שני פתרונות שונים לפולינום, מהצורה $r_{1,2}=-\frac{(\alpha-1)\pm\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2}$, ומהם נובעים שני פתרונות שונים x^{r_1},x^{r_2}.

קל לחשב ולראות כי $W(x^{r_1},x^{r_2})\neq 0$ בנקודה מסוימת ולכן גם בכל נקודה, ולכן מצאנו שני פתרונות בלתי תלויים לינארית.

- **מקרה שני:** $(\alpha-1)^2-4\beta=0$

במקרה זה מתקבל פתרון אחד על ידי $y_1=x^{r_1}$ עבור $r_1=-\frac{(\alpha-1)}{2}$. את הפתרון הנוסף ניתן היה למצוא על ידי הורדת סדר, אולם כאן נשתמש בטריק אחר.

היות ולפולינום $F(r)=r^2+(\alpha-1)r+\beta$ יש שורש ממשי יחיד $r_1:=-\frac{\alpha-1}{2}$, ניתן לכתוב אותו $F(r)=(r-r_1)^2$. לכן $L[x^r]=x^rF(r)=x^r(r-r_1)^2$.

נגזור לפי r את המשוואה ונקבל מצד אחד:

$$\frac{d}{dr}L[x^r]=L\left[\frac{d}{dr}x^r\right]=L[x^r\ln x]$$

ומצד שני:

$$\frac{d}{dr}L[x^r]=\frac{d}{dr}\left(x^r(r-r_1)^2\right)=x^r\ln x\,(r-r_1)^2+2x^r(r-r_1)$$

מכאן שאם נציב $r=r_1$ מתקבל פתרון חדש:

$$L[x^{r_1}\ln x]=x^{r_1}\ln x\,(r_1-r_1)^2+2x^{r_1}(r_1-r_1)=0$$

ונקבל כי $y_2=x^{r_1}\ln x$ מהווה פתרון נוסף.

קל לחשב ולראות כי $W(x^{r_1}\ln x,x^{r_1})\neq 0$ ולכן אלו פתרונות בלתי תלויים לינארית.

- **מקרה שלישי:** $(\alpha-1)^2-4\beta<0$

במקרה זה קיימים לפולינום $F(r)$ שני שורשים מרוכבים מהצורה הכללית $r_{1,2}=\lambda\pm\mu i$.[10] מכאן נקבל שני פתרונות:

$$x^{r_{1,2}}=e^{\ln x^{r_{1,2}}}=e^{r_{1,2}\ln x}=e^{\lambda\ln x}e^{\pm\mu i\ln x}=e^{\lambda\ln x}(\cos(\mu\ln x)\pm i\sin(\mu\ln x))$$

[10] זוג שורשים מרוכבים של פולינום ריבועי הם צמודים.

6.3.2 פתרון כללי

תהי $L[y] := P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ משוואה, כאשר P,Q,R פונקציות אנליטיות, ונניח כי $x_0 = 0$ נקודה סינגולרית רגילה של המשוואה.[11]
הזכרנו כי היות 0 נקודה סינגולרית רגילה שקול לכך שהפונקציות $q(x) := x\frac{Q(x)}{P(x)},\ r(x) := x^2\frac{R(x)}{P(x)}$ אנליטיות ב־0. אם כך נסמן:

$$x \cdot q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \ , \quad x^2 \cdot r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

נחלק את המשוואה ב־$P(x)$ ונכפול ב־x^2, ונקבל את הצורה:

$$x^2y'' + x^2q(x)y' + x^2r(x)y = 0$$

נכתוב זאת באמצעות טור טיילור של הפונקציות q,r:

$$x^2y'' + x \cdot xq(x)y' + x^2r(x)y = x^2y'' + x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) y' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n\right) y = 0$$

נשים לב שקיבלנו הכללה של משוואות אוילר, שכן כאשר $q_n = r_n = 0$ לכל $n > 0$, מתקבלת משוואת אוילר (בסימון הקודם: $q_0 = \alpha,\ r_0 = \beta$).
נחפש פתרון מהצורה $y = x^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לאיזה $r \in \mathbb{R}$. נחשב את הנגזרות:

$$y = x^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

נציב ונחשב כל אחד מהמחוברים במשוואה:

$$x^2y'' = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x^2q(x)y' = x \cdot x \cdot q(x)y' &= x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}\right) = \\ = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} (k-j+r)\, a_{k-j} q_j x^{k+r} \end{aligned} \tag{2}$$

[11] ללא הגבלת הכלליות בחרנו $x_0 = 0$, אך הדיון יהיה נכון בעיקרו לכל נקודה סינגולרית רגילה.

$$x^2 r(x) y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} r_j x^{k+r} \qquad (3)$$

כאשר בחישובים אלה השתמשנו בנוסחה למכפלת טורים שהזכרנו לעיל.
אם כך נקבל את המשוואה:

$$0 = x^2 y^{''} + x^2 q(x) y^{'} + x^2 r(x) y = (1) + (2) + (3) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} (k-j+r) a_{k-j} q_j x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} r_j x^{k+r}$$

נדרוש את התאפסות המקדמים של כל החזקות, כלומר:

- עבור המקדמים של האיבר הראשון, $x^0 = 1$, נקבל את המשוואה:

$$0 = r(r-1) a_0 + r a_0 q_0 + a_0 r_0 = a_0 \left(r^2 + (q_0 - 1) r + r_0\right) := a_0 F(r)$$

- עבור המקדם של איבר x^{n+r} כללי, נקבל את המשוואות:

$$0 = a_n F(r+n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left((r+j) q_{n-j} + r_{n-j}\right)$$

עבור כל $n \geq 1$.

כאשר בשני המקרים $F(r) := r^2 + (q_0 - 1) r + r_0$ הוא הפולינום שהגדרנו עבור משוואת אוילר (שם $q_0 = \alpha,\ r_0 = \beta$).

נשים לב שמשוואה כללית זו מגדירה נוסחת נסיגה עבור כל המקדמים a_n, באופן התלוי ב־r, כלומר $a_n = a_n(r)$, כאשר r בוחרים להיות שורש של הפולינום $F(r)$.
עם זאת, לא תמיד משוואה כללית זו מגדירה פתרון באופן פשוט. לשם כך יש לטפל בכמה מקרים, ואנו נטפל רק בחלקם:

- **מקרה ראשון:** $(q_0 - 1)^2 - 4r_0 > 0$ וגם $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$.

במקרה זה מתקבלים שני פתרונות שונים לפולינום, מהצורה $r_{1,2} = -\frac{(q_0-1) \pm \sqrt{(q_0-1)^2 - 4r_0}}{2}$.
נניח ללא הגבלת הכלליות כי $r_1 > r_2$. במקרה כזה $F(n+r) \neq 0$ לכל $n > 0$, שכן ל־F יש בדיוק שני שורשים. אם כך נוסחת הנסיגה מוגדרת היטב עבור $a_n = a_n(r_1)$, ומתקבל פתרון ראשון למשל על ידי בחירת $a_0 = 1$ ואז רקורסיבית מתקבלים המקדמים $a_n = a_n(r_1)$, ומתוכם נובע הפתרון:

$$y_1 = x^{r_1} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right)$$

כעת עבור r_2, היות והנחנו $r_1-r_2\notin\mathbb{N}$ נובע כי $F(r_2+n)\neq 0$ לכל n, ולכן באותו אופן נוסחת הנסיגה מגדירה פתרון נוסף:

$$y_2=x^{r_2}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_2)x^n\right)$$

- **מקרה שני:** $(q_0-1)^2-4r_0>0$ וגם $r_1-r_2\in\mathbb{N}$.

במקרה זה הפתרון השני אינו מוגדר, שכן $F(r_1+n_0)=0$ לאיזה n_0. במקרה זה לא נטפל במפורט, אך מתקבל בו פתרון שני מהצורה:

$$y_2=j\cdot y_1\ln(x)+x^r\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(r)x^n\right)$$

כאשר $j\in\{0,1\}$,[12] והמקדמים $b_n(r)$ מתקבלים רקורסיבית על ידי הצבה במשוואה המקורית והשוואת מקדמים.

- **מקרה שלישי:** $(q_0-1)^2-4r_0=0$

במקרה זה מתקבל פתרון אחד לפולינום, מהצורה $r_1=r_2=-\frac{p_0-1}{2}$. לכן מתקבל פתרון ראשון על ידי:

$$y_1=x^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right)$$

כדי למצוא את הפתרון השני נשתמש בטריק. נכתוב באופן כללי $y=y(r,x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)x^n$.

תרגיל: הפונקציה $a_n(r)$ גזירה (כפונקציה של r).[13]

תרגיל: $L[y(r,x)]=a_0F(r)x^r$.

כעת נגזור את שני אגפי השוויון האחרון לפי r, ונקבל מלינאריות צד אחד:

$$\frac{d}{dr}L[y(r,x)]=L\left[\frac{d}{dr}y(r,x)\right]$$

ומצד שני:

$$\frac{d}{dr}L[y(r,x)]=\frac{d}{dr}\left(a_0F(r)x^r\right)=a_02(r-r_1)x^r+a_0(r-r_1)^2x^r\ln x$$

נציב את $y_1(r_1,x)$ ונקבל:

$$L\left[\frac{d}{dr}y_1(r,x)\mid_{r=r_1}\right]=a_02(r_1-r_1)x^r+a_0(r_1-r_1)^2x^r\ln x=0$$

כלומר קיבלנו פתרון נוסף:

$$y_2=\frac{d}{dr}y_1(r,x)\mid_{r=r_1}=y_1\ln(x)\mid_{r=r_1}+x^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{'}(r_1)x^n\right)$$

---

[12] ישנם מקרים בהם המחובר $y_1\ln(x)$ אינו נדרש לפתרון, ולשם כך אולי $j=0$.

[13] קל להראות באינדוקציה.

* **מקרה רביעי:** $(q_0-1)^2-4r_0<0$

במקרה זה קיימים לפולינום $F(r)$ שני שורשים מרוכבים מהצורה הכללית $r_{1,2}=\lambda\pm\mu i$,[14] ולכן מתקיים:

$$x^{r_{1,2}}=e^{\ln x^{r_{1,2}}}=e^{r_{1,2}\ln x}=e^{\lambda\ln x}e^{\pm\mu i\ln x}=e^{\lambda\ln x}\left(\cos\left(\mu\ln x\right)\pm i\sin\left(\mu\ln x\right)\right)$$

מכאן נקבל שני פתרונות:

$$y_{1,2}=x^{r_{1,2}}\cdot\left(\cos\left(\mu\ln x\right)+i\sin\left(\mu\ln x\right)\right)\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(r_{1,2}\right)x^n\right)$$

נשים לב שבמקרה זה נוסחת הנסיגה דורשת חישוב של מספרים מרוכבים, ולכן לא נטפל במקרה זה במפורט.

עם זאת נשים לב כי אם מוצאים פתרון מרוכב, החלק הממשי שלו הוא פתרון ממשי.

הערה: בכל המקרים שהתקבל בהם פתרון מהצורה $x^r\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(r\right)x^n\right)$ סביב $x_0=0$ (בה"כ), פתרון זה מוגדר גם בתחום שלילי על ידי לקיחת $\left|x\right|^r$ במקום x^r.

[14] זוג שורשים מרוכבים של פולינום ריבועי הם צמודים.

חלק III
משוואות דיפרנציאליות מסדר כללי

בחלק זה נדון במשוואות שהסדר שלהן הוא n כלשהו. כלומר משוואות מהצורה $0 = f\left(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)$.

נטפל רק במשוואות בהן ניתן לבודד את $y^{(n)}$, כלומר משוואות מהצורה:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}\right)$$

נניח עוד כי f לינארית במשתנים $y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}$, כלומר היא מהצורה הכללית:

$$L[y] := y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y = g(x)$$

ונניח עוד כי $p_1, ..., p_n, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ כולן רציפות.

כמו במקרים $n = 1, 2$, גם כאן כדי לקבוע פתרון ביחידות נדרש תנאי התחלה, אלא שעבור סדר n כללי הוא מהצורה:

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0 \\ y^{'}(x_0) = y_0^{'} \\ y^{''}(x_0) = y_0^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{gathered}$$

עבור $x_0 \in (\alpha, \beta)$ כלשהי.

משפט הקיום והיחידות לפתרון משוואות לינאריות מסדר כללי: תהי המשוואה $L[y] := y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y = g(x)$ עבור $p_i, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ רציפות, עם תנאי התחלה $\left(y_0, ..., y_0^{(n-1)}\right)$ ב־x_0.

אזי קיים לה פתרון יחיד המקיים את תנאי ההתחלה המוגדר על כל (α, β).

טענה: כל פתרון של המשוואה $L[y] = g(x)$ הוא מהצורה $y = \tilde{y} + y_p$, כאשר $\tilde{y}$ פתרון הומוגני כלשהו (כלומר $L[\tilde{y}] = 0$) ואילו y_p פתרון פרטי כלשהו של $L[y] = g(x)$.

טענה: $\dim \ker(L) = n$.[15]

הגדרה: תהי קבוצת פונקציות $y_1, ..., y_n \in \ker(L)$.

נגדיר את ה**וורונסקיאן** שלהן להיות הפונקציה:

$$W(y_1, ..., y_n)(x) := \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) & \dots & y_n^{'}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

[15] $\ker(L)$ מרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית $L[y] = 0$.

טענה: קבוצה $y_1, ..., y_n \in \ker(L)$ היא בסיס, אם ורק אם $W(y_1, ..., y_n)(x_0) \neq 0$.

במקרה כזה קוראים לקבוצה $y_1, ..., y_n$ **מערכת יסודית של פתרונות**.

הוכחה: תהי $y \in \ker(L)$. צריך להראות שניתן להציג אותה בצורה $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ עבור $c_i \in \mathbb{R}$ כלשהן.

כדי שיתקיים תנאי ההתחלה $\left(y_0, y_0^{'}, ..., y_0^{(n-1)}\right)$ בנקודה x_0, צריכה להתקיים מערכת בת n משוואות:

$$\begin{gathered} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + ... + c_n y_n(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1^{'}(x_0) + c_2 y_2^{'}(x_0) + ... + c_n y_n^{'}(x_0) = y_0^{'} \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{gathered}$$

ובכתיב מטריציאלי:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1^{'}(x_0) & y_2^{'}(x_0) & \dots & y_n^{'}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^{'} \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

וברור כי מתקבל פתרון עבור $(c_1, c_2, ..., c_n)$ אם ורק אם המטריצה שמשמאל הפיכה, כלומר אם ורק אם $W(y_1, ..., y_n)(x_0) \neq 0$. ■

טענה: נניח שידועים $y_1, ..., y_n$ פתרונות של המשוואה ההומוגנית $L[y] = 0$. אזי ניתן למצוא פתרון פרטי y_p למשוואה $L[y] = g(x)$ על ידי **וריאציה של פרמטרים**.

פיתוח: נסמן את הפתרון הפרטי $y_p = u_1 y_1 + ... + u_n y_n$, כאשר $u_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות במשתנה x.

זו משוואה אחת עם n נעלמים, ולכן עלינו להניח $n-1$ משוואות נוספות.

נניח אם כן כי:

$$u_1^{'} y_1^{(j)} + ... + u_n^{'} y_n^{(j)} = 0$$

לכל $j = 0, ..., n-2$, ואילו עבור $j = n-1$ נניח:

$$u_1^{'} y_1^{(n-1)} + ... + u_n^{'} y_n^{(n-1)} = g$$

בכתיב מטריציאלי נקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) & \dots & y_n^{'}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{:A} \begin{pmatrix} u_1^{'} \\ u_2^{'} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{'} \\ u_n^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

במקרה בו $y_1,...,y_n$ קבוצה יסודית של פתרונות המטריצה A הפיכה בנקודה x_0, ולכן ניתן לקבוע ביחידות את $\left(u_1^{'},...,u_n^{'}\right)$ על ידי הנוסחה הכללית:[16]

$$u_j^{'}=\frac{g\left(x\right)W_j\left(x\right)}{W\left(y_1,...,y_n\right)\left(x\right)}$$

כאשר $W_j\left(x\right)=\left(-1\right)^{j+n}M_{nj}$ עבור M_{nj} הדטרמיננטה של המינור ה־nj של A.[17]

לכן נקבל את הפתרון הפרטי:

$$y_p=\sum_{j=1}^{n}y_jv_j$$

כאשר:

$$v_j:=\int^{x}\frac{g\left(t\right)u_j^{'}\left(t\right)}{W\left(y_1,...,y_n\right)\left(t\right)}dt$$

■

[16]**תזכורת:** תהי $B\in\mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ המקיימת $\det\left(B\right)\neq0$.
אזי $\left(B^{-1}\right)_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ji}$, כאשר M_{ji} היא הדטרמיננטה של המינור ה־j,i.

[17]נשים לב שלכל $l=0,...,n-1$ מתקיים $M_{nl}=0$ מההנחה.

חלק IV
מערכות משוואות דיפרנציאליות

7 מבוא: הגדרות וסימונים

הקדמה: תהי $y^{(n)}=f\left(t,y,y^{'},...,y^{(n-1)}\right)$ משוואה במשתנים $y=y\left(t\right)$, t. נסמן:

$$\begin{gathered}x_{1}\left(t\right):=y\left(t\right)\\x_{2}\left(t\right):=y^{'}\left(t\right)\\\vdots\\x_{n}\left(t\right):=y^{(n-1)}\left(t\right)\end{gathered}$$

ונקבל בהתאמה:

$$\begin{gathered}x_{1}^{'}\left(t\right)=x_{2}\left(t\right)\\x_{2}^{'}\left(t\right)=x_{3}\left(t\right)\\\vdots\\x_{n-1}^{'}\left(t\right)=x_{n}\left(t\right)\\x_{n}^{'}\left(t\right)=\frac{d}{dt}y^{(n-1)}\left(t\right)=y^{(n)}\left(t\right)=f\left(t,y,y^{'},...,y^{(n-1)}\right)\end{gathered}$$

מתקבלת מערכת של משוואות דיפרנציאליות השקולה למשוואה הדיפרנציאלית מסדר n איתה התחלנו.

כלומר, כל פתרון של המשוואה $y^{(n)}=f$ הוא גם פתרון של המערכת, ולהיפך.

הגדרה: מערכת של משוואות דיפרנציאליות היא קבוצת משוואות מהצורה:

$$\begin{gathered}x_{1}^{'}=f_{1}\left(t,x_{1},...,x_{n}\right)\\\vdots\\x_{n}^{'}=f_{n}\left(t,x_{1},...,x_{n}\right)\end{gathered}$$

כאשר $x_{j}=x_{j}\left(t\right):\left(\alpha,\beta\right)\to\mathbb{R}$ וכאשר $x_{j}^{'}=x_{j}^{'}\left(t\right)=\frac{d}{dt}x_{j}\left(t\right)$ פונקציות גזירות, לכל $j=1,...,n$.

תנאי התחלה הוא אילוץ מהצורה $\vec{x}\left(t_{0}\right)=\vec{x}^{0}\in\mathbb{R}^{n}$ עבור $t_{0}\in\left(\alpha,\beta\right)$.

סימון: ניתן לכתוב בצורה מטריציאלית את המערכת. נסמן:

$$\vec{x}\left(t\right):=\left(x_{1}\left(t\right),...,x_{n}\left(t\right)\right)^{T}$$

ובהתאמה:

$$\vec{x}\left(t\right)^{'}=\left(x_{1}^{'}\left(t\right),...,x_{n}^{'}\left(t\right)\right)^{T}$$

ונסמן:

$$\vec{f}:=\left(f_{1},...,f_{n}\right)^{T}$$

כאשר $\vec{f}:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ (זו פונקציה במשתנים $t,x_1,...,x_n$).
בסימונים אלה ניתן לכתוב מערכת כללית של משוואות דיפרנציאליות על ידי:

$$\vec{x}(t)^{'}=\vec{f}(t,\vec{x}(t))$$

הערה: השוני בסימונים נובע מהפרשנות אליה מתייחסים בהקשר זה של מערכות משוואות.
המשתנה t מתאר זמן, כך שגרף הפונקציה $\vec{x}(t)$ הוא עקומה ב־$\mathbb{R}^n$ (למשל מסלול מעופו של זבוב), והפונקציה $\vec{x}(t)^{'}$ מתארת את הגודל והכיוון של העקומה. כלומר, גודל המהירות הוא $\left\|\vec{x}(t)^{'}\right\|$ וכיוון המהירות הוא $\vec{x}(t)^{'}/\left\|\vec{x}(t)^{'}\right\|$.

בהקשר זה, הפונקציה $\vec{f}$ היא **שדה וקטורי**. כלומר היא מתארת את כל הכיוונים במרחב שמכוונים את העקומה $\vec{x}(t)$.

הערה: המקרה של $y^{(n)}=f\left(t,y,y^{'},...,y^{(n-1)}\right)$, אותו הצגנו כמערכת משוואות מנוונת, ניתן להצגה בסימון החדש על ידי:

$$\vec{x}(t)^{'}=\vec{f}(t,\vec{x}(t))$$

כאשר $f_j(t,x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))=x_{j+1}(t)$ לכל $j=1,...,n-1$, ואילו $f_n(t,x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))=\dot{x}_n(t)$.

8 משפט הקיום והיחידות לפתרון מערכות משוואות

משפט הקיום והיחידות לפתרון מערכות משוואות: תהי $\vec{f}:D\to\mathbb{R}^n$ פונקציה רציפה, עבור D תיבה $n+1$־ממדית מהצורה:

$$D:\{(t,\vec{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mid |t-t_0|\leq a,\ \|\vec{x}-\vec{x}_0\|\leq b\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

נניח עוד כי $\vec{f}$ היא K־ליפשיצית במשתנה $\vec{x}$ במידה שווה ב־t. כלומר, קיים קבוע $K\geq 0$ כך שלכל $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in\mathbb{R}^n$, לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left\|\vec{f}(t,\vec{x}_1)-\vec{f}(t,\vec{x}_2)\right\|\leq K\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|$$

אזי למשוואה $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x}(t))$ יחד עם תנאי התחלה $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ קיים פתרון יחיד בסביבה פתוחה של t_0.
יתרה מזו, ספציפית $(t_0\pm h)$ היא סביבה פתוחה בה קיים פתרון יחיד, כאשר $h:=\min\{a,b/M\}$ עבור $M:=\sup_{(t,\vec{x})\in D}\left\{\left\|\vec{f}(t,\vec{x})\right\|\right\}$.[18]

[18] בסימון זה, גם אם $b=\infty$ אז $h=a$.

סקיצה להוכחה: ההוכחה להכללה זו של משפט הקיום והיחידות דומה מאוד להוכחה של המקרה הקודם, ונעשית על ידי איטרציות פיקארד.

מגדירים $\vec{x}_0\left(t\right):=\vec{x}_0$ (פונקציה קבועה), ובאינדוקציה מגדירים:

$$\vec{x}_{k+1}\left(t\right):=\vec{x}_0+\int\limits_{t_0}^{t}\vec{f}\left(s,\vec{x}_k\left(s\right)\right)ds$$

כאשר בהקשר זה, האינטגרל של $\vec{f}:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ מוגדר רכיב־רכיב.

המשך ההוכחה של תכונות הסדרה נעשה באופן דומה למקרה הקודם.[19]

9 מערכות משוואות דיפרנציאליות לינאריות

הגדרה: מערכת של משוואות דיפרנציאליות נקראת **לינארית**, אם הפונקציות $f_1,...,f_n$ הן פונקציות לינאריות של $x_1,...,x_n$.

מערכת משוואות לינארית היא מהצורה הכללית:

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= p_{11}\left(t\right)x_1+...+p_{1n}\left(t\right)x_n+g_1\left(t\right)\\ &\vdots\\ x_n^{'} &= p_{n1}\left(t\right)x_1+...+p_{nn}\left(t\right)x_n+g_n\left(t\right)\end{aligned}$$

ובצורה מטריציאלית:

$$\vec{x}^{'}=\mathcal{P}\left(t\right)\vec{x}+\vec{g}\left(t\right)$$

כאשר $\mathcal{P}\left(t\right)$ מטריצה $n\times n$ שהאיבר ה־ij שלה הוא $p_{ij}\left(t\right)$ וכן $\vec{g}=\left(g_1,...,g_n\right)^T$.

הגדרה: מערכת משוואות לינארית נקראת **הומוגנית**, אם $\vec{g}\equiv0$.

משפט: תהי $\vec{x}^{'}=\mathcal{P}\left(t\right)\vec{x}+\vec{g}\left(t\right)$ מערכת משוואות לינאריות, ונניח כי $g_i,p_{ij}:\left(\alpha,\beta\right)\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות לכל $i,j=1,...,n$.

יהי תנאי התחלה $\vec{x}\left(t_0\right)=\vec{x}^0\in\mathbb{R}^n$ עבור $t_0\in\left(\alpha,\beta\right)$. אזי הפתרון הכללי של המערכת הוא מהצורה:

$$\vec{x}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{x}_i\left(t\right)$$

כאשר $\vec{x}_1,...,\vec{x}_n$ קבוצה של פתרונות בלתי תלויים.

---

[19] כדאי לשים לב כי ניתן להשתמש באי־שוויון הכללי:

$$\left\|\int\vec{f}(t,\vec{x}(t))dt\right\|\leq\int\left\|\vec{f}(t,\vec{x}(t))\right\|dt\leq K\left|t-t_0\right|$$

ובכך להסיק כי $\left\{\vec{x}_k\left(t\right)\right\}_k$ היא סדרת קושי בממוצע, על ידי:

$$\left\|\vec{x}_{k+1}-\vec{x}_k\right\|=\left\|\int_{t_0}^{t}\left|\vec{f}(s,\vec{x}(s))-\vec{f}\left(s,\vec{x}_{k-1}(s)\right)\right|ds\right\|\leq K\int_{t_0}^{t}\left\|\vec{x}_k(s)-\vec{x}_{k-1}(s)\right\|ds$$

נשים לב כי אם נסמן $\vec{x}_j = (x_{1j}, ..., x_{nj})^T$ לכל $j = 1, ..., n$, נוכל להגדיר את המטריצה $\mathcal{X}(t)$ שהאיבר ה-ij שלה הוא $x_{ij}(t)$. עמודות מטריצה זו פורשות את מרחב הפתרונות של המערכת, כלומר בכתיב מטריציאלי הפתרון הכללי של המערכת הוא מהצורה:

$$\vec{x}(t) = \mathcal{X}(t)\vec{c}$$

עבור $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

הגדרה: **הוורונסקיאן** של מערכת משוואות לינאריות הוא $W(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)(t) = \det(\mathcal{X}(t))$.

9.1 מערכות משוואות הומוגניות

נדון במערכת משוואות לינאריות, כלומר מהצורה $\vec{x} = \mathcal{P}(t)\vec{x}$, שהן גם הומוגניות, כלומר $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}$ קבועה ואינה תלויה ב-t.
כדי לפתור סוג זה של משוואות נגדיר מושג חדש.

9.1.1 אקספוננט של מטריצה

הגדרה: נגדיר על מרחב המטריצות הריבועיות $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ את **נורמת האופרטור**, על ידי:

$$\|A\|_{op} := \sup_{\|\vec{x}\|_2=1} \|A\vec{x}\|_2$$

כאשר $\|\|_2$ היא הנורמה האוקלידית $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ (נשים לב כי $A\vec{x} \in \mathbb{R}^n$).

טענה: לכל $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ מתקיים:

$$\|AB\|_{op} \leq \|A\|_{op}\|B\|_{op}$$

הוכחה: תחילה נשים לב כי לכל $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, הווקטור המנורמל $\vec{y}/\|\vec{y}\|_2$ הוא בעל נורמה אוקלידית 1, ולכן תמיד:

$$\frac{1}{\|\vec{y}\|_2}\|A\vec{y}\|_{op} = \|A\vec{y}/\|\vec{y}\|_2\|_{op} \leq \sup_{\|\vec{x}\|=1}\|A\vec{x}\| = \|A\|_{op}$$

ולכן לכל $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\|A\vec{y}\|_{op} \leq \|A\|_{op}\|\vec{y}\|_2$$

כעת נוכל להסיק:

$$\|AB\|_{op} = \sup_{\|\vec{x}\|_2}\|AB\vec{x}\|_2 \leq \sup_{\|\vec{x}\|_2}\|A\|_{op}\|B\vec{x}\|_2 =$$

$$= \|A\|_{op}\sup_{\|\vec{x}\|_2}\|B\vec{x}\|_2 = \|A\|_{op}\|B\|_{op}$$

■

מסקנה: קל לראות באינדוקציה כי לכל N טבעי $\left\|A^{N}\right\|_{op} \leq \|A\|_{op}^{N}$.

הגדרה: נגדיר אופרטור $\exp : \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right) \to \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ על ידי:

$$e^{A} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{n}$$

טענה: אופרטור האקספוננט מוגדר היטב.

הוכחה: מהמסקנה האחרונה, יחד עם אי־שוויון המשולש, נובע כי:

$$\left\|\sum_{n=0}^{m+l} \frac{1}{n!} A^{n} - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} A^{n}\right\|_{op} = \left\|\sum_{n=m+1}^{l} \frac{1}{n!} A^{n}\right\|_{op} \leq$$

$$\leq \sum_{n=m+1}^{l} \frac{1}{n!} \|A\|_{op}^{n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|_{op}^{n} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

כאשר ההתכנסות בסוף היא מכך שהרי $\|A\|_{op} \in \mathbb{R}$, ולכן הסכום האחרון הוא זנבו של הטור המתכנס $e^{\|A\|_{op}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|_{op}^{n}}{n!}$.

אם כך מצאנו כי סדרת הסכומים החלקיים $\left\{\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} A^{n}\right\}_{m=0}^{\infty}$ היא סדרת קושי, ולכן e^{A} סדרת מתכנסת.[20] ■

9.1.2 גזירות אופרטור של מטריצות

נרצה לגזור את אופרטור האקספוננט כדי להראות כיצד הוא פותר את המערכת $\vec{x}^{'} = \mathcal{P}\vec{x}$. לשם כך עלינו להגדיר גזירות של אופרטור מהצורה $\mathbb{R} \to \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$.

הגדרה: באופן סטנדרטי, נאמר כי אופרטור $A\left(t\right)$ הוא **גזיר**, אם קיים הגבול:

$$A^{'}\left(t\right) := \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\left(A\left(t+\delta\right) - A\left(t\right)\right)$$

טענה 1: תהי $A\left(t\right) : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ פונקציה גזירה, במובן שהגדרנו.

אזי לכל $\vec{x} \in \mathbb{C}^{n}$, הפונקציה $A\left(t\right)\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n}$ גזירה (במובן הרגיל), ומתקיים:

$$\left(A\left(t\right)\vec{x}\right)^{'} = A^{'}\left(t\right)\vec{x}$$

[20] המרחב $\mathbb{R}^{n^2}$ הוא מרחב שלם תחת נורמת האופרטור, שכן במרחב בעל ממד סופי כל הנורמות שקולות.

הוכחה: נחשב:

$$\left\|\tfrac{1}{\delta}\left(A\left(t+\delta\right)-A\left(t\right)\right)\vec{x}-A^{'}\left(t\right)\vec{x}\right\|_{op}=$$

$$=\left\|\left(\tfrac{1}{\delta}\left(A\left(t+\delta\right)-A\left(t\right)\right)-A^{'}\left(t\right)\right)\vec{x}\right\|_{op}=$$

$$=\left\|\tfrac{1}{\delta}\left(A\left(t+\delta\right)-A\left(t\right)\right)\vec{x}-A^{'}\left(t\right)\right\|_{op}\left\|\vec{x}\right\|_{op}\underset{\delta\to0}{\longrightarrow}0$$

כאשר ההתכנסות האחרונה היא מההנחה שקיים הגבול $A^{'}\left(t\right)$ בהתאם להגדרתו, וכן כי $\left\|\vec{x}\right\|_{op}\in\mathbb{R}$. ■

טענה 2: בדומה לנגזרת סטנדרטית של אקספוננט ממשי, גם נגזרת אקספוננט של מטריצה מקיימת את הנוסחה:

$$\left(e^{At}\right)^{'}=Ae^{At}$$

כאשר $A\in\mathcal{M}_{n}\left(\mathbb{C}\right)$.

הוכחה: נחשב בהתאם להגדרה:

$$\left(e^{At}\right)^{'}=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\left(e^{A(t+\delta)}-e^{At}\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(t+\delta\right)^{n}A^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^{n}A^{n}\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\left(t+\delta\right)^{n}-t^{n}\right)A^{n}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta n!}\left(\left(t+\delta\right)^{n}-t^{n}\right)A^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(t^{n}\right)^{'}A^{n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}nt^{n-1}AA^{n-1}=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n-1\right)!}t^{n-1}A^{n-1}=Ae^{At}$$

כאשר המעבר לשורה הרביעית דורש הצדקה של החלפת הגבול והסכום האינסופי. זו למעשה גזירה איבר איבר של הטור. לשם כך נראה כי:

$$S:=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta n!}\left(\left(t+\delta\right)^{n}-t^{n}\right)A^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(t^{n}\right)^{'}A^{n}\right\|_{op}=$$

$$=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\delta}\left(\left(t+\delta\right)^{n}-t^{n}\right)-\left(t^{n}\right)^{'}\right)A^{n}\right\|_{op}\underset{\delta\to0}{\longrightarrow}0$$

יהי $\epsilon > 0$. תחילה נראה שקיים N טבעי מספיק גדול שעבורו:

$$\left\| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{(t+\delta)^n - t^n}{\delta} - (t^n)' \right) A^n \right\|_{op} < \epsilon$$

נדון ללא הגבלת הכלליות ב־$\delta < 1$. במקרה זה מתקיים:

$$\left| \frac{1}{\delta} \left((t+\delta)^n - t^n \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \delta^{j-1} t^{n-j} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \cdot \max\{1, |t|^n\} \right| = \max\{1, |t|^n\} \cdot \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} =$$

$$= \max\{1, |t|^n\} \cdot (1+1)^n = \max\{1, |t|^n\} \cdot 2^n$$

כמו כן מתקיים:

$$\left| (t^n)' \right| \leq n |t|^{n-1}$$

לכן קיים קבוע $c(t) > 0$ כך שלכל $\delta < 1$, לכל n מתקיים:

$$\left| \tfrac{1}{\delta} \left((t+\delta)^n - (t^n)' \right) - (t^n)' \right| \leq \left| \tfrac{1}{\delta} \left((t+\delta)^n - t^n \right) \right| + n |t|^{n-1} \leq$$

$$\leq \max\{1, |t|^n\} \cdot 2^n + n |t|^{n-1} := c(t)^n$$

לכן נובע כי:

$$\left\| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{(t+\delta)^n - t^n}{\delta} - (t^n)' \right) A^n \right\|_{op} \leq \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n!} c(t)^n A^n \right\|_{op} \leq$$

$$\leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n!} c(t)^n \|A\|_{op}^n = e^{c(t)\|A\|_{op}} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

לכן כמובן עבור N מספיק גדול ביטוי זה קטן כרצוננו.
כעת נשים לב שנוכל לפרק את הביטוי המקורי:

$$S \leq S_1 + S_2$$

כאשר:

$$S_1 := \left\| \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{\delta} \left((t+\delta)^n - t^n \right) - (t^n)' \right) A^n \right\|_{op}$$

$$S_2 := \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{\delta} \left((t+\delta)^n - t^n \right) - (t^n)' \right) A^n \right\|_{op}$$

נשים לב כי היות והסכום המתאר את S_1 הוא סכום סופי, ברור שניתן להחליף סדר של סכום וגזירה, ולכן $S_1=0$ כאשר $\delta\to 0$. כמו כן בחרנו את N להיות כזה כך שיתקיים $S_2<\epsilon$.

מכאן כי $\lim_{\delta\to 0} S<0+\epsilon=\epsilon$ עבור $\epsilon>0$ שרירותי, ולכן $S\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0$ כנדרש. ■

9.1.3 פתרון מערכת משוואות הומוגנית

טענה: הפתרון של מערכת מהצורה $\vec{x}^{'}=\mathcal{P}\vec{x}$ הוא $\vec{x}=\vec{x}\left(0\right)e^{\mathcal{P}t}$, במובן של אקספוננט של מטריצה.

הוכחה: כדי להראות שזה אכן פתרון, יש להראות כי:

$$\vec{x}^{'}=\left(\vec{x}\left(0\right)e^{\mathcal{P}t}\right)^{'}\overset{(1)}{=}\vec{x}\left(0\right)\left(e^{\mathcal{P}t}\right)^{'}\overset{(2)}{=}\vec{x}\left(0\right)\mathcal{P}e^{\mathcal{P}t}=\mathcal{P}\vec{x}$$

ואכן, שוויון (1) נובע מטענה 1 לעיל ושוויון (2) מטענה 2 לעיל. ■

טענה: אם $\vec{y}$ וקטור עצמי עם ערך עצמי λ של המטריצה $\mathcal{P}$, אזי הוא גם וקטור עצמי של המטריצה $e^{\mathcal{P}t}$ עם ערך עצמי $e^{\lambda t}$.

הוכחה: נחשב:

$$e^{\mathcal{P}t}\vec{y}=\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}t^{n}\mathcal{P}^{n}\right)\vec{y}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}t^{n}\mathcal{P}^{n}\vec{y}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}t^{n}\lambda^{n}\vec{y}\right)=e^{\lambda t}\vec{y}$$

■

מסקנה: אם $\mathcal{P}$ ניתנת ללכסון, כלומר יש לה n וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\vec{y}_1,...,\vec{y}_n$ עם ערכים עצמיים $\lambda_1,...,\lambda_n$ בהתאמה, אז הפתרון הכללי של המערכת הוא:

$$\vec{x}\left(t\right)=\sum_{j=1}^{n}c_{j}e^{\lambda_{j}t}\vec{y}_{j}$$

הערה: גם כאשר זה לא המצב ואין n וקטורים כנ"ל, קיימת שיטה המבוססת על צורת ז'ורדן לקבלת פתרון כללי.

דוגמה: נתבונן במשוואה $ay^{''}+by^{'}+cy=0$. נציב $x_1=y$ ונציב $x_2=y^{'}=x_1^{'}$. מתקיים:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^{'}=\begin{pmatrix}x_2\\-\frac{bx_2+cx_1}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל פתרון:

$$\vec{x}\left(t\right)=\exp\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\-\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{pmatrix}t\right)\vec{x}\left(0\right)$$

כדי לקבל פתרון מפורש נלכסן את המטריצה:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{c}{a} & \lambda+\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda+\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a} = \lambda^2+\lambda\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$$

כלומר $\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, וזה הפתרון המקורי.

חלק V

בעיות תנאי שפה

דוגמה: נתבונן במשוואה $-y^{''}=y$ על התחום $[0,2\pi]$. באופן כללי פתרונות משוואה זו הם מהצורה $c_1\sin x+c_2\cos x$ לכל $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. אולם תחת תנאי התחלה שונים המוגדרים על שפת התחום $[0,2\pi]$ מתקבלים פתרונות מסוימים שונים.

- עבור תנאי השפה $y\left(0\right)=y\left(2\pi\right)=0$, הפתרונות הן מהצורה $c\cdot\sin x$ לכל $c\in\mathbb{R}$.
- עבור תנאי השפה $y\left(0\right)=y\left(2\pi\right)$ הפתרונות נותרים כל המרחב $c_1\sin x+c_2\cos x$ לכל $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.
- עבור תנאי השפה $y\left(0\right)=0,\, y\left(2\pi\right)=1$ לא קיים פתרון, וכן עבור תנאי התחלה $y\left(2\pi\right)=c\cdot y\left(0\right)$ עבור $c\neq 1$ לא קיים פתרון.
- עבור תנאי השפה $y\left(0\right)=1,\, y\left(2\pi\right)=1$ הפתרונות הם מהצורה $c\cdot\sin x+\cos x$ לכל $c\in\mathbb{R}$.

דוגמה: נכליל את המשוואה הנ"ל, ונגדיר אותה כתלויה בפרמטר λ, על ידי $-y^{''}=\lambda y$ עם תנאי השפה $y\left(0\right)=y\left(2\pi\right)=0$.

- ניתן להראות שעבור $\lambda<0$ הפתרון הכללי הוא:

$$c_1\exp\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+c_2\exp\left(-\sqrt{-\lambda}x\right)$$

וברור כי תנאי השפה אינם מתקיימים לעולם.

- ניתן להראות שעבור $\lambda>0$ הפתרון הכללי הוא:

$$c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x$$

תחת התנאי $y\left(0\right)=y\left(2\pi\right)=0$, היות ומתקיים $y\left(0\right)=0$ נובע כי $c_1=0$, והיות ומתקיים $y\left(2\pi\right)=0$ אז $\sin\sqrt{\lambda}2\pi=0$ ולכן בהכרח $2\sqrt{\lambda}=n\pi$, כלומר $\lambda=\left({}^{n}/_{2}\right)^2$. לכן לכל n טבעי, עבור הפרמטר $\lambda_n=\left({}^{n}/_{2}\right)^2$ הפתרון הוא הכללי הוא $\sin\frac{n}{2}x$.

הערה: נתבונן במרחב הפונקציות הממשיות הרציפות על הקטע $[0,2\pi]$, כמרחב מכפלה פנימית, ביחס למכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}fgdx$.

ניתן להראות שלכל n,m מתקיים $\left\langle\sin\frac{n}{2}x,\sin\frac{m}{2}x\right\rangle=\delta_{nm}\cdot\pi$, ולכן האוסף $\left\{\sin\frac{n}{2}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ מהווה קבוצה בלתי תלויה במרחב.

בנוסף לכך ניתן להראות כי אוסף זה מהווה בסיס, כלומר כל f במרחב ניתן להציג על ידי $f=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\sin\frac{n}{2}x,f\right\rangle\cdot\sin\frac{n}{2}x$, במובן של ההתכנסות הבאה:

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|f-\sum_{n=1}^{N}\left\langle\sin\frac{n}{2}x,f\right\rangle\sin\frac{n}{2}x\right|^2dx\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$$

כלומר זהו בסיס אורתוגונלי של המרחב, ולאחר נרמול ניתן לקבל בסיס אורתונורמלי.

דוגמה: נתבונן במשוואה $-y^{''}=\lambda y$ עם תנאי השפה $y(0)=y(2\pi)$ וכן $y^{'}(0)=y^{''}(2\pi)$.
ניתן להראות שבמקרה זה עבור $\lambda>0$ הפתרון הכללי הוא:

$$c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

וניתן להראות כי תנאי השפה מתקיים אם ורק אם $\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi=2n\pi$ לאיזה n טבעי, כלומר $\lambda=n^2$, ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$c_1\cos nx+c_2\sin nx$$

עבור $n=1,2,3,...$.

עבור $\lambda=0$ הפתרון הוא $y=c$ לכל $c\in\mathbb{R}$.

במקרה זה לאוסף $\left\{n^2\right\}_{n=0}^{\infty}$ (המתאים ל־$\lambda=n^2$) נקרא אוסף "הערכים העצמיים" של המשוואה, ולאוסף הפתרונות המתאימים $\{1\}\cup\{c_1\sin nx\}_{n=0}^{\infty}\cup\{c_2\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ נקרא אוסף "הפונקציות העצמיות" של המשוואה.

נשים לב שלכל $n\geq 1$ קיימות שתי פונקציות עצמיות בלתי תלויות המתאימות לו: $\sin nx,\cos nx$.

הערה: נשים לב שאוסף הפונקציות העצמיות של משוואה זו ביחס לתנאי השפה הנ"ל, הוא "בסיס פורייה" של מרחב הפונקציות הממשיות. כלומר, באופן שהזכרנו בהערה לעיל, גם אוסף זה מהווה בסיס אורתוגונלי של מרחב הפונקציות הרציפות ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל, ופיתוח פונקציות לפי בסיס זה הואמה שמכונה "טור פורייה".

10 בעיות שטורם־ליוביל

הגדרה: יהיו $p,q,r:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות עבור $a,b\in\mathbb{R}$. נניח עוד כי q,r פונקציות חיוביות ממש, ונניח עוד כי r פונקציה גזירה ברציפות.[21]

נגדיר **בעיית שטורם־ליוביל** עם פרמטר $\lambda\in\mathbb{R}$ להיות המשוואה:

$$\left[r(x)y^{'}\right]^{'}+\left[p(x)+\lambda q(x)\right]y=0$$

יחד עם תנאי שפה מהצורה:

$$a_1y(a)-a_2y^{'}(a)=0$$

$$b_1y(b)-b_2y^{'}(b)=0$$

כאשר $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ מקיימים $(a_1,a_2)\neq(0,0)$ וכן $(b_1,b_2)\neq(0,0)$ (כלומר לא שניהם יחד אפסים).

דוגמאות: תנאי שפה המגדירים בעיית שטורם־ליוביל הם למשל מהצורה $y(a)=y(b)=0$ (כלומר עבור $a_2=b_2=0$. תנאי זה מכונה "תנאי שפה דיריכלה") או $y^{'}(a)=y^{'}(b)=0$ (כלומר עבור $a_1=b_1=0$. תנאי זה מכונה "תנאי שפה נוימן"), או $y(a)=y^{'}(b)=0$ (כלומר $a_2=b_1=0$), וכדומה.

לעומת זאת תנאי השפה $y(a)=y(b)$ וגם $y^{'}(a)=y^{'}(b)$ אינו תנאי שטורם־ליוביל.

[21] כאשר בקצוות התחום מדובר בגזירות חד־כיוונית.

הגדרה: נאמר כי פרמטר $\lambda\in\mathbb{C}$ הוא **ערך עצמי** של בעיית שטורם ליוביל, אם קיים עבורו פתרון תחת תנאי השפה של הבעיה.

לפתרון כלשהו המתאים לערך־עצמי λ נקרא, נקרא **פונקציה עצמית** של הבעיה, ופונקציה זו מוגדרת ביחס לערך העצמי הנ"ל.

משפט: לבעיית שטורם־ליוביל מתקיימים הדברים הבאים:

1. קיימת סדרה אינסופית של ערכים עצמיים $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ עם פונקציות עצמיות מתאימות $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, וכל הערכים העצמיים ממשיים.
2. לכל ערך עצמי קיימת פונקציה עצמית מתאימה יחידה (עד כדי כפל בקבוע).
3. הפונקציות העצמיות המתאימות לערכים עצמיים שונים הן אורתוגונליות ביחס למכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_q=\int_a^b fgqdx$.[22]
4. הפונקציות העצמיות הללו מהוות בסיס של מרחב הפונקציות הרציפות עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_q=\int_a^b fgqdx$.

הערה: את סעיפים 1,4 לא נוכיח. הם דורשים כלים מתקדמים יותר שלא נראה בקורס זה.

הוכחה (של סעיף 2)**:** סעיף זה נובע ישירות ממשפט הקיום והיחידות, שכן $a_1y(a)-a_2y'(a)=0$ מתפקד כתנאי התחלה המגדיר את הפתרון באופן יחיד (עד כדי כפל בקבוע).

הוכחה (של סעיף 3)**:** יהיו y_n,y_m זוג פונקציות עצמיות שונות של הבעיה עם ערכים עצמיים λ_n,λ_m בהתאמה. כלומר:

$$\left[r(x)y_n'\right]'+\left[p(x)+\lambda_nq(x)\right]y_n=0$$

$$\left[r(x)y_m'\right]'+\left[p(x)+\lambda_mq(x)\right]y_m=0$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב־y_n ואת המשוואה השנייה ב־y_m, ונחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה:

$$y_n\left[r(x)y_m'\right]'+y_n\left[p(x)+\lambda_mq(x)\right]y_m-y_m\left[r(x)y_n'\right]'-y_m\left[p(x)+\lambda_nq(x)\right]y_n=0$$
$$\Downarrow$$
$$y_n\left[r(x)y_m'\right]'-y_m\left[r(x)y_n'\right]'=y_m\left[p(x)+\lambda_nq(x)\right]y_n-y_n\left[p(x)+\lambda_mq(x)\right]y_m$$
$$\Downarrow$$
$$y_n\left[r(x)y_m'\right]'-y_m\left[r(x)y_n'\right]'=y_m\lambda_nq(x)y_n-y_n\lambda_mq(x)y_m=(\lambda_n-\lambda_m)y_my_nq$$

נבצע אינטגרציה dx של המשוואה בתחום $[a.b]$, ונקבל לפי אינטגרציה בחלקים:

$$y_nry_m'\mid_a^b-\int\limits_a^b ry_m'y_n'dx-\left(y_mry_n'\mid_a^b-\int\limits_a^b ry_n'y_m'dx\right)=$$

$$=(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b y_my_nqdx\underset{\text{by def}}{=}(\lambda_n-\lambda_m)\langle y_m,y_n\rangle_q$$

[22] כאשר q היא הפונקציה המתאימה שהוגדרה בבעיית שטורם־ליוביל.

כלומר:

$$y_n r y_m^{'} \mid_a^b - y_m r y_n^{'} \mid_a^b = (\lambda_n - \lambda_m) \langle y_m, y_n \rangle_q$$

כעת נשים לב כי מהצבת הקצוות a, b בנוסחת האינטגרל נקבל כי הביטוי מימין הוא:

$$\left[y_n(b) r(b) y_m^{'}(b) - y_n(a) r(a) y_m^{'}(a)\right] - \left[y_m(b) r(b) y_n^{'}(b) - y_m(a) r(a) y_n^{'}(a)\right]$$

והצבה של תנאי השפה של הבעיה נובע בקלות כי הביטוי העליון הוא אפס, כלומר קיבלנו $(\lambda_n - \lambda_m) \langle y_m, y_n \rangle_q = 0$. לכן אם $\lambda_n \neq \lambda_m$ אז בהכרח $\langle y_m, y_n \rangle_q = 0$.

הוכחה (של חלק מסעיף 1)**:** נניח כי $\lambda = \alpha + i\beta$ ערך עצמי מרוכב של הבעיה, ונניח כי $y = u + iv$ פונקציה עצמית מתאימה לו.

לא קשה לראות כי $\overline{y} = u - iv$ היא פונקציה עצמית מתאימה לערך העצמי $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. באמצעות חישוב דומה לזה שעשינו בחלק הקודם של ההוכחה, ניתן להראות כי:

$$0 = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \langle y, \overline{y} \rangle_q = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \int_a^b y\overline{y} q dx = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \int_a^b |y|^2 q dx$$

אבל $\int_a^b |y|^2 q dx > 0$ כי q חיובית ממש לפי הגדרת בעיית שטורם־ליוביל, ולכן בהכרח $\lambda = \overline{\lambda}$, כלומר $\beta = 0$ ולכן $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

חלק VI

פתרון משוואות באמצעות התמרת לפלס

11 התמרת לפלס

הגדרה: תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נגדיר את **התמרת לפלס** שלה להיות הפונקציה:

$$F(s)=\mathcal{L}[f](s):=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

הערה: נשים לב כי $F(s)$ אינה מוגדרת בהכרח לכל $s\in\mathbb{R}$, אולם ברור כי אם היא מוגדרת לאיזה $\tilde{s}\in\mathbb{R}$ אז היא בהכרח מוגדרת גם על כל $[\tilde{s},\infty)$.

תזכורת: אינטגרל של פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כלשהי על תחום אינסופי $[0,\infty)$ נקרא **מתכנס**, אם קיים הגבול:

$$\int_0^\infty g(x)\,dx:=\lim_{R\to\infty}\int_0^R g(x)\,dx$$

והוא נקרא **מתכנס בהחלט**, אם קיים הגבול:

$$\int_0^\infty |g(x)|\,dx:=\lim_{R\to\infty}\int_0^R |g(x)|\,dx$$

כך למשל האינטגרל של $x\sin x^4$ מתכנס על $[0,\infty)$, אך בבירור לא מתכנס בהחלט.
כך גם למשל האינטגרל של $e^{\alpha x}\cos e^{\beta x}$ עבור $\beta>\alpha$ מתכנס על $[0,\infty)$ אך בבירור לא מתכנס בהחלט.

טענה: לכל $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ שעבורן $\mathcal{L}[f](\tilde{s}),\mathcal{L}[g](\tilde{s})$ מוגדרים ומתכנסים בהחלט, אזי מוגדר גם $\mathcal{L}[f+g](\tilde{s})$, ומתקיים השוויון:

$$\mathcal{L}[f+g](\tilde{s})=\mathcal{L}[f](\tilde{s})+\mathcal{L}[g](\tilde{s})$$

הוכחה: נחשב:

$$\mathcal{L}[f+g](\tilde{s})=\int_0^\infty e^{\tilde{s}t}f(t)\,dt+\int_0^\infty e^{\tilde{s}t}g(t)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{\tilde{s}t}\left(f(t)+g(t)\right)dt=\mathcal{L}[f+g](\tilde{s})$$

כאשר המעבר בין השורה הראשונה לשנייה התאפשר כי הנחנו התכנסות בהחלט. ■

טענה: תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח שקיימים קבועים $c,C>0$ שעבורם $|f(t)|<ce^{Ct}$ לכל $t\in[0,\infty)$.

אזי התמרת לפלס $\mathcal{L}[f]$ מוגדר ומתכנס בהחלט על התחום (C,∞).

הוכחה: לכל $s\in[0,\infty)$ מתקיים:

$$\int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right|dt \le \int_0^\infty ce^{(-s+C)t}dt = c\int_0^\infty e^{(-s+C)t}dt$$

וברור כי לכל $s>C$ אינטגרל זה מתכנס. ∎

משפט: נתבונן בהתמרת לפלס כטרנספורמציה מהצורה $\mathcal{L}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, כאשר $\mathcal{C},\mathcal{D}$ מרחבי פונקציות המוגדרים על ידי:

$$\mathcal{C}:=\left\{f:[0,\infty)\to\mathbb{R}\mid f \text{ is continuous and } \exists_{0<C_f\in\mathbb{R}}\ \sup_t|f(t)|e^{-C_ft}<\infty\right\}$$

$$\mathcal{D}:=\left\{f:[0,\infty)\to\mathbb{R}\mid \exists_{0<D_f\in\mathbb{R}}\ f \text{ is smooth on the interval } [D_f,\infty)\right\}$$

ומתבוננים במרחב $\mathcal{D}$ כמרחב מחלקות השקילות המתקבל מיחס השקילות:

$$\exists_{0<B\in\mathbb{R}} f\mid_{[B,\infty)}=g\mid_{[B,\infty)} \iff f\sim g$$

אזי $\mathcal{L}$ היא טרנספורמציה לינארית הפיכה, ומתקיימת **נוסחת פוסט**:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}F^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)$$

כאשר $F(s)=\mathcal{L}[f](s)$.

לא נוכיח את המשפט בקורס זה.

הערה: מנוסחת פוסט שהזכרנו במשפט נובע מספיק לדעת מה קורה באינסוף כדי להבין את התמרת לפלס של פונקציה.

דוגמאות: נראה דוגמאות להתמרות לפלס של פונקציות ידועות:

1. $\mathcal{L}[0](s)=0$
2. $\mathcal{L}[c](s)=\int_0^\infty e^{-st}cdt=\frac{c}{s}$
3. $\mathcal{L}[e^{at}](s)=\int_0^\infty e^{(-s+a)t}=\frac{1}{s-a}$ רק עבור $s>a$.

11.1 תכונות ושימושים של התמרת לפלס

משפט: תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, ונניח שקיימים קבועים $c,C>0$ שעבורם $|f(t)|<ce^{Ct}$ לכל $t\in[0,\infty)$.

אזי $\mathcal{L}\left[f'\right],\mathcal{L}[f]$ מוגדרים על (C,∞), ומתקיימת הנוסחה:

$$\mathcal{L}\left[f'\right](s)=s\mathcal{L}[f](s)-f(0)$$

כלומר, התמרת לפלס הופכת את אופרטור הגזירה לאופרטור כפל בפרמטר והזזה.

הערה: נשים לב שאת העובדה כי $\mathcal{L}[f]$ מוגדר כבר ראינו לעיל שנובעת מתוך ההנחה במשפט, אך העובדה כי $\mathcal{L}\left[f^{'}\right]$ מוגדר אינה ברורה.

מסקנה: ניתן להראות באינדוקציה כי אם $f^{'}, f^{''}, f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ קיימות ורציפות, וכן גם קיימים קבועים $c, C > 0$ שעבורם $\left|f^{(j)}(t)\right| \leq ce^{Ct}$ לכל $j = 0, ..., n-1$, אז קיימים $\mathcal{L}\left[f^{(j)}\right]$ עבור $j = 0, ..., n$, ומתקיימת הנוסחה:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \left[s^{n-1} f(0) + ... + s f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\right]$$

הוכחה: נחשב לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\mathcal{L}\left[f^{'}\right](s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} f^{'}(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[e^{-st} f(t) - \left(-\int_0^T s e^{-st} f(t)\,dt\right)\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} e^{-sT} f(T) - e^0 f(0) + s \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt = f(0) + s\mathcal{L}[f](s)$$

■

דוגמה: נתבונן במשוואה $y^{''} - 5y^{'} + 6y = 0$ עם התנאי $y(0) = 3$ וכן $y^{'}(0) = -1$. ברור כי $\mathcal{L}[0] \equiv 0$, ולכן נקבל:

$$\mathcal{L}\left[y^{''} - 5y^{'} + 6y\right] = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{L}\left[y^{''}\right] - 5\mathcal{L}\left[y^{'}\right] + 6\mathcal{L}[y] = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\left(s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y^{'}(0)\right) - 5\left(s\mathcal{L}[y](s) - y(0)\right) + 6\mathcal{L}[y](s) = 0$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהנוסחה שהראינו במשפט האחרון.

נסמן באופן כללי $\mathcal{Y} := \mathcal{L}[y]$ ונקבל תוך שימוש בתנאי ההתחלה כי:

$$\left(s^2 - 5s + 6\right)\mathcal{Y}(s) + (5 - s)\,y(0) - y^{'}(0) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{Y}(s) = \tfrac{3s-16}{s^2-5s+6}$$

כעת אם נהפוך את האופרטור $\mathcal{L}$ נקבל פתרון למשוואה:

$$\tilde{y}(s) := \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{Y}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-16}{s^2-5s+6}\right]$$

נשים לב כי $\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s)=\frac{1}{s-a}$, ולכן נובע כאן כי:

$$\tilde{y}(s)=\frac{10}{s-2}-\frac{7}{s-3}$$

דוגמה: נתבונן במשוואה $y^{''}-5y^{'}+6y=8e^{t}$ עם התנאי $y(0)=3$ וכן $y^{'}(0)=-1$.
במקרה זה נקבל באופן דומה את המשוואה:

$$\mathcal{L}\left[y^{''}\right]-5\mathcal{L}\left[y^{'}\right]+6\mathcal{L}[y]=8\mathcal{L}\left[e^{t}\right]=\tfrac{8}{s-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(s^{2}-5s+6\right)\mathcal{Y}(s)+(5-s)\,y(0)-y^{'}(0)=\tfrac{8}{s-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\vdots$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{Y}(s)=\tfrac{3s-16}{s^{2}-5s+6}+\tfrac{5}{(s-1)s^{2}-5s+6}=...=\tfrac{10}{s-2}-\tfrac{7}{s-3}+8\left(\tfrac{1/2}{s-1}-\tfrac{1}{s-2}+\tfrac{1/2}{s-3}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{Y}(s)=\tfrac{10}{s-2}-\tfrac{7}{s-3}+\tfrac{4}{s-1}-\tfrac{8}{s-2}+\tfrac{4}{s-3}$$
$$\Downarrow$$
$$\tilde{y}(s):=\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{Y}(s)\right)=2e^{2t}-3e^{3t}+4e^{t}$$

טענה: לכל משוואה מהצורה $ay^{''}+by^{'}+cy=q(t)$, אם נסמן $\mathcal{Y}:=\mathcal{L}[y]$ וכן $\mathcal{Q}:=\mathcal{L}[q]$, אז:

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{(as+b)\,y(0)+ay^{'}(0)}{as^{2}+bs+c}+\frac{\mathcal{Q}(s)}{as^{2}+bs+c}$$

הוכחה: ניתן להראות ישירות מהנוסחאות שהראינו במשפט האחרון.

משפט: תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ונסמן $\mathcal{F}:=\mathcal{L}[f(t)]$. מתקיים $\mathcal{L}[f(ct)]=\frac{1}{c}\mathcal{F}\left(\frac{s}{c}\right)$ לכל $c\geq 0$.

הוכחה: על ידי חילוף משתנה $t={}^{u}/_{c}$ עבורו $dt=\frac{1}{c}du$, נקבל:

$$\mathcal{L}[f(ct)](s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(ct)\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-s\frac{u}{c}}f(u)\,\frac{1}{c}du=\frac{1}{c}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{s}{c}u}f(u)\,du=\frac{1}{c}\mathcal{F}\left(\frac{s}{c}\right)$$

■

משפט: תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ונסמן $\mathcal{F}:=\mathcal{L}[f(t)]$. מתקיים $\mathcal{L}[tf(t)]=-\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s)$.

הוכחה: נחשב:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s)=\frac{d}{ds}\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt=\int_{0}^{\infty}\frac{d}{ds}e^{-st}f(t)\,dt=-\int_{0}^{\infty}te^{-st}f(t)\,dt=-\mathcal{L}[tf(t)](s)$$

■

מסקנה: ניתן להראות באינדוקציה כי:

$$\mathcal{L}\left[t^n f\left(t\right)\right]\left(s\right) = \left(-1\right)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{F}\left(s\right)$$

בפרט עבור $f \equiv 1$ ניתן לראות שמתקיים:

$$\mathcal{F}\left(s\right) = \int\limits_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

ולכן נקבל כי:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right]\left(s\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

11.2 קונבולוציה

הגדרה: יהיו $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נגדיר את ה**קונבולוציה** של שתיהן להיות הפונקציה:

$$\left(f \star g\right)\left(t\right) := \int\limits_0^t f\left(t-r\right) g\left(r\right) dr$$

טענה: הקונבולוציה היא פעולה קומוטטיבית.

הוכחה: על ידי חילוף משתנה $p = t - r$ עבורו $dp = -dr$, נקבל:

$$\left(f \star g\right)\left(t\right) = \int_{r=0}^t f\left(t-r\right) g\left(r\right) dr = \int_{p=t}^0 f\left(p\right) g\left(t-p\right) dr\left(-dp\right) =$$

$$= \int_{p=0}^t g\left(t-p\right) f\left(p\right) dp = \left(g \star f\right)\left(t\right)$$

■

משפט: בהינתן $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, נסמן $\mathcal{F} := \mathcal{L}\left[f\right]$ וכן $\mathcal{G} := \mathcal{L}\left[g\right]$. אז מתקיים:

$$\mathcal{L}\left[\left(f \star g\right)\left(t\right)\right]\left(s\right) = \mathcal{F}\left(s\right)\mathcal{G}\left(s\right)$$

הוכחה: נחשב:

$$\mathcal{L}\left[(f\star g)(t)\right](s)=\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-st}\left[\int\limits_{r=0}^{t}f(t-r)\,g(r)\,dr\right]dt=$$

$$=\int\limits_{r=0}^{\infty}\left[\int\limits_{t=r}^{\infty}e^{-st}f(t-r)\,g(r)\,dt\right]dr=\int\limits_{r=0}^{\infty}g(r)\left[\int\limits_{t=r}^{\infty}e^{-st}f(t-r)\,dt\right]dr=$$

$$=\int\limits_{r=0}^{\infty}g(r)\left[\int\limits_{p=0}^{\infty}e^{-s(p+r)}f(p)\,dp\right]dr=\int\limits_{r=0}^{\infty}e^{-sr}g(r)\left[\int\limits_{p=0}^{\infty}e^{-sp}f(p)\,dp\right]dr=$$

$$=\left[\int\limits_{p=0}^{\infty}e^{-sp}f(p)\,dp\right]\left[\int\limits_{r=0}^{\infty}e^{-sr}g(r)\,dr\right]=\mathcal{F}(s)\,\mathcal{G}(s)$$

כאשר המעבר לשורה השנייה נובע ממשפט פוביני, והמעבר לשורה השלישית הוא חילוף משתנה $p=t-r$. ■

דוגמה: עבור המשוואה $ay^{''}+by^{'}+cy=q(t)$, נסמן $\mathcal{Q}=\mathcal{L}[q]$, וכן נגדיר $\mathcal{H}(s)=\frac{1}{as^2+bs+c}$ ונסמן $h:=\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H}(s))$.
מתקיים כי:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{Q}(a)}{as^2+bs+c}\right]=(h\star g)(t)=\int\limits_{0}^{t}h(t-r)\,q(r)\,dr$$

11.3 קיום התמרת לפלס

משפט: תהי משוואה $y^{''}+p(t)\,y^{'}+q(t)\,y=g(t)$ מוגדרת על $[0,\infty)$. נניח כי בתחום זה p,q רציפות וחסומות, וכי g רציפה ומקיימת $|g(t)|\leq\tilde{c}e^{\tilde{C}t}$ עבור $\tilde{c},\tilde{C}>0$ קבועים.
אזי לכל פתרון y קיימים קבועים $c,C>0$ כך שמתקיים:

$$|y(t)|\leq ce^{Ct}$$

$$\left|y^{'}(t)\right|\leq ce^{Ct}$$

למה 1: תכונה זו שמוזכרת במשפט נשמרת תחת לקיחת אינטגרל. כלומר אם עבור $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ מתקיים $|f(t)|\leq ce^{Ct}$, עבור $c,C>0$ קבועים, אז גם:

$$\left|\int\limits_{0}^{t}f(s)\,ds\right|\leq ce^{Ct}$$

הוכחה: נחשב:

$$\left|\int_0^t f(s)\,ds\right| \le \left|\int_0^t ce^{Cs}ds\right| = c\int_0^t e^{CS}ds = c\frac{1}{C}e^{Ct}\mid_{s=0}^{t} = \frac{c}{C}e^{Ct} - 1 \le \frac{c}{C}e^{Ct}$$

וכעת נגדיל את C במידת הצורך ונקבל את האי־שוויון הנדרש. ■

למה 2: המשפט נכון למקרה ההומוגני (כלומר עבור $g \equiv 0$).

הוכחה: נשים לב שבמקרה ההומוגנית ניתן לכתוב את המשוואה על ידי:

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

נסמן משוואה זו באופן מטריציאלי על ידי:

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x}$$

נשים לב כי מחסימות p,q נובע כי קיים $M>0$ קבוע עבורו $\|A(t)\|_{op} \le M$ לכל t (נורמת האופרטור), וכמו כן מתקיים:

$$\left|\|\vec{x}\|'\right| = \left|\frac{d}{dt}\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\right| = 2\left\langle\vec{x},\vec{x}'\right\rangle$$

ומאי־שוויון קושי־שוורץ נקבל:

$$\left|\|\vec{x}\|'\right| = |2\langle\vec{x},A(t)\vec{x}\rangle| \le 2\|A\|\|\vec{x}\|^2 \le 2M\|\vec{x}\|^2$$

נשים לב שמתקיים באופן כללי:

$$\frac{d}{dt}\ln\|\vec{x}\|^2 = \frac{\left(\|\vec{x}\|^2\right)'}{\|\vec{x}\|^2}$$

וכן גם:

$$\ln\frac{\|\vec{x}(t)\|^2}{\|\vec{x}(0)\|^2} = \ln\|\vec{x}(t)\|^2 - \ln\|\vec{x}(0)\|^2 = \int_0^t \frac{d}{ds}\ln\|\vec{x}(s)\|^2 ds \le 2\int_0^t M ds = 2Mt$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{x}(t)\|^2 \le \|\vec{x}(0)\|^2 e^{2Mt}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{x}(t)\| \le \|\vec{x}(0)\| e^{Mt}$$

כלומר נוכל לבחור $c = \|\vec{x}(0)\|$ וכן $C = M$, ולקבל כי:

$$\sqrt{y^2 + (y')^2} = \|\vec{x}\| \le ce^{Ct}$$

ובפרט ודאי כל אחת מהפונקציות חסומות באופן זה. ■

הוכחה: נזכור כי זוג פתרונות בלתי תלויים של המשוואה ההומוגנית, y_1, y_2, מגדירים פתרון של המשוואה על ידי וריאציה של פרמטרים, באופן הבא:

$$y_p\left(t\right) = \int\limits_0^t \frac{y_1\left(s\right)y_2\left(t\right) - y_1\left(t\right)y_2\left(s\right)}{W\left(y_1, y_2\right)\left(s\right)} g\left(s\right) ds$$

לצורך הנוחות נבחר את y_1, y_2 להיות פתרונות הומוגניים המקיימים את תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y_1\left(0\right) = 1 & y_1^{'}\left(0\right) = 0 \\ y_2^{'}\left(0\right) = 1 & y_2\left(0\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow W\left(y_1, y_2\right)\left(0\right) = 1$$

ובמצב כזה בהכרח:

$$W\left(y_1, y_2\right)\left(s\right) = \exp\left(-\int\limits_0^s p\left(u\right) du\right)$$

מנכונות המשפט למקרה ההומוגנית (למה 2) נובע כי:

$$\left|y_1\left(t\right)\right| \ , \ \left|y_2\left(t\right)\right| \leq e^{Mt}$$

$$\Downarrow$$

$$y_p\left(t\right) \leq 2e^{Mt}\int_0^t e^{2Ms}\tilde{c}e^{\tilde{C}t} ds \leq ce^{Ct}$$

כאשר האי־שוויון האחרון נובע מלמה 1.

אם כך היות שכל פתרון של המשוואה הוא סכום של y_p עם פתרון של המשוואה ההומוגנית, נובע החסם הנדרש. ■