מבוא ללוגיקה מתמטית

(לוגיקה מסדר ראשון: תחשיב היחסים)

.

מבוסס על הרצאות פרופ' אליהו ריפס
בקורס "מבוא ללוגיקה" (80423)
האוניברסיטה העברית, סמסטר א' 2015-16
להערות: $nachi.avraham@gmail.com$

נחי

תודה למי ששלח הערות ותיקונים: חן אלון, עידו אלישר, עמי אסייג, הדס באר, יעלי ברגר, תומר בראון, ניצן גדו, אלכס גופט, נעם גלר, עדי דוד, אבירם יוסף, יובל יעקבי, בן כהן, דנה כהן, דן כופרא, דניאל לוין, יעל ליבני, סתיו מדינה, עידן מילט, ג'וש מירצ'ין, ניר מרכוס, תמיר סגל, אורן סולטן, נופר סומר, בן פיינשטיין, אור פרדייס, הראל פרקש, מתן רוסנובסקי, עידן רפאלי, דוד שיפרוט.

תודה גם לשמעון בן שושן ונגה רוטמן, שנעזרתי בסיכומים המומלצים שלהם לאותו קורס.

תוכן עניינים

חלק I

לוגיקה מסדר ראשון - תחשיב היחסים

1 השפה הפורמלית של תחשיב היחסים

הגדרה: **שפת תחשיב היחסים** היא שפה שאלו רכיביה:

1. **משתנים** - $x, y, z, ...$ (בכמות לא מוגבלת)
2. **קשרים לוגיים**
   (א) **איווי** - $\vee$
   (ב) **שלילה** - $\neg$
3. **כמתים**
   (א) כמת **קיום** - $\exists$

   בהמשך ניצור כמתים נוספים מתוך השפה (למשל כמת כולל - $\forall$).
4. **סמלי פונקציות** - $f, g, h, ...$ (כאשר פונקציה היא n־מקומית, עבור $n \geq 0$).[1]
5. **סמלי יחסים** - $P, Q, R, ...$ (כאשר יחס הוא n־מקומי, עבור $n \geq 0$).
6. **סוגריים** - $()$, **ופסיק** - ,

הגדרה: ה**סיגנטורה** של השפה היא אוסף סמלי הפונקציות, סמלי היחסים והסוגריים שיש בשפה.

הגדרה: **ביטוי** בשפה הוא סדרה סופית של מרכיבים בשפה.

דוגמה: $f(g\exists\exists fff \vee x$ הוא ביטוי.

ניכר שהביטוי בדוגמה לא מעניין. אותנו יעניינו שתי משפחות מסוימות של ביטויים - שמות עצם ונוסחאות. ביטויים מסוג זה נגדיר באמצעות **סדרות יצירה**. כלומר, באמצעות קבוצה של אוביקטים בסיסיים ואוסף של חוקים קבועים מראש, באמצעותם ניתן ליצור מהאובייקטים הבסיסיים עוד שמות עצם ונוסחאות.

הערה: מעתה והלאה, בכל מקום שנדבר על "שפה" נתכוון לשפה של תחשיב היחסים שהגדרנו עתה, אלא אם כן נאמר אחרת.

1.1 שמות עצם

הגדרה: **סדרת יצירה של שמות עצם** היא סדרה סופית $s_1, ..., s_n$ של ביטויים פורמליים בשפה, כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. s_i משתנה.
2. קיים סמל פונקציה m־מקומית f בשפה, וכן $u_1, ..., u_m$ שמות עצם, כך שמתקיים $s_i = f(u_1, ..., u_m)$.

[1] פונקציה n־מקומית היא פונקציה שמקבלת n שמות עצם. בפרט, פונקציה שמקבלת 0 שמות עצם היא קבוע.

הגדרה: ביטוי פורמלי s בשפה ייקרא **שם עצם**, אם קיימת סדרת יצירה של שמות עצם $(s_1, ..., s_n)$, כך שמתקיים $s = s_n$.

הערה: בפרט גם כל קבוע הוא שם עצם, שכן הוא סמל פונקציה 0-מקומית.

טענה: (תרגיל) בכל שם עצם בשפה, מספר הסוגריים הימניים שווה למספר הסוגריים השמאליים.

דוגמה: אם f סמל פונקציה 2-מקומית, g סמל פונקציה 1-מקומית, u_1, u_2, u_3 שמות עצם, אז

$$f\left(f\left(u_1, g\left(u_2\right)\right), g\left(f\left(u_1, g\left(u_3\right)\right)\right)\right)$$

הוא שם עצם, שסדרת היצירה שלו היא

$$u_1,\ \ u_2,\ \ u_3,\ \ g\left(u_2\right),\ \ g\left(u_3\right),\ \ f\left(u_1, g\left(u_2\right)\right),\ \ f\left(u_1, g\left(u_3\right)\right),$$

$$g\left(f\left(u_1, g\left(u_3\right)\right)\right),\ \ f\left(f\left(u_1, g\left(u_2\right)\right),\ \ g\left(f\left(u_1, g\left(u_3\right)\right)\right)\right)$$

כלומר, בכל שלב השתמשנו רק בשמות עצם שכבר הוגדרו, עד שהגענו בסדרת היצירה לביטוי המבוקש.

1.2 נוסחאות

הגדרה: יהי P סמל יחס n-מקומי בשפה ויהיו $u_1, ..., u_n$ שמות עצם. אז $P\left(u_1, ..., u_n\right)$ נקראת **נוסחה אטומית**.

הגדרה: **סדרת יצירה של נוסחאות** היא סדרה סופית $\left(A_1, ..., A_n\right)$ של ביטויים פורמליים בשפה, כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. A_i נוסחה אטומית.
2. קיימים $j, k < i$ כך שמתקיים $A_i = A_j \vee A_k$.
3. קיים $j < i$ כך שמתקיים $A_i = \neg A_j$.
4. קיים $j < i$ כך שמתקיים $A_i = (\exists x)\, A_j$.

הגדרה: ביטוי פורמלי A בשפה ייקרא **נוסחה**, אם קיימת סדרת יצירה של נוסחאות $\left(A_1, ..., A_n\right)$, כך שמתקיים $A = A_n$.

טענה: בכל נוסחה בשפה, מספר הסוגריים הימניים שווה למספר הסוגריים השמאליים.

הוכחה: (באינדוקציה על אורך סדרת היצירה)

אם סדרת היצירה של הנוסחה היא מאורך $n = 1$, אז מדובר בנוסחה אטומית מהצורה $P\left(x_1, ..., x_n\right)$. ידוע כי לשמות עצם $x_1, ..., x_n$ יש מספר שווה של סוגריים ימניים ושמאליים, וכאן נוספו סוגר ימני אחד ושמאלי אחד, ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$.

נניח שהטענה נכונה עבור נוסחאות שסדרות היצירה שלהן מאורך $n - 1$ ותהי נוסחה עם סדרת היצירה מאורך n מהצורה $\left(A_1, ..., A_n\right)$, אזי או ש-$A_n$ אטומית או שהיא מורכבת מהנוסחאות שלפניה לפי הכללים, ולכן מקיימת את הנדרש. ■

2 מבנה

הגדרה: מבנה $\mathcal{M}$ המתייחס לשפה מסדר ראשון, הוא שלשה המעניקה "משמעות" לסמלים שבשפה הפורמלית. שלשה זאת כוללת את **קבוצת המבנה**, **פירושי סמלי הפונקציות** שבשפה ו**פירושי סמלי היחסים** שבשפה, כאשר:

- **קבוצת המבנה**: מסומנת $|\mathcal{M}|$ והיא אינה הקבוצה הריקה.[2]
- **פירושי הפונקציות**: פירושי הפונקציות הם פונקציות המוגדרות ומסומנות כך:
  אם f סמל פונקציה n־מקומית, אז ה**פירוש של** f **במבנה** $\mathcal{M}$, הוא
  $$f^{\mathcal{M}}:\underbrace{|\mathcal{M}|\times|\mathcal{M}|\times...\times|\mathcal{M}|}_{n\text{ times}}\to|\mathcal{M}|$$
  ובקיצור, $f^{\mathcal{M}}:|\mathcal{M}|^n\to|\mathcal{M}|$.[3]
- **פירושי היחסים**: פירושי היחסים הם פונקציות המוגדרות ומסומנות כך:
  אם P סמל יחס n־מקומי, אז ה**פירוש של** P **במבנה** $\mathcal{M}$, הוא
  $$P^{\mathcal{M}}:\underbrace{|\mathcal{M}|\times|\mathcal{M}|\times...\times|\mathcal{M}|}_{n\text{ times}}\to\{\mathbb{T},\mathbb{F}\}$$
  ובקיצור, $P^{\mathcal{M}}:|\mathcal{M}|^n\to\{\mathbb{T},\mathbb{F}\}$.
  הקבוצה $\{\mathbb{T},\mathbb{F}\}$ נקראת **קבוצת ערכי האמת** והיא כוללת שני עצמים פורמליים ($\mathbb{T}$ – "True", $\mathbb{F}$ – "False").

דוגמה: נגדיר מבנה $\mathcal{N}$ עם קבוצת מבנה $|\mathcal{N}|=\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ (המספרים הטבעיים) ועם פירוש $S^{\mathcal{N}}:|\mathcal{N}|\to|\mathcal{N}|$ המוגדר להיות פונקציית העוקב, כלומר

$$0^{\mathcal{N}}=0,\ S^{\mathcal{N}}(m)=m+1$$

ועם פירוש יחס הסדר $<^{\mathcal{N}}:|\mathcal{N}|\times|\mathcal{N}|\to\{\mathbb{T},\mathbb{F}\}$ המוגדר להיות $m<^{\mathcal{N}}k=\mathbb{T}$ אם $m<k$ ואילו $m<^{\mathcal{N}}k=\mathbb{F}$ אם $m\geq k$.

2.1 השמה

הגדרה: תהי L שפה מסדר ראשון. Var היא קבוצת המשתנים של L; $Terms$ היא קבוצת שמות העצם של L; $Formulas$ היא קבוצת הנוסחאות של L.

מההגדרות שהזכרנו לעיל נובע כי $Var\subset Terms$.

הגדרה: יהי $\mathcal{M}$ מבנה על שפה L. **השמה** היא פונקציה מהצורה

$$\sigma:Var\to|\mathcal{M}|$$

[2]הסימון || בהקשר זה אינו קשור לסימון המקובל לגודל של קבוצה.
[3]אם c סמל פונקציה 0־מקומית (קבוע), אז $c^{\mathcal{M}}\in|\mathcal{M}|$.

הגדרה: בהינתן השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$, נרחיב את הגדרתה להיות על כל שמות העצם,

$$\tilde{\sigma} : Terms \to |\mathcal{M}|$$

באופן הבא:

1. עבור u משתנה, נגדיר $\tilde{\sigma}(u) = \sigma(u)$.
2. עבור h קבוע, נגדיר $\tilde{\sigma}(h) = h^{\mathcal{M}}$.
3. עבור סמל פונקציה n־מקומית f, עבור $x_1, ..., x_n$ שמות עצם, נגדיר

$$\tilde{\sigma}(f(x_1, x_2, ..., x_n)) := f^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(x_1), \tilde{\sigma}(x_2), ..., \tilde{\sigma}(x_n))$$

מהכללים הללו מתקבלת אינדוקטיבית הגדרה כללית לכל שמות העצם בשפה.[4]

הגדרה: בהינתן השמה $\tilde{\sigma}$, נגדיר על כל הנוסחאות פונקציה לקבוצת ערכי האמת,

$$\overline{\sigma} : Formulas \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

באופן הבא:

1. עבור P יחס n־מקומי ועבור $x_1, ..., x_n$ שמות עצם, נגדיר

$$\overline{\sigma}(P(x_1, ..., x_n)) := P^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(x_1), ..., \tilde{\sigma}(x_n))$$

2. עבור A נוסחה, נגדיר

$$\overline{\sigma}(\neg A) := \neg\overline{\sigma}(A)$$

כאשר מתייחסים לסמל $\neg$ כאל פונקציה מהצורה

$$\neg : \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

המוגדרת על ידי

$$\neg\mathbb{T} = \mathbb{F}$$

$$\neg\mathbb{F} = \mathbb{T}$$

(נשים לב כי $\neg$ משמש בשני תפקידים נפרדים לחלוטין: בביטוי $\overline{\sigma}(\neg A)$ הוא סמל בשפה, ובביטוי $\neg\overline{\sigma}(A)$ הוא פונקציה).

[4] נשים לב שיש להשתמש באינדוקציה כדי להוכיח שסעיף 3 מוגדר.

3. עבור A, B נוסחאות, נגדיר

$$\overline{\sigma}\left(A \vee B\right) := \vee\left(\overline{\sigma}\left(A\right), \overline{\sigma}\left(B\right)\right)$$

כאשר מתייחסים לסמל $\vee$ כאל פונקציה מהצורה

$$\vee : \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \times \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

המוגדרת על ידי

$$\begin{array}{c} \vee\left(\mathbb{T},\mathbb{T}\right) = \mathbb{T} \\ \vee\left(\mathbb{T},\mathbb{F}\right) = \mathbb{T} \\ \vee\left(\mathbb{F},\mathbb{T}\right) = \mathbb{T} \\ \vee\left(\mathbb{F},\mathbb{F}\right) = \mathbb{F} \end{array}$$

(נשים לב כי $\vee$ משמש בשני תפקידים נפרדים לחלוטין: בביטוי $\overline{\sigma}\left(A \vee B\right)$ הוא סמל בשפה, ובביטוי $\overline{\sigma}\left(A\right) \vee \overline{\sigma}\left(B\right)$ הוא פונקציה).

4. עבור A נוסחה, נגדיר

$$\overline{\sigma}\left(\left(\exists x\right) A\right) := \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma\left[x/a\right]}\left(A\right)$$

כאשר:

(א) $\sigma\left[x/a\right] : Var \to |\mathcal{M}|$ היא השמה חדשה המוגדרת על ידי

$$\sigma\left[x/a\right]\left(y\right) = \begin{cases} a & y = x \\ \sigma\left(y\right) & y \neq x \end{cases}$$

כך שמתוך ההשמה $\sigma\left[x/a\right]$ מתקבלת $\overline{\sigma\left[x/a\right]} : Formulas \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ המוגדרת לנוסחאות (כפי שתיארנו לעיל באופן כללי).

(ב) $\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|}$ הוא איווי שרץ על כל איברי $|\mathcal{M}|$.
כלומר, יהי $S_a \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ לכל $a \in |\mathcal{M}|$, אז אם קיים $a_0 \in |\mathcal{M}|$ שעבורו $S_{a_0} = \mathbb{T}$ נגדיר

$$\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} S_a = \mathbb{T}$$

ואם לא קיים כזה, כלומר $S_a = \mathbb{F}$ לכל $a \in |\mathcal{M}|$, נגדיר

$$\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} S_a = \mathbb{F}$$

מהכללים הללו מתקבלת אינדוקטיבית הגדרה כללית לכל הנוסחאות בשפה.

2.2 נוסחאות מסופקות

הגדרה: אומרים כי מבנה $\mathcal{M}$ **מספק** נוסחה A, ומסמנים זאת $\mathcal{M} \vDash A$, אם לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$, מתקיים

$$\overline{\sigma}\left(A\right) = \mathbb{T}$$

דוגמה: נתבונן בשפה הכוללת את 0 (סמל פונקציה 0־מקומית), S (סמל פונקציה חד־מקומית), $+, \cdot$ (סמלי פונקציות דו־מקומיות), $<$ (סמל יחס דו־מקומי), יחד עם קבוצת המבנה $|\mathcal{M}| = \{0,1,2,3,...\}$, המפרשת את סמלי הפונקציות על ידי

$$0^{\mathcal{M}} = 0$$

$$S^{\mathcal{M}}\left(n\right) = n+1$$

$$+^{\mathcal{M}}\left(n,m\right) = n+m$$

$$\cdot^{\mathcal{M}}\left(n,m\right) = n\cdot m$$

$$<^{\mathcal{M}}\left(n,m\right) = \begin{cases} \mathbb{T} & n<m \\ \mathbb{F} & n\geq m \end{cases}$$

כאשר נשים לב היטב כי סימני ה־$0, <, \cdot, +$ בצד שמאל משמשים כסמלים בשפה, ובצד ימין משמשים כפעולות המוכרות לנו על המספרים הטבעיים.

נראה כי $\mathcal{M} \vDash <\left(0, S\left(0\right)\right)$. תהי $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$ השמה כלשהי, אזי

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}\left(<\left(0,S\left(0\right)\right)\right) &= <^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(0\right), \tilde{\sigma}\left(S\left(0\right)\right)\right) \\ &= <^{\mathcal{M}}\left(0^{\mathcal{M}}, S^{\mathcal{M}}\left(0^{\mathcal{M}}\right)\right) \\ &= <^{\mathcal{M}}\left(0, S^{\mathcal{M}}\left(0\right)\right) \\ &= <^{\mathcal{M}}\left(0,1\right) \\ &= \mathbb{T} \end{aligned}$$

נראה עוד כי $\mathcal{M} \vDash \neg\left(<\left(x,x\right)\right)$. תהי $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$ השמה כלשהי, אזי

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}\left(\neg\left(<\left(x,x\right)\right)\right) &= \neg\left(\overline{\sigma}\left(<\left(x,x\right)\right)\right) \\ &= \neg\left(<^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(x\right), \tilde{\sigma}\left(x\right)\right)\right) \\ &= \neg\left(<^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(x\right), \sigma\left(x\right)\right)\right) \\ &= \neg\mathbb{F} \\ &= \mathbb{T} \end{aligned}$$

3 משתנים חופשיים וקשורים

הגדרה: אומרים כי משתנה x הוא בעל **הופעה קשורה בכמת** בנוסחה, אם בסדרת היצירה של הנוסחה מופיע כמת $\exists x$ לפני המשתנה. אם לא, אומרים כי x **משתנה חופשי.**

דוגמה: בנוסחה $(< (z,x)) \vee (\exists x)\,(< (x,y))$, המשתנה x הוא בעל שתי הופעות: הראשונה הופעה חופשית והשנייה הופעה הקשורה בכמת.

משפט המשתנים החופשיים: תהי A נוסחה ויהיו $\sigma,\tau : Var \to |\mathcal{M}|$ שתי השמות.
אם לכל משתנה x בעל הופעה חופשית בנוסחה A מתקיים $\sigma(x) = \tau(x)$, אזי

$$\overline{\sigma}(A) = \overline{\tau}(A)$$

כדי להוכיח את המשפט ננסח תחילה טענת עזר.

טענת עזר: אם u שם עצם, אם לכל משתנה x המופיע ב־u מתקיים $\sigma(x) = \tau(x)$, אזי

$$\tilde{\sigma}(u) = \tilde{\tau}(u)$$

הוכחת טענת העזר: נוכיח באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של שם העצם. נבחן את כל המרכיבים האפשריים בסדרת יצירה של שם עצם.

1. u משתנה, $u = x$. במקרה כזה

$$\tilde{\sigma}(u) = \tilde{\sigma}(x) = \sigma(x) = \tau(x) = \tilde{\tau}(x) = \tilde{\tau}(u)$$

2. $u = f(u_1,...,u_n)$ עבור f סמל פונקציה n־מקומית, $u_1,...,u_n$ שמות עצם. במקרה כזה

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}(u) &= \tilde{\sigma}(f(u_1,...,u_n)) \\
&= f^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(u_1),...,\tilde{\sigma}(u_n)) \\
\text{(Induction)} &= f^{\mathcal{M}}(\tilde{\tau}(u_1),...,\tilde{\tau}(u_n)) \\
&= \tilde{\tau}(f(u_1,...,u_n)) \\
&= \tilde{\tau}(u)
\end{aligned}$$

כנדרש. ▲

הוכחת המשפט: נוכיח באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של הנוסחה. נבחן את כל המרכיבים האפשריים בסדרת יצירה של נוסחה.

1. A נוסחה אטומית, כלומר $A = P(u_1,...,u_n)$ עבור P סמל יחס n־מקומי ועבור $u_1,...,u_n$ שמות עצם. לפי תנאי המשפט, כל x המופיע בשמות העצם

$u_1,...,u_n$ מופיע בצורה חופשית ב־A, ולכן $\sigma(x)=\tau(x)$. במקרה כזה

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(P(u_1,...,u_n))\\ &= P^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(u_1),...,\tilde{\sigma}(u_n))\\ &= P^{\mathcal{M}}(\tilde{\tau}(u_1),...,\tilde{\tau}(u_n))\\ &= \overline{\tau}(P(u_1,...,u_n))\\ &= \overline{\tau}(A)\end{aligned}$$

כאשר השוויון בשורה השלישית נובע מטענת העזר.

2. $A=\neg B$ עבור B נוסחה. במקרה כזה,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(\neg B)\\ &= \neg\overline{\sigma}(B)\\ \text{(Induction)} &= \neg\overline{\tau}(B)\\ &= \overline{\tau}(\neg B)\\ &= \overline{\tau}(A)\end{aligned}$$

3. $A=B\vee C$ עבור B,C נוסחאות. במקרה כזה,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(B\vee C)\\ &= \overline{\sigma}(B)\vee\overline{\sigma}(C)\\ \text{(Induction)} &= \overline{\tau}(B)\vee\overline{\tau}(C)\\ &= \overline{\tau}(B\vee C)\\ &= \overline{\tau}(A)\end{aligned}$$

4. $A=(\exists x)B$ עבור B נוסחה. במקרה כזה,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}((\exists x)B)\\ &= \bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\overline{\sigma[x/a]}(B)\\ &= \bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\overline{\tau[x/a]}(B)\\ &= \overline{\tau}((\exists x)B)\\ &= \overline{\tau}(A)\end{aligned}$$

כאשר השוויון בשורה השלישית נובע מכך שמתקיים,

$$\begin{aligned}\sigma[x/a](y) &= \begin{cases} a & y=x\\ \sigma(y) & y\neq x\end{cases}\\ &= \begin{cases} a & y=x\\ \tau(y) & y\neq x\end{cases}\\ &= \tau[x/a](y)\end{aligned}$$

והשוויון בשורה השנייה הוא מטענת העזר. ■

הגדרה: נוסחה A נקראת **נוסחה סגורה**, אם כל ההופעות של משתנים בה הן הופעות הקשורות בכמת. כלומר, לא מופיעים ב־A משתנים חופשיים.

מסקנה: אם A נוסחה סגורה, אז לכל זוג השמות $\sigma, \tau : Var \to |\mathcal{M}|$, מתקיים

$$\overline{\sigma}\left(A\right) = \overline{\tau}\left(A\right)$$

היות שתנאי המשפט שהראינו מתקיימים באופן ריק (אין ב־A משתנים חופשיים).

מסקנה: עבור נוסחה סגורה A, אם קיימת השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$ כלשהי שעבורה $\overline{\sigma}\left(A\right) = \mathbb{T}$, אזי

$$\mathcal{M} \vDash A$$

4 כמתים נוספים ויחס השוויון

הגדרה: נגדיר את **כמת כולל** שיסומן $\forall$, לכל שם עצם x ולכל נוסחה A,

$$\left(\forall x\right) A := \neg\left(\left(\exists x\right)\left(\neg A\right)\right)$$

דוגמה: את הנוסחה

$$A = \neg\left(\left(\exists x\right)\left(\neg\left(\left(\exists y\right)\left(<\left(x, y\right)\right)\right)\right)\right)$$

ניתן לכתוב

$$A = \left(\forall x\right)\left(\exists y\right)\left(<\left(x, y\right)\right)$$

הגדרה: נגדיר **גימום** שיסומן $\wedge$, לכל זוג נוסחאות A, B,

$$\left(A \wedge B\right) := \neg\left(\left(\neg A\right) \vee \left(\neg B\right)\right)$$

הגדרה: נגדיר **גרירה** או **פעולת חץ** שתסומן $\to$, לכל זוג נוסחאות A, B,

$$\left(A \to B\right) := \left(\neg A\right) \vee B$$

הגדרה: נגדיר **גרירה דו־כיוונית** שתסומן $\leftrightarrow$, לכל זוג נוסחאות A, B,

$$\left(A \leftrightarrow B\right) := \left(A \to B\right) \wedge \left(B \to A\right)$$

הגדרה: נרצה שהסיגנטורה של השפה תכיל את יחס השוויון כסמל יחס דו־מקומי. נסמן אותו $\approx$ (הסימן $=$ משמש לשוויון רגיל המשתמש אותנו בשפת היום־יום).

כדי לפרש את היחס $\approx$ במסגרת מבנה $\mathcal{M}$, תמיד נבחר לפרש אותו כשוויון איברי קבוצת המבנה $|\mathcal{M}|$. כלומר,

$$\approx^{\mathcal{M}}(a,b)=\begin{cases}\mathbb{T} & a=b\\ \mathbb{F} & a\neq b\end{cases}$$

טענה: יהי מבנה $\mathcal{M}$ ותהי השמה $\sigma : Var\to|\mathcal{M}|$. אזי לכל שם עצם x ולכל נוסחה A,

$$\overline{\sigma}\left((\forall x)\,A\right)=\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\overline{\sigma\left[x/a\right]}\,(A)$$

כאשר $\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}$ הוא גימום שרץ על כל איברי $|\mathcal{M}|$.

כלומר, יהי $S_a\in\{\mathbb{T},\mathbb{F}\}$ לכל $a\in|\mathcal{M}|$, אז אם קיים $a_0\in|\mathcal{M}|$ שעבורו $S_{a_0}=\mathbb{F}$ נגדיר

$$\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}S_a=\mathbb{F}$$

ואם לא קיים כזה, כלומר $S_a=\mathbb{T}$ לכל $a\in|\mathcal{M}|$, נגדיר

$$\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}S_a=\mathbb{T}$$

הוכחה: נחשב

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}\left((\forall x)\,A\right)&=\overline{\sigma}\left(\neg\left((\exists x)\,(\neg A)\right)\right)\\&=\neg\overline{\sigma}\left((\exists x)\,(\neg A)\right)\\&=\neg\left(\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\overline{\sigma\left[x/a\right]}\,(\neg A)\right)\\&=\neg\left(\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\left(\overline{\sigma\left[x/a\right]}\,(\neg A)\right)\right)\\&=\neg\left(\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\neg\left(\overline{\sigma\left[x/a\right]}\,(A)\right)\right)\end{aligned}$$

ננתח את הביטוי שהתקבל.

- אם $\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(A)=\mathbb{T}$, כלומר $\overline{\sigma[x/a]}(A)=\mathbb{T}$ לכל $a\in|\mathcal{M}|$, אז $\neg\overline{\sigma[x/a]}(A)=\mathbb{F}$ לכל $a\in|\mathcal{M}|$, לכן $\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\neg\left(\overline{\sigma[x/a]}(A)\right)=\mathbb{F}$, ולכן

$$\neg\left(\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\neg\left(\overline{\sigma[x/a]}(A)\right)\right)=\mathbb{T}$$

- אם $\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(A)=\mathbb{F}$, כלומר $\overline{\sigma[x/a]}(A)=\mathbb{F}$ לאיזה $a_0\in|\mathcal{M}|$, אז $\neg\overline{\sigma[x/a]}(A)=\mathbb{T}$, לכן $\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\neg\left(\overline{\sigma[x/a]}(A)\right)=\mathbb{T}$, ולכן

$$\neg\left(\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|}\neg\left(\overline{\sigma[x/a]}(A)\right)\right)=\mathbb{F}$$

ולכן בכל מקרה $\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\overline{\sigma[x/a]}(A)=\overline{\sigma}((\forall x)A)$, כנדרש. ■

דוגמה: נתבונן במבנה $|\mathcal{M}|=\{0,1,2,3,...\}$, ובנוסחאות

$$A=(\forall x)(\exists y)(<(x,y))$$

$$B=(\forall x)(\exists y)(<(y,x))$$

נראה כי (1) $\mathcal{M}\vDash A$, (2) $\mathcal{M}\nvDash B$.

1. נחשב,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}((\forall x)(\exists y)(<(x,y)))\\ &= \bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\overline{\sigma[x/a]}((\exists y)(<(x,y)))\\ &= \bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}\overline{(\sigma[x/a])[y/b]}(<(x,y))\\ &= \bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}\left(<^{\mathcal{M}}\left(\widetilde{(\sigma[x/a])[y/b]}(x),\widetilde{(\sigma[x/a])[y/b]}(y)\right)\right)\end{aligned}$$

כעת ניזכר בהגדרה הכללית של $\sigma[x/a]$, ונפעיל אותה פעמיים, ונקבל שמתקיים

באופן כללי עבור משתנה z,

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\sigma\left[x/a\right])}\left[y/b\right](z) &= \left(\sigma\left[x/a\right]\right)\left[y/b\right](z)\\ &= \begin{cases} b & y=z\\ \sigma\left[x/a\right](z) & y\neq z\end{cases}\\ &= \begin{cases} b & z=y\\ \begin{cases} a & z=x\\ \sigma(z) & z\neq x\end{cases} & z\neq y\end{cases}\\ &= \begin{cases} b & z=y\\ a & z\neq y,\, z=x\\ \sigma(z) & z\neq y,\, z\neq x\end{cases}\end{aligned}$$

מכך נקבל כי

$$\left(\widetilde{\sigma\left[x/a\right])}\left[y/b\right](x)=a$$

$$\left(\widetilde{\sigma\left[x/a\right])}\left[y/b\right](y)=b$$

ומכאן נמשיך את החישוב ונקבל

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}\left(<^{\mathcal{M}}\left(\left(\widetilde{\sigma\left[x/a\right])}\left[y/b\right](x),\left(\widetilde{\sigma\left[x/a\right])}\left[y/b\right](y)\right)\right)\\ &= \bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}\left(<^{\mathcal{M}}(a,b)\right)\end{aligned}$$

נתבונן בערך של $\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}<(a,b)$. ידוע כי ביחס הסדר על הטבעיים האי־שוויון $a<b$ מתקיים לכל $a\in\mathbb{N}=|\mathcal{M}|$ עבור איזשהו $b\in\mathbb{N}=|\mathcal{M}|$ גדול מספיק, ולכן $\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}<(a,b)=\mathbb{T}$ עבור כל $a\in|\mathcal{M}|=\mathbb{N}$, ולכן נובע

$$\overline{\sigma}(A)=\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\mathbb{T}=\mathbb{T}$$

כלומר $\mathcal{M}\vDash A$.

2. באמצעות חישוב זהה נקבל,

$$\overline{\sigma}(B)=\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}<^{\mathcal{M}}(b,a)$$

נתבונן בערך של $\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}(b,a)$. ידוע כי עבור $0\in\mathbb{N}=|\mathcal{M}|$, מתקיים $<(b,0)=\mathbb{F}$ לכל $b\in\mathbb{N}=|\mathcal{M}|$, ולכן $\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}(b,0)=\mathbb{F}$, ולכן

$$\bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\bigvee_{b\in|\mathcal{M}|}<(b,a)=\mathbb{F}$$

כלומר $\mathcal{M}\nvDash B$.

5 הצבה

הגדרה: תהי A נוסחה, יהי x משתנה ויהי v שם עצם. **הצבה** של שם עצם v במקום משתנה x בנוסחה A, היא סדרת סמלים בשפה, אותה נסמן $A_x[v]$, המוגדרת על ידי החלפת כל הופעה חופשית של משתנה x בשם העצם v.

טענה: נניח כי u שם עצם, x משתנה, v שם עצם, אז $u_x[v]$ הוא שם עצם.

הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של שם העצם u.

- אם $u = y \neq x$, אז $u_x[v] = y = u$ וזה אכן שם עצם.
- אם $u = x$ אז $u_x[v] = v$ וזה אכן שם עצם.
- אם $u = h$ סמל פונקציה 0־מקומי, אז $u_x[v] = h$ וזה אכן שם עצם.
- אם $u = f(z_1, ..., z_m)$ כאשר f סמל פונקציה m־מקומית, $z_1, ..., z_m$ שמות עצם, אז

$$u_x[v] = f(z_{1x}[v], ..., z_{mx}[v])$$

וזה אכן שם עצם כי $z_{jx}[v]$ שם עצם לפי הנחת האינדוקציה. ■

הגדרה: אם A נוסחה, x משתנה, v שם עצם, ההצבה $A_x[v]$ מוכרזת **חוקית**, אם כל המשתנים החופשיים שמופיעים ב־v, לא נקשרים בכמת ב־$A_x[v]$.

כלומר, הצבה $A_x[v]$ כנ"ל היא **לא־חוקית**, אם קיים משתנה y בעלת הופעה חופשית ב־v, כך שההופעה של y בנוסחה $A_x[v]$ קשורה בכמת.

דוגמה: עבור הנוסחה

$$A = \exists y (x \approx y)$$

ההצבה

$$A_x[y] = \exists y (y \approx y)$$

אינה חוקית, כי המשתנה y שהיה חופשי ב־v, הפך להיות קשור בכמת.

טענה: אם A נוסחה, x משתנה, v שם עצם, אם הצבת v במקום x בנוסחה A היא חוקית, אז $A_x[v]$ היא נוסחה.

הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של הנוסחה A.

- A נוסחה אטומית: כלומר $A = P(u_1, ..., u_n)$, כאשר P סמל יחס n־מקומי, $u_1, ..., u_n$ שמות עצם. על ידי הטענה הקודמת, $A_x[v] = P(u_{1x}[v], ..., u_{nx}[v])$ נוסחה אטומית, ובפרט נוסחה.
- $A = \neg B$ עבור B נוסחה: מתקיים $A_x[v] = \neg B_x[v]$, ומהנחת האינדוקציה זו נוסחה.
- $A = B \vee C$ עבור B, C נוסחאות: מתקיים $A_x[v] = B_x[v] \vee C_x[v]$, ומהנחת האינדוקציה זו נוסחה.
- $A = (\exists y) B$ עבור B נוסחה ועבור y משתנה. נבחן שני מקרים,

אם $y \neq x$, מכיוון שהופעות חופשיות של x ב־B וב־A מתאימות זו לזו, מחוקיות ההצבה נקבל כי $A_x[v] = (\exists y) B_x[v]$, ולכן זו נוסחה.
אם $y = x$, היות שזו אינה הופעה חופשית של x ב־A, אז $A_x[v] = A$, ולכן זו נוסחה. ■

5.1 פעולת השמה על הצבה

טענה: אם u שם עצם, x משתנה, v שם עצם, אז לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\tilde{\sigma}\left(u_x\left[v\right]\right) = \sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(u\right)$$

הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של שם העצם u.

1. אם u הוא משתנה $u = z$, נבדוק שני מקרים,
   - אם $x \neq z$, אין מופעים של v ב־u, ולכן

$$u_x\left[v\right] = z = u$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}\left(u_x\left[v\right]\right) &= \tilde{\sigma}\left(z\right) \\
&= \sigma\left(z\right) \\
\text{(Definition of } \sigma\left[x/y\right]) \quad &= \sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]\left(z\right) \\
&= \sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(z\right) \\
&= \sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(u\right)
\end{aligned}$$

   - אם $x = z$, נחליף כל מופע של x ב־v,

$$u_x\left[v\right] = v$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}\left(u_x\left[v\right]\right) &= \tilde{\sigma}\left(v\right) \\
\text{(Definition of } \sigma\left[x/y\right]) \quad &= \sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]\left(x\right) \\
&= \sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(x\right) \\
&= \sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(u\right)
\end{aligned}$$

2. אם $u = f\left(v_1, ..., v_n\right)$ עבור f סמל פונקציה n־מקומי, $t_1, ..., t_n$ שמות עצם, אז

$$u_x\left[v\right] = f\left(t_{1x}\left[v\right], ..., t_{nx}\left[v\right]\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}\left(u_x\left[v\right]\right) &= \tilde{\sigma}\left(f\left(t_{1x}\left[v\right], ..., t_{nx}\left[v\right]\right)\right) \\
&= f^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(t_{1x}\left[v\right]\right), ..., \tilde{\sigma}\left(t_{nx}\left[v\right]\right)\right) \\
\text{(Induction)} \quad &= f^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(t_1\right), ..., \sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(t_n\right)\right) \\
\text{(Definition of } \tilde{\sigma}) \quad &= \sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(f\left(t_1, ..., t_n\right)\right) \\
&= \sigma\left[\widetilde{x/\tilde{\sigma}\left(v\right)}\right]\left(u\right)
\end{aligned}$$

אם כך הראינו את הטענה לכל אחד הרכיבים של סדרת היצירה של שמות עצם, ולכן ברור כיצד להסיק אותה לכל שם עצם, באינדוקציה על אורך סדרת היצירה שלו. ■

טענה: אם A נוסחה, x משתנה, v שם עצם, ונניח כי $A_x[v]$ הצבה חוקית, אז לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\overline{\sigma}(A_x[v]) = \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(A)$$

הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של הנוסחה A.

1. אם A נוסחה אטומית, כלומר $A = P(u_1, ..., u_n)$ עבור P סמל יחס n־מקומי, $u_1, ..., u_n$ שמות עצם, אז

$$A_x[v] = P(u_{1x}[v], ..., u_{nx}[v])$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(A_x[v]) &= \overline{\sigma}(P(u_{1x}[v], ..., u_{nx}[v])) \\
&= P^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(u_{1x}[v]), ..., \tilde{\sigma}(u_{nx}[v])) \\
\text{(By previous claim)} \quad &= P^{\mathcal{M}}\left(\sigma\widetilde{[x/\tilde{\sigma}(v)]}(u_1), ..., \sigma\widetilde{[x/\tilde{\sigma}(v)]}(u_n)\right) \\
&= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(P(u_1, ..., u_n)) \\
&= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(A)
\end{aligned}$$

2. אם $A = \neg B$,

$$\overline{\sigma}(A) = \overline{\sigma}(\neg B) = \neg\overline{\sigma}(B)$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(A_x[v]) &= \overline{\sigma}(\neg(B_x[v])) \\
&= \neg\overline{\sigma}(B_x[v]) \\
\begin{pmatrix}\text{Induction: The} \\ \text{length of } B \text{ is shorter}\end{pmatrix} &= \neg\overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(B) \\
&= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(\neg B) \\
&= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(A)
\end{aligned}$$

3. אם $A = B \vee C$,

$$\overline{\sigma}(A) = \overline{\sigma}(B \vee C) = \overline{\sigma}(B) \vee \overline{\sigma}(C)$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}\left(A_x\left[v\right]\right) &= \overline{\sigma}\left(B_x\left[v\right]\vee C_x\left[v\right]\right)\\
&= \overline{\sigma}\left(B_x\left[v\right]\right)\vee\overline{\sigma}\left(C_x\left[v\right]\right)\\
\begin{pmatrix}\text{Induction: The lengths}\\ \text{of } B,C \text{ are shorter}\end{pmatrix} &= \overline{\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]}\left(B\right)\vee\overline{\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]}\left(C\right)\\
&= \overline{\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]}\left(B\vee C\right)\\
&= \overline{\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]}\left(A\right)
\end{aligned}$$

4. אם $A=\left(\exists z\right)B$, נחלק לשני מקרים - $z=x$ או $z\neq x$.

(א) אם $z=x$: במקרה זה $A=\left(\exists x\right)B$, והיות כי x אינו בעל הופעה חופשית ב־A אין שינוי לאחר ההצבה, ומתקיים $A_x\left[v\right]=A$.

ואז מצד אחד,

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}\left(A_x\left[v\right]\right) &= \overline{\sigma}\left(A\right)\\
&= \overline{\sigma}\left(\left(\exists x\right)B\right)\\
&= \bigvee_{a\in\left|\mathcal{M}\right|}\overline{\sigma\left[x/a\right]}\left(B\right)
\end{aligned}$$

ומצד שני,

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]}\left(A\right) &= \overline{\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]}\left(\left(\exists x\right)B\right)\\
&= \bigvee_{a\in\left|\mathcal{M}\right|}\overline{\left(\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]\right)\left[x/a\right]}\left(B\right)
\end{aligned}$$

ולכן מספיק להראות כי

$$\overline{\left(\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]\right)\left[x/a\right]}\left(B\right)=\overline{\sigma\left[x/a\right]}\left(B\right)$$

נשתמש במשפט המשתנים החופשיים, ונראה כי

$$\left(\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]\right)\left[x/a\right]\left(y\right)=\sigma\left[x/a\right]\left(y\right)$$

לכל משתנה y המופיע בצורה חופשית ב־B.

ואכן, ניזכר בהגדרה של $\sigma\left[x/a\right]$, ונשים לב כי לכל $a\in\left|\mathcal{M}\right|$,

$$\begin{aligned}
\left(\sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]\right)\left[x/a\right]\left(y\right) &= \begin{cases} a & y=x\\ \sigma\left[x/\tilde{\sigma}\left(v\right)\right]\left(y\right) & y\neq x\end{cases}\\
&= \begin{cases} a & y=x\\ \begin{cases}\tilde{\sigma}\left(v\right) & y=x\\ \sigma\left(y\right) & y\neq x\end{cases} & y\neq x\end{cases}\\
&= \begin{cases} a & y=x\\ \sigma\left(y\right) & y\neq x\end{cases}\\
&= \sigma\left[x/a\right]\left(y\right)
\end{aligned}$$

כנדרש.

(ב) אם $x \neq z$, אז

$$A_x[v] = ((\exists z)B)_x[v] = (\exists z)(B_x[v])$$

נשים לב כי מצד אחד,

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(A_x[v]) &= \overline{\sigma}((\exists z)B_x[v]) \\
&= \bigvee_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[z/a]}(B_x[v]) \\
\left(\begin{array}{c}\text{Induction: The length}\\ \text{of } B \text{ is shorter}\end{array}\right) &= \bigvee_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[z/a]\left[x/\widetilde{\sigma[z/a]}(v)\right]}(B)
\end{aligned}$$

כאשר נשים לב כי השוויון השלישי הוא הפעלת הנחת האינדוקציה על ההשמה $\sigma[z/a]$.

וכמו כן מצד שני,

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(A) &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}((\exists z)B) \\
&= \bigvee_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)][z/a]}(B)
\end{aligned}$$

ולכן מספיק להראות כי

$$\overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)][z/a]}(B) = \overline{(\sigma[z/a])\left[x/\widetilde{\sigma[z/a]}(v)\right]}(B)$$

שוב נשתמש במשפט המשתנים החופשיים, ונראה כי

$$\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)][z/a](y) = (\sigma[z/a])\left[x/\widetilde{\sigma[z/a]}(v)\right](y)$$

לכל משתנה y המופיע בצורה חופשית ב-B.

ניזכר בהגדרה של $\sigma[x/a]$, ונשים לב כי לכל $a \in |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}
(\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)])[z/a](y) &= \begin{cases} a & y = z \\ \sigma[x/\tilde{\sigma}(v)](y) & y \neq z \end{cases} \\
&= \begin{cases} a & y = z \\ \begin{cases} \tilde{\sigma}(v) & y = x \\ \sigma(y) & y \neq x \end{cases} & y \neq z \end{cases} \\
&= \begin{cases} a & y = z \\ \tilde{\sigma}(v) & y = x \\ \sigma(y) & y \neq x \text{ and } y \neq z \end{cases}
\end{aligned}$$

באותו אופן, לכל $a \in |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}
(\sigma[z/a])\left[x/\widetilde{\sigma[z/a]}(v)\right](y) &= \begin{cases} \widetilde{\sigma[z/a]}(v) & y = x \\ \sigma[z/a](y) & y \neq x \end{cases} \\
&= \begin{cases} \widetilde{\sigma[z/a]}(v) & y = x \\ \begin{cases} a & y = z \\ \sigma(y) & y \neq z \end{cases} & y \neq x \end{cases} \\
&= \begin{cases} \widetilde{\sigma[z/a]}(v) & y = x \\ a & y = z \\ \sigma(y) & y \neq x \text{ and } y \neq z \end{cases}
\end{aligned}$$

ולכן ההשמות הללו זהות למעט - לכאורה - על המשתנה $x = y$. נראה כי אכן $\tilde{\sigma}(v) = \widetilde{\sigma[z/a]}(v)$. טענה זו אינה נכונה באופן כללי, אולם דרשנו שההצבה $A_x[v]$ תהיה חוקית, כלומר שכל ההופעות החופשיות של משתנים ב־v לא ייקשרו בכמת בנוסחה $A_x[v]$, ודרישה זו תפתור את הבעיה.
נחלק לשני מקרים אפשריים,

- x לא מופיע בצורה חופשית ב־B: הצבה פועלת רק על משתנים חופשיים, ולכן במקרה זה ההצבה לא משנה דבר ומתקיים,

$$A_x[v] = ((\exists z) B)_x [v] = (\exists z) B_x [v] = (\exists z) B = A$$

מקרה זה כיסינו לעיל (4א).

- x מופיע בצורה חופשית ב־B: במקרה זה, כדי שההצבה תהיה חוקית בהכרח יש להניח כי z לא מופיע ב־v (אחרת הצבת v במקום x הייתה קושרת את z בכמת $\exists z$ והופכת את ההצבה ללא־חוקית). נשים לב כי $\sigma(y) = \sigma[z/a](y)$ לכל משתנה y שמופיע ב־v, שכן המקרה היחיד שבו זה לא מתקיים הוא $z = y$, וזה לא ייתכן לפי ההנחה כי z לא מופיע ב־v. לכן לפי משפט שהראינו לעיל נובע כי $\tilde{\sigma}(v) = \widetilde{\sigma[z/a]}(v)$, כנדרש. ■

חלק II
נכונות ויסיקות

רקע: תחילה נתאר דרך לקבוע "נכונות" של נוסחה במסגרת של "תאוריה" (נגדיר מיד מהי תאוריה ונתאר את קבוצת הנוסחאות הנכונות - "סגור גלואה"), ובנפרד נתאר דרך "להסיק" נוסחה במסגרת של תאוריה (נגדיר בהמשך מהי הסקה).

לאחר מכן נציג שני משפטים חשובים שיזהו בין שני אוספי הנוסחאות הללו. כלומר, האחד יקבע כי כל נוסחה נכונה במובן שנגדיר היא ניתנת להסקה (משפט השלמות של גדל), והאחר יקבע כי כל נוסחה שניתנת להסקה בצורה שנגדיר היא נכונה (משפט הנאותות).

6 תאוריות ומודלים

הגדרה: **תאוריה** היא מחלקה של נוסחאות.

הגדרה: תהי T תאוריה. מבנה $\mathcal{M}$ נקרא **מודל** של T, אם לכל $A \in T$, $\mathcal{M} \vDash A$.

דוגמה: את הטרנזיטיביות של היחס $<$ על המספרים הטבעיים, ניתן לכתוב

$$A_1 = (\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,((<(x,y) \wedge <(y,z)) \rightarrow <(x,z))$$

את העובדה שכל זוג מספרים הם "ברי־השוואה" ביחס $<$, ניתן לכתוב

$$A_2 = (\forall x)\,(\forall y)\,(<(x,y) \vee \approx(x,y) \vee (<(y,x)))$$

וכן את התכונה האנטי־רפלקסיבית של היחס $<$, ניתן לכתוב

$$A_3 = (\forall x)\,(\neg <(x,x))$$

אם $\mathcal{M}$ מבנה המספק את A_1, A_2, A_3, כלומר $\mathcal{M} \models A_1$ וכן $\mathcal{M} \models A_2$ וכן $\mathcal{M} \models A_3$, אז $\mathcal{M}$ הוא מודל של יחס סדר לינארי. כלומר, יחס הסדר $<$ המתפרש כסמל נוסחה דו־מקומית במבנה $\mathcal{M}$, הוא יחס סדר לינארי.

את התכונה של העדר איבר מקסימלי ביחס $<$, ניתן לכתוב

$$B = (\forall x)\,(\exists y)\,(<(x,y))$$

6.1 סגור גלואה לתאוריה ולמודל

הגדרה: נניח כי T תאוריה. נגדיר את $Mod\left(T\right)$ להיות מחלקת כל המבנים שהם מודלים של T (זו התאמה $Mod : Theories \rightsquigarrow Models$).

הגדרה: נניח כי $\mathfrak{M}$ מחלקה של מבנים. נגדיר את $Th\left(\mathfrak{M}\right)$ לכלול כל נוסחה A, כך שלכל $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{M} \vDash A$ (זו התאמה $Th : Models \rightsquigarrow Theoris$).

מינוח: ההתאמות Mod, Th הן **התאמות גלואה**. כלומר, אם מתבוננים בעולם של מחלקות המבנים (Models) ובעולם התאוריות (Theories), לאחר שהפעלנו פעם אחת את ההתאמות הללו, ניתן להמשיך ללכת בין העולמות הללו באופן חופשי באמצעות ההתאמות Mod, Th. ננסח ונוכיח טענה זו מיד.

עבור T תאוריה, **סגור גלואה** של T, היא התאוריה $Th\left(Mod\left(T\right)\right)$.

עבור $\mathfrak{M}$ מחלקה של מבנים, **סגור גלואה** של $\mathfrak{M}$, היא המחלקה של המבנים $Mod\left(Th\left(\mathfrak{M}\right)\right)$.

תכונות: נתבונן בתכונות הבאות של ההתאמות Mod, Th, אותן קל להוכיח.

1. לכל תאוריות T_1, T_2, אם $T_1 \subset T_2$, אז $Mod\left(T_1\right) \supset Mod\left(T_2\right)$.
2. לכל מחלקות של מבנים $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, אם $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, אז $Th\left(\mathfrak{M}_1\right) \supset Th\left(\mathfrak{M}_2\right)$.
3. לכל תאוריה T, $T \subset Th\left(Mod\left(T\right)\right)$.
4. לכל מחלקה של מבנים $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset Mod\left(Th\left(\mathfrak{M}\right)\right)$.

טענה: ההתאמות Mod, Th הן התאמות גלואה בין $Theories, Models$.

כלומר, לכל תאוריה T,

$$Mod\left(T\right) = Mod\left(Th\left(Mod\left(T\right)\right)\right)$$

וכן לכל מחלקה של מבנים $\mathfrak{M}$,

$$Th\left(\mathfrak{M}\right) = Th\left(Mod\left(Th\left(\mathfrak{M}\right)\right)\right)$$

מסקנה: ברור שניתן להמשיך את השוויון, ולקבל שהפעלה נוספת של $Mod \circ Th$ או הפעלה נוספת של $Th \circ Mod$ אינן משנות.

הוכחה:

- היות שמתכונה 3 מתקיים $T \subset Th\left(Mod\left(T\right)\right)$, מתכונה 1 נובע $Mod\left(T\right) \supset Mod\left(Th\left(Mod\left(T\right)\right)\right)$. נותר להראות את ההכלה ההפוכה.

  עבור $\mathfrak{M} := Mod\left(T\right)$ מתכונה 4 מתקיים $\mathfrak{M} \subset Mod\left(Th\left(\mathfrak{M}\right)\right)$, כלומר

  $$Mod\left(T\right) \subset Mod\left(Th\left(Mod\left(T\right)\right)\right)$$

  ומשתי ההכלות נקבל כי

  $$Mod\left(T\right) = Mod\left(Th\left(Mod\left(T\right)\right)\right)$$

- היות שמתכונה 4 מתקיים $\mathfrak{M} \subset Mod\left(Th\left(\mathfrak{M}\right)\right)$, מתכונה 2 נובע $Th\left(\mathfrak{M}\right) \supset Th\left(Mod\left(Th\left(\mathfrak{M}\right)\right)\right)$. נותר להראות את ההכלה ההפוכה.

  עבור $T := Th\left(\mathfrak{M}\right)$ מתכונה 3 מתקיים $T \subset Th\left(Mod\left(T\right)\right)$, כלומר

$$Th\left(\mathfrak{M}\right) \subset Th\left(Mod\left(Th\left(\mathfrak{M}\right)\right)\right)$$

  ומשתי ההכלות נקבל כי

$$Th\left(T\right) = Th\left(Mod\left(Th\left(\mathfrak{M}\right)\right)\right)$$

■

7 יסיקות

רקע: בהינתן תאוריה כלשהי, ראינו מהו סגור גלואה שלה (באמצעות $Mod \circ Th$, כלומר מחלקת כל הנוסחאות שמסופקות על ידי כל המבנים שהם מודלים של התאוריה).

נשתמש במערכת חדשה כדי לתאר "הסקה" של נוסחה מתוך תאוריה, ונראה בהמשך שמערכת זו מספקת תאור מלא של סגור גלואה. כלומר, אם נתייחס לסגור גלואה כאל "מחלקת הנוסחאות הנכונות" של התאוריה, אז כל טענה יסיקה מהתאוריה היא נכונה בתאוריה (משפט הנאותות) וכל טענה נכונה בתאוריה היא יסיקה מהתאוריה (משפט השלמות של גדל).

7.1 אקסיומות לוגיות

נגדיר ארבע אקסיומות, כלומר נוסחאות שאותן נקבל כנתונות תמיד:

1. **אקסיומה פסוקית:** אם A נוסחה, אז

$$\vdash \neg A \vee A$$

2. **אקסיומת ההצבה:** לכל נוסחה A, לכל משתנה x ולכל שם עצם u, אם $A_x\left[u\right]$ היא הצבה חוקית, אז

$$\vdash A_x\left[u\right] \to \left(\exists x\right) A$$

3. **אקסיומת הזהות:** אם x משתנה, אז

$$\vdash \approx \left(x, x\right)$$

   או בקיצור,

$$\vdash x \approx x$$

4. **אקסיומת השוויון:** אם f סמל פונקציה n־מקומית, וכן $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ סמלי משתנים, אז

$$\vdash (x_1 \approx y_1) \to ((x_2 \approx y_2) \to ... \to ((x_n \approx y_n) \to (f(x_1, ..., x_n) \approx f(y_1, ..., y_n))))$$

כמו כן, אם P סמל יחס n־מקומי, וכן $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ סמלי משתנים, אז

$$\vdash (x_1 \approx y_1) \to ((x_2 \approx y_2) \to ... \to ((x_n \approx y_n) \to (P(x_1, ..., x_n) \to P(y_1, ..., y_n))))$$

הערה: היות שהאיווי כפונקציה של קבוצת ערכי האמת מקיים אסוציאטיביות, נשמיט את הסוגריים. למשל,

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 = A_1 \vee (A_2 \vee A_3)$$

במקרה של אסוציאטיביות האיווי אכן לא משנה כיצד נכתבים הסוגריים, אבל לעתים יש לזה חשיבות רבה, כמו במקרה של החץ:

מוסכמה: פעולת "החץ" (כפונקציה על קבוצת ערכי האמת) <u>אינה</u> אסוציאטיבית, ולכן נסכים על <u>סוגריים מנורמלים לימין</u>. למשל,

$$A \to B \to C = A \to (B \to C)$$

בפרט נוכל לכתוב את אקסיומת השוויון עבור סמל פונקציה,

$$(x_1 \approx y_1) \to (x_2 \approx y_2) ... \to (x_n \approx y_n) \to f(x_1, ..., x_n) \approx f(y_1, ..., y_n)$$

ובדומה עבור סמל יחס,

$$(x_1 \approx y_1) \to (x_2 \approx y_2) \to ... \to (x_n \approx y_n) \to (P(x_1, ..., x_n) \to P(y_1, ..., y_n))$$

7.2 הסקה לוגית

הגדרה: נגדיר 5 **כללי היסק**,

1. **כלל ההרחבה:** $A \vdash B \vee A$
2. **כלל הצמצום:** $A \vee A \vdash A$
3. **כלל האסוציאטיביות:** $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$
4. **כלל החתך:** $\{A \vee B, \neg A \vee C\} \vdash B \vee C$
5. **כלל הכנסת הכמת:** מהנוסחה $A \to B \vdash (\exists x) A \to B$, בתנאי שהנוסחה B אינה מכילה הופעות חופשיות של המשתנה x.

הגדרה: אם T תאוריה (אולי ריקה), **סדרת היסק** ב־T היא סדרת נוסחאות $A_1, ..., A_n$ בשפה, כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיימת אחת מהאפשרויות הבאות,

1. $A_i \in T$

2. A_i אקסיומה לוגית

3. A_i מתקבלת מתוך אחד מחמשת כללי ההיסק. כלומר,

(א) **מכלל ההרחבה:** קיים $j < i$, כך ש־$A_j = B$ וגם $A_i = C \vee B$

(ב) **מכלל הצמצום:** קיים $j < i$, כך ש־$A_j = B \vee B$ וגם $A_i = B$

(ג) **מכלל האסוציאטיביות:** קיים $j < i$ כך ש־$A_j = B \vee (C \vee D)$ וגם $A_i = (B \vee C) \vee D$

(ד) **מכלל החתך:** קיימים $j, h < i$ כך ש־$A_h = B \vee C$ וכן $A_j = \neg B \vee D$ וגם $A_i = C \vee D$

(ה) **מכלל הכנסת הכמת:** קיים $j < i$ כך ש־$A_j = B \to C$ וגם $A_i = (\exists x)\, B \to C$, כאשר אין ב־$C$ הופעות חופשיות של המשתנה x.

הגדרה: אם T תאוריה (אולי ריקה), אומרים ש**ניתן להסיק** נוסחה A מתוך T, או כי A **יסיקה** מתוך T, אם קיימת סדרת היסק $A_1, ..., A_n$ ב־T, כך שמתקיים $A = A_n$.

במקרה כזה מסמנים זאת

$$T \vdash A$$

אם T ריקה, נסמן

$$\vdash A$$

חלק III

נאותות

8 משפט הנאותות

משפט הנאותות: תהי T תאוריה. לכל $\mathcal{M}$ מודל של T, לכל נוסחה A שעבורה $T \vdash A$, בהכרח גם $\mathcal{M} \vDash A$.

כלומר, לכל תאוריה T, אם מבנה $\mathcal{M}$ מספק את כל הנוסחאות שבתאוריה, אז הוא מספק את כל הנוסחאות שיסיקות מהתאוריה.

מסקנה: בסימונים שהראינו לעיל,

$$Th\left(Mod\left(T\right)\right) \supset \{A \mid T \vdash A\}$$

היות שבהינתן $T \vdash A$, מהמשפט נובע שלכל $\mathcal{M} \in Mod\left(T\right)$, $\mathcal{M} \vDash A$, כלומר $A \in Th\left(Mod\left(T\right)\right)$.

מבוא להוכחת משפט הנאותות: איך בנויה ההוכחה?

הוכחת משפט הנאותות יחסית קלה אבל ארוכה ועלולה לבלבל היות שהיא דורשת בדיקה של מקרים רבים. לשם כך נחלק את ההוכחה לשלושה חלקים.

- נציג את המטרה: ברקע נתונה תאוריה T כלשהי ונתון $\mathcal{M}$ כלשהו מודל של T (כלומר $\mathcal{M} \vDash T$). תהי A נוסחה כלשהי שעבורה $T \vdash A$, נרצה להראות כי $\mathcal{M} \vDash A$. איך מראים זאת?

נזכור כי $T \vdash A$ אם יש לה סדרת היסק, כאשר סדרת היסק בנויה משלושה סוגי רכיבים: **אקסיומות לוגיות**, **נוסחאות התאוריה** T **וכללי היסק**. לפיכך, כדי לבדוק שעבור A המקיימת $T \vdash A$ אכן מתקיים $\mathcal{M} \vDash A$, עלינו לבדוק זאת עבור שלושת סוגי הרכיבים: עבור A שהיא אקסיומה לוגית, עבור $A \in T$ ועבור A המתקבלת מכלל היסק.
נשים לב שמההגדרה של מודל ברור שהמשפט נכון עבור נוסחאות התאוריה, לכן העבודה תהיה להוכיח את המשפט ל**אקסיומות לוגיות** ול**כללי היסק**.
מתוך נכונות משפט הנאותות עבור נוסחאות הבנויות מאחד משני הרכיבים הללו, יהיה קל להוכיח את נכונות המשפט לכל נוסחה יסיקה, באינדוקציה על אורך סדרת ההיסק שלה. בסיס האינדוקציה הוא הוכחת הטענה עבור האקסיומות הלוגיות ונוסחאות התאוריה T, וצעד האינדוקציה הוא הוכחת הטענה עבור כללי היסק.

8.1 חלק א: הוכחת משפט הנאותות לאקסיומות לוגיות

יש ארבע אקסיומות לוגיות. נבדוק כל אחת.

לאקסיומה פסוקית

נניח כי A אקסיומה פסוקית, כלומר $A = \neg B \vee B$.

לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(\neg B \vee B)\\ &= \overline{\sigma}(\neg B) \vee \overline{\sigma}(B)\\ &= \neg\overline{\sigma}(B) \vee \overline{\sigma}(B)\\ &= \vee(\neg\overline{\sigma}(B), \overline{\sigma}(B))\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

כלומר $\mathcal{M} \vDash A$.

לאקסיומת הזהות

נניח כי A אקסיומת הזהות, כלומר $A = (x \approx x)$.
לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(x \approx x)\\ &= \approx^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(x), \tilde{\sigma}(x))\\ &= \approx^{\mathcal{M}}(\sigma(x), \sigma(x))\\ \text{(General interpretation of } \approx) &= \begin{cases}\mathbb{T} & \sigma(x) = \sigma(x)\\ \mathbb{F} & \text{otherwise}\end{cases}\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

כלומר $\mathcal{M} \vDash A$.

נשתמש בהוכחה זו בעובדה שעבור $A \to B$, מתקיים $\overline{\sigma}(A \to B) = \overline{\sigma}(A) \to \overline{\sigma}(B)$, כאשר פעולת החץ משמשת כאן כפונקציה $\to : \{\mathbb{T},\mathbb{F}\} \to \{\mathbb{T},\mathbb{F}\}$ (אלו שני חיצים בעלי משמעות שונה), המוגדרת על ידי

$$\to (a,b) = (\neg a) \vee b$$

או באופן מפורש,

$$\begin{aligned} \to (\mathbb{T},\mathbb{T}) &= \mathbb{T} \\ \to (\mathbb{T},\mathbb{F}) &= \mathbb{F} \\ \to (\mathbb{F},\mathbb{T}) &= \mathbb{T} \\ \to (\mathbb{F},\mathbb{F}) &= \mathbb{T} \end{aligned}$$

ואז נקבל מההגדרה $A \to B = (\neg A) \vee B$,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(A \to B) &= \overline{\sigma}((\neg A) \vee B) \\ &= \overline{\sigma}(\neg A) \vee \overline{\sigma}(B) \\ &= (\neg\overline{\sigma}(A)) \vee \overline{\sigma}(B) \\ &= \overline{\sigma}(A) \to \overline{\sigma}(B) \end{aligned}$$

הערה: נוכיח לאקסיומת השוויון עם סמל פונקציה n־מקומי, והוכחה כמעט זהה תהיה נכונה גם עבור אקסיומת השוויון עם סמל יחס n־מקומי.

נניח A אקסיומת השוויון עם סמל פונקציה n־מקומי f, כלומר

$$A = (x_1 \approx y_1) \to \ldots \to (x_n \approx y_n) \to (f(x_1,\ldots,x_n) \approx f(y_1,\ldots,y_n))$$

לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}((x_1 \approx y_1) \to \ldots \to (x_n \approx y_n) \to (f(x_1,\ldots,x_n) \approx f(y_1,\ldots,y_n))) \\ &= \overline{\sigma}(x_1 \approx y_1) \to \ldots \to \overline{\sigma}(x_n \approx y_n) \to \overline{\sigma}(f(x_1,\ldots,x_n) \approx f(y_1,\ldots,y_n)) \\ &= \left(x_1 \approx^{\mathcal{M}} y_1\right) \to \ldots \to \left(x_n \approx^{\mathcal{M}} y_n\right) \to \\ &\to \left(f^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n)) \approx^{\mathcal{M}} f^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1),\ldots,\sigma(y_n))\right) \\ &:= Q_1 \to \ldots \to Q_n \to f^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n)) \approx^{\mathcal{M}} f^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1),\ldots,\sigma(y_n)) \end{aligned}$$

כאשר מסמנים עבור $1 \le i \le n$,

$$Q_i := \begin{cases} \mathbb{T} & x_i = y_i \\ \mathbb{F} & \text{otherwise} \end{cases}$$

נראה כי ערך האמת של הביטוי שהתקבל הוא תמיד $\mathbb{T}$, ולשם כך נחלק לשני מקרים.

- אם $Q_i = \mathbb{T}$ לכל $1 \le i \le n$, כלומר $x_i = y_i$ לכל $1 \le i \le n$, אז $\sigma(x_i) = \sigma(y_i)$ לכל $1 \le i \le n$, ולכן

$$f(\sigma(x_1), ..., \sigma(x_n)) = f(\sigma(y_1), ..., \sigma(y_n))$$

כלומר

$$\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$$

- אם יש $1 \le j \le n$ שעבורו

$$Q_j = \mathbb{F}$$

אז נניח ללא הגבלת הכלליות כי j הוא האינדקס הראשון שעבורו $Q_j = \mathbb{F}$, ואז נקבל כי היות שבאופן כללי $\mathbb{F} \to \mathbb{T} = \mathbb{T}$,

$$Q_j \to Q_{j+1} \to ... \to Q_n \to f^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), ..., \sigma(x_n)) \approx^{\mathcal{M}} f^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1), ..., \sigma(y_n)) = \mathbb{T}$$

ולכן

$$Q_1 \to ... \to Q_j \to ... \to Q_n \to f^{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), ..., \sigma(x_n)) \approx^{\mathcal{M}} f^{\mathcal{M}}(\sigma(y_1), ..., \sigma(y_n)) = \mathbb{T}$$

כנדרש.

לאקסיומת ההצבה

נניח כי A אקסיומת ההצבה, כלומר $A = (B_x[v] \to (\exists x) B)$.
לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(B_x[v] \to (\exists x) B) \\ &= \overline{\sigma}(B_x[v]) \to \overline{\sigma}((\exists x) B) \\ &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(B) \to \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B)\end{aligned}$$

כאשר השוויון השני מוסבר בתיבה שבראשית ההוכחה הקודמת - לאקסיומת השוויון, והשוויון השלישי הוא מטענה שהראינו לגבי פעולת השמה על הצבה.
כעת נקבל,

- אם $\overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(B) = \mathbb{F}$, אז $\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B) = \mathbb{T}$, כי באופן כללי $\mathbb{F} \to \mathbb{T} = \mathbb{T}$.
- אם $\overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(v)]}(B) = \mathbb{T}$, אז עבור האיבר $a_0 := \tilde{\sigma}(v) \in |\mathcal{M}|$ נקבל $\overline{\sigma[x/a_0]}(B) = \mathbb{T}$, כלומר $\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B) = \mathbb{T}$.

כלומר $\mathcal{M} \vDash A$.

8.2 חלק ב: הוכחת משפט הנאותות לכללי היסק

לכלל ההרחבה

נניח כי A מתקבלת מכלל ההרחבה, כלומר מסיקים את $A = B \vee C$ מתוך C.
לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(B \vee C)\\ &= \overline{\sigma}(B) \vee \overline{\sigma}(C)\\ &= \overline{\sigma}(B) \vee \mathbb{T}\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

כלומר $\mathcal{M} \vDash A$.

לכלל הצמצום

נניח כי A מתקבלת מכלל הצמצום, כלומר מסיקים את $A = B$ מתוך $B \vee B$.
לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(B)\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

כלומר $\mathcal{M} \vDash A$.

לכלל האסוציאטיביות

נניח כי A מתקבלת מכלל האסוציאטיביות, כלומר מסיקים את $A = (B \vee C) \vee D$ מתוך $B \vee (C \vee D)$.
לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}((B \vee C) \vee D)\\ &= \overline{\sigma}(B \vee C) \vee \overline{\sigma}(D)\\ &= \overline{\sigma}(B) \vee \overline{\sigma}(C) \vee \overline{\sigma}(D)\\ &= \overline{\sigma}(B) \vee \overline{\sigma}(C \vee D)\\ &= \overline{\sigma}(B \vee (C \vee D))\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

כלומר $\mathcal{M} \vDash A$.

לכלל החתך

נניח כי A מתקבלת מכלל החתך, כלומר מסיקים את $A = C \vee D$ מתוך $B \vee C$ וגם $\neg B \vee D$.
לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}(D \vee C)\\ &= \overline{\sigma}(D) \vee \overline{\sigma}(C)\end{aligned}$$

מצד שני, נתון כי

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &= \overline{\sigma}(B \vee C)\\ &= \overline{\sigma}(B) \vee \overline{\sigma}(C)\end{aligned}$$

ולכן אם $\overline{\sigma}(B) = \mathbb{F}$, בהכרח $\overline{\sigma}(C) = \mathbb{T}$, ולכן במקרה זה $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$.
אבל גם נתון כי

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &= \overline{\sigma}(\neg B \vee D)\\ &= \overline{\sigma}(\neg B) \vee \overline{\sigma}(D)\\ &= \neg\overline{\sigma}(B) \vee \overline{\sigma}(D)\end{aligned}$$

ולכן אם $\overline{\sigma}(B) = \mathbb{T}$, כלומר $\neg\overline{\sigma}(B) = \mathbb{F}$, בהכרח $\overline{\sigma}(D) = \mathbb{T}$, ולכן במקרה זה $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$.
מתקיימת בדיוק אחת משתי האפשרויות הבאות: $\overline{\sigma}(B) = \mathbb{F}$ או $\overline{\sigma}(B) = \mathbb{T}$, ולכן בכל מקרה $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$, כלומר $\mathcal{M} \vDash A$.

לכלל הכנסת הכמת

נניח כי A מתקבלת מכלל הכנסת הכמת, כלומר מסיקים את $A = (\exists x) B \to C$ מתוך $B \to C$, עבור נוסחה C שאין בה הופעות חופשיות של המשתנה x.
לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}((\exists x) B \to C)\\ &= \overline{\sigma}((\exists x) B) \to \overline{\sigma}(C)\\ &= \left(\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B)\right) \to \overline{\sigma}(C)\end{aligned}$$

- אם $\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B) = \mathbb{F}$, אז היא גוררת כל נוסחה, כי באופן כללי כל גרירה מהצורה $\mathbb{F} \to \mathbb{T}$ היא בעלת ערך אמת $\mathbb{T}$. לכן במקרה זה $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$.
- אם $\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B) = \mathbb{T}$, אז יש $a_0 \in |\mathcal{M}|$ שעבורו $\overline{\sigma[x/a_0]}(B) = \mathbb{T}$.

  נשים לב שנתון כי $\mathcal{M} \vDash B \to C$, לכן בפרט עבור ההשמה $\sigma[x/a_0]$,

  $$\begin{aligned}\mathbb{T} &= \overline{\sigma[x/a_0]}(B \to C)\\ &= \overline{\sigma[x/a_0]}(B) \to \overline{\sigma[x/a_0]}(C)\end{aligned}$$

  ולכן

  $$\overline{\sigma[x/a_0]}(C) = \mathbb{T}$$

  כעת, נשים לב שהיות שבנוסחה C אין הופעות חופשיות של x, לכל $a \in |\mathcal{M}|$ מתקיים

  $$\overline{\sigma[x/a]}(C) = \overline{\sigma}(C)$$

כי המקרה היחיד שייתכן כי $\sigma(y) \neq \sigma[x/a](y)$ הוא עבור $y = x$, אבל x אינו בעל הופעה חופשית ב־C ולכן

$$\overline{\sigma}(C) = \overline{\sigma[x/a_0]}(C) = \mathbb{T}$$

כלומר, בכל מקרה $\bigvee_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B) \rightarrow \overline{\sigma}(C) = \mathbb{T}$, ולכן $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$.

8.3 חלק ג: הוכחת משפט הנאותות לכל נוסחה יסיקה

נוכיח באינדוקציה על אורך סדרת ההיסק.

תהי A המקיימת $T \vdash A$, עם סדרת היסק $A_1, ..., A_n$ כך שמתקיים $A = A_n$.

עבור $n = 1$, כלומר A היא אקסיומה לוגית או נוסחה ב־T. אם A אקסיומה לוגית הוכחנו כי $\mathcal{M} \vDash A$. אם $A \in T$, אז היות $\mathcal{M}$ מודל של T, מהגדרה נובע כי $\mathcal{M}$ מספק את כל נוסחאות T.

כעת, אם המשפט נכון עבור סדרות מאורך $n-1$, הרי ש־A_n אקסיומה לוגית, נוסחה ב־T או מתקבלת מכלל היסק. עבור כל המקרים הללו ראינו כי $\mathcal{M} \vDash A_n$, ולכן המשפט נכון עבור A. ■

חלק IV
טאוטולוגיה

9 פרולוג: טאוטולוגיה ויסיקות מצומצמת

לעיל עסקנו באוסף הנוסחאות $Th\left(Mod\left(T\right)\right)$ עבור תאוריה T, וכעת נעסוק בתת־אוסף מתוכו, **הנוסחאות הטאוטולוגיות** של T.
במקביל, במקום להתבונן באוסף הנוסחאות היסיקות מתוך T, נצטמצם לתת־אוסף מתוכו, הנוסחאות **היסיקות במצומצם** מתוך T.
נגדיר בהמשך מהן הנוסחאות הללו, ונראה כי נוכל להשיג תוצאה שמזהה בין שני תתי האוספים הללו: נוסחה A היא **טאוטולוגיה**, אם ורק אם היא **יסיקה במצומצם** מתוך T.
כלומר, היות שהצטמצמנו רק לחלק מסוים מנוסחאות $Th\left(Mod\left(T\right)\right)$, נקבל איפיון מלא שלהן על ידי היסק מצומצם, כלומר היסק שכולל רק חלק מהאקסיומות וכללי ההיסק שהגדרנו לעיל.
את הכיוון הראשון של התוצאה החדשה ישיג **משפט פוסט** (כל נוסחה טאוטולוגית היא יסיקה במצומצם), ואת הכיוון השני ישיג **משפט הנאותות המצומצם** (כל נוסחה יסיקה במצומצם היא טאוטולוגיה).

10 הערכה

הגדרה: נוסחה A בשפה נקראת **אלמנטרית**, אם היא נוסחה אטומית, או שהיא מהצורה $A = \left(\exists x\right) B$.

טענה: ניתן לבטא כל נוסחה באמצעות נוסחאות אלמנטריות, על ידי שימוש בקשרים לוגיים בלבד של שלילה ואיווי.

הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של נוסחה. תהי A נוסחה בעלת סדרת יצירה $A_1, ..., A_n$.

אם $n = 1$ אז $A = P\left(u_1, ..., u_m\right)$ עבור P סמל יחס m־מקומי ועבור $u_1, ..., u_m$ שמות עצם, ולכן A עצמה נוסחה אלמנטרית. עבור n כללי, אם הטענה נכונה עבור סדרות יצירה מאורך קטן מ־n, אז

1. אם $A = P\left(u_1, ..., u_m\right)$ עבור P סמל יחס m־מקומי ועבור $u_1, ..., u_m$ שמות עצם, אז A עצמה נוסחה אלמנטרית.
2. $A = A_j \vee A_k$ עבור $n > j, k$ כלשהם, אז A מתקבלת מנוסחאות אלמנטריות (מהנחת האינדוקציה) על ידי איווי.
3. $A = \neg A_j$ עבור $n > j$ כלשהו, אז A מתקבלת מנוסחה אלמנטרית (מהנחת האינדוקציה) על ידי שלילה.
4. $A = \left(\exists x\right) A_j$ עבור $n > j$ כלשהו, אז A עצמה נוסחה אלמנטרית.

■

הגדרה: **הערכה** היא העתקה ν הנותנת לכל נוסחה אלמנטרית A ערך אמת כלשהו $\nu\left(A\right) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$.

היות שכל נוסחה ניתנת לביטוי על ידי נוסחאות אלמנטריות באמצעות הקשרים הלוגיים של איווי ושלילה, נתיחס לכל הערכה כמוגדרת על כל הנוסחאות בשפה, על ידי הדרישה שהיא תכבד את הקשרים הלוגיים, כלומר

1.

$$\nu\left(A\vee B\right)=\nu\left(A\right)\vee\nu\left(B\right)$$

2.

$$\nu\left(\neg A\right)=\neg\nu\left(A\right)$$

הערה: כל השמה היא הערכה, כפי שנובע מהגדרה של השמה.

11 היגררות טאוטולוגית

הגדרה: נוסחה A נקראת **גרירה טאוטולוגית** מתוך תאוריה T, אם לכל הערכה ν, אם לכל $B\in T$, $\nu\left(B\right)=\mathbb{T}$, אז גם $\nu\left(A\right)=\mathbb{T}$.

טענה: תהי A נוסחה ותהי T תאוריה. אם A גרירה טאוטולוגית של T, אזי $A\in Th\left(Mod\left(T\right)\right)$.

הוכחה: צריך להראות שלכל $\mathcal{M}\in Mod\left(T\right)$, $\mathcal{M}\vDash A$. כלומר, $\overline{\sigma}\left(A\right)=\mathbb{T}$ לכל השמה $\sigma:Var\rightarrow\left|\mathcal{M}\right|$.

תהי $\sigma:Var\rightarrow\left|\mathcal{M}\right|$ השמה. מהיות $\mathcal{M}$ מודל של T נובע כי $\overline{\sigma}\left(B\right)=\mathbb{T}$ לכל $B\in T$. אבל כל השמה היא הערכה, ולכן מהגדרת גרירה טאוטולוגית גם $\overline{\sigma}\left(A\right)=\mathbb{T}$. כלומר קיבלנו כי $A\in Th\left(Mod\left(T\right)\right)$, כנדרש. $\blacksquare$

הגדרה: תהי T תאוריה ותהי A נוסחה. נאמר כי A **יסיקה במצומצם** מתוך T, ונסמן זאת $T\vdash^{*}A$, אם A יסיקה מתוך T (כלומר $T\vdash A$) על ידי סדרת היסק שמכילה אקסיומה פסוקית בלבד (ולא אקסיומת ההצבה, אקסיומות השוויון, או אקסיומת הזהות) וכן שמכילה את כלל ההרחבה, הצמצום, האסוציאטיביות והחתך (ולא כלל הכנסת כמת).

במקרה בו T ריקה, נסמן $\vdash^{*}A$.

11.1 משפט הנאותות המצומצם

משפט הנאותות המצומצם: תהי A נוסחה ותהי T תאוריה. אם $T\vdash^{*}A$, אז A גרירה טאוטולוגית של T.

הוכחה: מהנתון $T\vdash^{*}A$ נובע כי מתקיימת אחת מהאפשרויות הבאות,

1. $A\in T$. ברור כי כל נוסחאות T עצמה גרירות טאוטולוגיות של T.

2. **אקסיומה פסוקית:** $A = \neg B \vee B$. אז לכל הערכה ν,

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(\neg B \vee B)\\ &= \nu(\neg B) \vee \nu(B)\\ &= \neg\nu(B) \vee \nu(B)\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

3. A מתקבלת מאחד מכללי ההיסק הבאים,

(א) **כלל ההרחבה:** מסיקים את $A = C \vee B$ מתוך B. אז לכל הערכה ν,

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(C \vee B)\\ &= \nu(C) \vee \nu(B)\\ &= \nu(C) \vee \mathbb{T}\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

(ב) **כלל הצמצום:** מסיקים את $A = B$ מתוך $B \vee B$. אז לכל הערכה ν,

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(B)\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

(ג) **כלל האסוציאטיביות:** מסיקים את $(B \vee C) \vee D$ מתוך $A = B \vee (C \vee D)$. אז לכל הערכה ν,

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(B \vee (C \vee D))\\ &= \nu(B) \vee \nu(C \vee D)\\ &= \nu(B) \vee \nu(C) \vee \nu(D)\\ &= \nu(B \vee C) \vee \nu(D)\\ &= \nu((B \vee C) \vee D)\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

(ד) **כלל החתך:** מסיקים את $A = C \vee D$ מתוך $B \vee C$ וגם $\neg B \vee D$. אז לכל הערכה ν,

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(C \vee D)\\ &= \nu(C) \vee \nu(D)\end{aligned}$$

- אם $\nu(B) = \mathbb{T}$, אז מתוך הנתון

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \nu(\neg B \vee D) \\ &= \nu(\neg B) \vee \nu(D) \\ &= \neg\nu(B) \vee \nu(D) \\ &= \neg\mathbb{T} \vee \nu(D) \\ &= \mathbb{F} \vee \nu(D) \end{aligned}$$

נובע כי $\nu(D) = \mathbb{T}$, ולכן במקרה זה $\nu(A) = \mathbb{T}$.

- אם $\nu(B) = \mathbb{F}$, אז מתוך הנתון

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \nu(B \vee C) \\ &= \nu(B) \vee \nu(C) \\ &= \mathbb{F} \vee \nu(C) \end{aligned}$$

נובע כי $\nu(C) = \mathbb{T}$, ולכן גם במקרה זה $\nu(A) = \mathbb{T}$.

כעת ברור כיצד ניתן להסיק את המשפט לכל נוסחה, על ידי אינדוקציה על אורך סדרת ההיסק. ■

11.2 משפט הטאוטולוגיה של פוסט (Post)

הערה: נוסחה A נקראת **טאוטולוגיה**, אם היא גרירה טאוטולוגית של התאוריה הריקה. במילים אחרות, לכל הערכה ν, $\nu(A) = \mathbb{T}$.

הערה: נוסחאות אלמנטריות בהכרח אינן טאוטולוגיות, כי בהינתן נוסחה אלמנטרית A, ניתן להגדיר הערכה ν המקיימת $\nu(A) = \mathbb{F}$ (ועל כל שאר הנוסחאות האלמנטריות היא יכולה להיבחר שרירותית, למשל להיות $\mathbb{T}$).

משפט פוסט: תהי A נוסחה ותהי T תאוריה. אם A גרירה טאוטולוגית של T, אז $T \vdash^* A$.

הערה: בפרט נובע מכך כי $T \vdash A$.

11.2.1 בדיקת טאוטולוגיות (של נוסחאות מסוג מסוים)

מבוא: נתחיל להתבונן רק בנוסחאות מהצורה

$$A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

נרצה לנסח אלגוריתם לבדיקה האם נוסחה נתונה מהצורה הנ"ל היא טאוטולוגיה.

הראינו שכל נוסחה A ניתנת להיכתב על ידי נוסחאות אלמנטריות תוך שימוש בקשרים לוגיים של איווי ושלילה, ולכן עבור נוסחה נתונה A, היינו יכולים לעבור על כל הנוסחאות האלמנטריות שמרכיבות אותה, נאמר שיש n כאלה, ולהתבונן בכל ההערכות האפשריות על נוסחאות אלמנטריות אלה, יש 2^n כאלה, ובכך לבחון האם A טאוטולוגיה.

אך זו דרך לא יעילה, היות שמספר הפעולות בה (2^n) הוא גדול למדי. ננסח אלגוריתם יעיל יותר לבדיקה האם נוסחה היא טאוטולוגיה.

כמו כל נוסחה, גם הנוסחה $A_1 \vee ... \vee A_n$ ניתנת להיכתב על ידי נוסחאות אלמנטריות וקשרים לוגיים, ולכן מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות:

1. לכל $1 \leq i \leq n$, A_i היא נוסחה אלמנטרית או שלילה של נוסחה אלמנטרית.
2. קיים $1 \leq j \leq n$, עבורו A_j אינה נוסחה אלמנטרית ואינה שלילה של נוסחה אלמנטרית.

   מקרה זה מתפצל לבדיוק אחת משלוש אפשרויות:

   (א) $A_j = B \vee C$

   (ב) $A_j = \neg (B \vee C)$

   (ג) $A_j = \neg\neg B$

נשתמש במיון זה כדי להצביע על קיום אלגוריתם לבדיקה האם נוסחה A מהצורה הנ"ל היא טאוטולוגיה.

משפט: לכל נוסחה A מהצורה $A = A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$, ניתן לקבוע האם היא טאוטולוגיה מבלי לעבור על כל ההערכות האפשריות.

הוכחה: נחלק למקרים באופן שהסברנו במבוא, ונוכיח לכל אחד.

1. נניח שלכל $1 \leq i \leq n$, A_i היא נוסחה אלמנטרית או שלילה של נוסחה אלמנטרית.

   למה: במקרה זה, A היא טאוטולוגיה אם ורק אם קיימים $1 \leq i, j \leq n$ שונים, כך שמתקיים כי A_i נוסחה אלמנטרית וכן $A_j = \neg A_i$.

   הוכחת הלמה: (כיוון ראשון)
   נניח כי A היא טאוטולוגיה. נניח בשלילה שלא קיימים i, j כנ"ל. נגדיר הערכה ν באופן הבא:
   נשים לב שלכל $1 \leq i \leq n$, A_i נוסחה אלמנטרית או שלילה של כזאת.
   לפיכך, לכל $1 \leq i \leq n$, אם A_i נוסחה אלמנטרית נגדיר $\nu(A_i) = \mathbb{F}$, ואילו אם $A_i = \neg B$ עבור B נוסחה אלמנטרית כלשהי, אז $\nu(B) = \mathbb{T}$ ולכן שוב $\nu(A_i) = \mathbb{F}$.
   נשים לב שתחת הערכה זו שהגדרנו, לכל $1 \leq i \leq n$, $\nu(A_i) = \mathbb{F}$, כלומר $\nu(A) = \mathbb{F}$, בסתירה להיות A טאוטולוגיה.
   (כיוון שני)
   נניח כי קיימים i, j כנ"ל. מכאן כי לכל הערכה ν, אם $\nu(A_i) = \mathbb{T}$ אז $\nu(A) = \mathbb{T}$, ואם $\nu(A_i) = \mathbb{F}$ אז $\nu(A_j) = \neg\nu(A_i) = \mathbb{T}$, ואז שוב $\nu(A) = \mathbb{T}$. כלומר A טאוטולוגיה. ▲

   כלומר, מצאנו כי עבור המקרה הזה המשפט מתקיים.

2. קיים $1 \leq j \leq n$, עבורו A_j אינה נוסחה אלמנטרית ואינה שלילה של נוסחה אלמנטרית. נבחן את שלושת תתי המקרים של מקרה זה, כפי שהסברנו במבוא. לצורך כך נשתמש באינדוקציה על מושג חדש שנגדיר כעת.

   הגדרה: תהי A נוסחה. נגדיר עבורה את $l(A)$ באופן הבא:
   אם A נוסחה אטומית,

$$l(A) = 1$$

   אם $A = B \vee C$,

$$l(A) = l(B) + l(C) + 1$$

אם $A = \neg B$,

$$l(A) = l(B) + 1$$

אם $A = (\exists x) B$,

$$l(A) = 1$$

אם $A = A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$, נגדיר עבורה $m(A)$,

$$m(A) = l(A_1) + l(A_2) + ... + l(A_n)$$

כעת נוכיח באינדוקציה על $m(A)$ את שלושת תתי המקרים הנותרים.
בסיס האינדוקציה הוא עבור $m(A) = 1$, כלומר $A = A_1$, ולכן A נוסחה אלמנטרית. המשפט בבירור נכון לנוסחאות אלמנטריות, כי אף נוסחה אלמנטרית אינה טאוטולוגיה, שכן ניתן להגדיר הערכה ν, $\nu(A_1) = \mathbb{F}$. לכן הבדיקה האם נוסחה אלמנטרית היא טאוטולוגיה - טריוויאלית. אם כך, נניח באינדוקציה כי המשפט נכון עבור כל נוסחה $\tilde{A}$ שעבורה $m\left(\tilde{A}\right) < m(A)$.

(א) נניח $A_j = B \vee C$. נניח כי $j = 1$, כלומר $A_1 = B \vee C$.[5] במקרה זה,

$$A = (B \vee C) \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

$$m(A) = l(B \vee C) + l(A_2) + ... + l(A_n)$$

כעת נתבונן בנוסחה אחרת,

$$A^* := B \vee C \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

$$m(A^*) = l(B) + l(C) + l(A_2) + ... + l(A_n)$$

נשים לב כי הגדרנו

$$l(B \vee C) = l(B) + l(C) + 1$$

ולכן

$$m(A^*) < m(A)$$

ומהנחת האינדוקציה ניתן לקבוע האם A^* טאוטולוגיה.

למה: A טאוטולוגיה אם ורק אם A^* טאוטולוגיה.

[5] נשים לב כי הבחירה $j = 1$ אינה משפיעה על ערך האמת של A תחת כל הערכה ν, היות שהצורה של A היא $A = A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$.

הוכחת הלמה: לכל הערכה ν,

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu((B\vee C)\vee A_2\vee ...\vee A_n)\\ &= \nu(B\vee C)\vee\nu(A_2\vee ...\vee A_n)\\ &= \nu(B)\vee\nu(C)\vee\nu(A_2\vee ...\vee A_n)\\ &\quad \nu(B)\vee\nu(C\vee A_2\vee ...\vee A_n)\\ &= \nu(B\vee C\vee A_2\vee ...\vee A_n)\\ &= \nu(A^*)\end{aligned}$$

▲

ולכן ניתן לקבוע האם A טאוטולוגיה על ידי הקביעה האם A^* טאוטולוגיה.

(ב) נניח $A_j=\neg(B\vee C)$. נניח כי $j=1$, כלומר $A_1=\neg(B\vee C)$.[6] במקרה זה,

$$A=\neg(B\vee C)\vee A_2\vee ...\vee A_n$$

$$\begin{aligned}m(A) &= l(\neg(B\vee C))+l(A_2)+...+l(A_n)\\ &= l(B\vee C)+1+l(A_1)+...+l(A_n)\end{aligned}$$

כעת נתבונן בזוג נוסחאות אחרות,

$$A_1^*:=\neg B\vee A_2\vee ...\vee A_n$$

$$A_2^*:=\neg C\vee A_2\vee ...\vee A_n$$

$$\begin{aligned}m(A_1^*) &= l(\neg B)+l(A_2)+...+l(A_n)\\ &= l(B)+1+l(A_2)+...+l(A_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(A_2^*) &= l(\neg C)+l(A_2)+...+l(A_n)\\ &= l(C)+1+l(A_2)+...+l(A_n)\end{aligned}$$

נשים לב כי גם כאן,

$$m(A_1^*)<m(A)\ ,\ \ m(A_2^*)<m(A)$$

ומהנחת האינדוקציה ניתן לקבוע האם A_1^*,A_2^* טאוטולוגיות.

למה: A טאוטולוגיה אם ורק אם A_1^*,A_2^* שתיהן טאוטולוגיות.

[6] נשים לב כי הבחירה $j=1$ אינה משפיעה על ערך האמת של A תחת כל הערכה ν, היות שהצורה של A היא $A=A_1\vee A_2\vee ...\vee A_n$.

הוכחת הלמה: (כיוון ראשון)
נניח כי A טאוטולוגיה. תהי ν הערכה. נתון כי $A = A_1 \vee ... \vee A_n$,
ולכן קיים גורם כלשהו A_i שעבורו $\nu (A_i) = \mathbb{T}$.
אם $i > 1$, בבירור

$$\nu (A_1^*) = \mathbb{T}\,, \ \ \nu (A_2^*) = \mathbb{T}$$

וסיימנו. לכן נניח

$$\nu (A_1) = \mathbb{T}$$

כלומר,

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \nu (A_1) \\ &= \nu (\neg (B \vee C)) \\ &= \neg \nu (B \vee C) \\ &= \neg (\nu (B) \vee \nu (C)) \end{aligned}$$

ולכן $\nu (B) = \mathbb{F}$ וגם $\nu (C) = \mathbb{F}$. מכאן כי $\nu (\neg B) = \mathbb{T}$ וגם $\nu (\neg C) = \mathbb{T}$, ולכן $\nu (A_1^*) = \mathbb{T}$ וגם $\nu (A_2^*) = \mathbb{T}$.
(כיוון שני)
נניח A_1^*, A_2^* שתיהן טאוטולוגיות. תהי ν הערכה.
אם קיים $i > 1$ שעבורו $\nu (A_i) = \mathbb{T}$, אז $\nu (A) = \mathbb{T}$ וסיימנו.
לכן נניח שלכל $i > 1$, $\nu (A_i) = \mathbb{F}$. במקרה זה היות שנתון $\nu (A_1^*) = \mathbb{T}$ וגם $\nu (A_2^*) = \mathbb{T}$, בהכרח $\nu (\neg C) = \mathbb{T}$ וגם $\nu (\neg B) = \mathbb{T}$. כלומר $\nu (C) = \mathbb{F}$, $\nu (B) = \mathbb{F}$ ולכן $\nu (C \vee B) = \mathbb{F}$, ואז $\nu (\neg (C \vee B)) = \mathbb{T}$, ולכן $\nu (A) = \mathbb{T}$. ▲
ולכן ניתן לקבוע האם A טאוטולוגיה על ידי הקביעה האם A_1^*, A_2^* טאוטולוגיות.
(ג) נניח $A_j = \neg\neg B$. נניח כי $j = 1$, כלומר $A_1 = \neg\neg B$.[7] במקרה זה,

$$A = \neg\neg B \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

$$m (A) = l (\neg\neg B) + l (A_2) + ... + l (A_n)$$

כעת נתבונן בנוסחה אחרת,

$$A^* := B \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

$$m (A^*) = l (B) + l (A_2) + ... + l (A_n)$$

נשים לב כי הגדרנו

$$l (\neg A) = l (A) + 1$$

ולכן

$$m (A^*) < m (A)$$

ומהנחת האינדוקציה ניתן לקבוע האם A^* טאוטולוגיה.

[7] נשים לב כי הבחירה $j = 1$ אינה משפיעה על ערך האמת של A תחת כל הערכה ν, היות שהצורה של A היא $A = A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$.

למה: A טאוטולוגיה אם ורק אם A^* טאוטולוגיה.
הוכחת הלמה: לכל הערכה ν,

$$\begin{aligned}\nu(A^*) &= \nu(B \vee A_2 \vee ... \vee A_n)\\ &= \nu(B) \vee \nu(A_2 \vee ... \vee A_n)\\ &= \neg\neg\nu(B) \vee \nu(A_2 \vee ... \vee A_n)\\ &= \nu(\neg\neg B) \vee \nu(A_2 \vee ... \vee A_n)\\ &= \nu(\neg\neg B \vee A_2 \vee ... \vee A_n)\\ &= \nu(A)\end{aligned}$$

▲

ולכן ניתן לקבוע האם A טאוטולוגיה על ידי הקביעה האם A^* טאוטולוגיה.

אם כך בחנו את כל המקרים האפשריים, ובאינדוקציה הראינו כי ניתן לבחון האם A טאוטולוגיה על ידי בחינת נוסחאות בעלות ערך m קטן מ־$m(A)$. ■

11.2.2 כללי היסק נגזרים

מבוא: להלן נציג כמה כללי היסק שניתן היה להוסיף אותם לכללי ההיסק המקוריים שהגדרנו (הרחבה, צמצום, אסוציאטיביות והכנסת כמת), אולם היות שהם נובעים מתוך האקסיומות הלוגיות וכללי ההיסק המקוריים נתיחס אליהם כאל תוצאות מהכללים המקוריים, כפי שנראה מיד.

תזכורת: להלן האקסיומות והכללים שנשתמש בהם לצורך הוכחת הכללים הנגזרים. הסימונים הם רק בפרק זה, ולצורך הפשטות במהלך (חלק מ)ההוכחות.

- AS: **אקסיומה פסוקית:** $\vdash \neg A \vee A$
- RE: **כלל ההרחבה:** $A \vdash B \vee A$
- RR: **כלל הצמצום:** $A \vee A \vdash A$
- RA: **כלל האסוציאטיביות:** $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$
- RS: **כלל החתך:** $\{A \vee B, \neg A \vee C\} \vdash B \vee C$

טענה: את כללי ההיסק הבאים ניתן לגזור מתוך כללי ההיסק המקוריים שהגדרנו לעיל.

1. **כלל הקומוטטיביות:** $A \vee B \vdash B \vee A$
2. **כלל הניתוק:** $\{A, A \to B\} \vdash B$
3. **כלל הניתוק המוכלל:** $\{A_1, ..., A_k, A_1 \to ... \to A_k \to B\} \vdash B$

הוכחה:

1. מאקסיומה פסוקית $\neg A \vee A$. לכן על ידי כלל החתך $\{A \vee B, \neg A \vee A\} \vdash B \vee A$.

2. נתון $A \to B = \neg A \vee B$. על ידי כלל ההרחבה $A \vdash B \vee A$, ועל ידי כלל הקומוטטיביות $A \vdash A \vee B$.

כעת על ידי כלל החתך $\{A \vee B, \neg A \vee B\} \vdash B \vee B$, ועל ידי כלל הצמצום $\{A \vee B, \neg A \vee B\} \vdash B$.

3. באינדוקציה על k. בסיס האינדוקציה עבור $k = 1$ הוא כלל הניתוק. עבור $k > 1$, נשים לב כי מכלל הניתוק $\{A_1, A_1 \to (A_2 \to ... \to A_k \to B)\} \vdash (A_2 \to ... \to A_k \to B)$. כעת, מהנחת האינדוקציה מתוך $\{A_2, ..., A_k, A_2 \to ... \to A_k \to B\} \vdash B$. ■

11.2.3 למת האיווי

טענה: לכל $\{i_1, ..., i_m\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ כלשהם, $A_{i_1} \vee ... \vee A_{i_m} \vdash A_1 \vee ... \vee A_n$.

הוכחה: תחילה נוכיח עבור $m = 1$, ואז עבור $m = 2$, ולבסוף עבור כל $m > 2$.

- עבור $m = 1$, יש להראות כי $A_i \vdash A_1 \vee ... \vee A_n$, עבור $i \in \{1, ..., n\}$.

$$\begin{array}{rcl}
 & & A_i \\
(RE) & \vdash & (A_{i+1} \vee ... \vee A_n) \vee A_i \\
\text{(Comutaive rule)} & \vdash & A_i \vee (A_{i+1} \vee ... \vee A_n) \\
\text{(Agreed standard)} & = & A_i \vee A_{i+1} \vee ... \vee A_n \\
(RE) & \vdash & A_{i-1} \vee (A_i \vee A_{i+1} \vee ... \vee A_n) \\
\text{(Agreed standard)} & = & A_{i-1} \vee A_i \vee A_{i+1} \vee ... \vee A_n \\
 & & \vdots \\
\text{(Repeat this } i-1 \text{ times)} & \vdash & A_1 \vee ... \vee A_i \vee ... \vee A_n
\end{array}$$

- עבור $m = 2$, יש להראות כי $A_i \vee A_j \vdash A_1 \vee ... \vee A_n$ עבור $\{i, j\} \subset \{1, ..., n\}$.

אם $i = j$, נשים לב כי $A_i \vee A_i \vdash A_i$ (כלל הצמצום), וחזרנו למקרה $m = 1$.

לכן נניח $i \neq j$.

נניח ללא הגבלת הכלליות $i < j$, כי $A_i \vee A_j \vdash A_j \vee A_i$ (מכלל הקומוטטיביות).

נשתמש באינדוקציה על n, כאשר בסיס האינדוקציה $n = 2$. נשים לב שעבור $n = 2$ ברור כי $A_1 \vee A_2 \vdash A_1 \vee A_2$, וזהו בסיס האינדוקציה.

נניח $n > 2$, כלומר צריך להראות $A_i \vee A_j \vdash A_1 \vee ... \vee A_n$ עבור $i < j$ ועבור $n > 2$. נחלק את הדיון למקרים.

  - אם $i > 1$,

$$\begin{array}{rcl}
 & & A_i \vee A_j \\
\text{(Induction)} & \vdash & A_2 \vee ... \vee A_n \\
(RE) & \vdash & A_1 \vee (A_2 \vee ... \vee A_n) \\
\text{(Agreed standard)} & = & A_1 \vee ... \vee A_n
\end{array}$$

- אם $i=1,\ j>2$,

$$\begin{array}{rcl} & & A_1 \vee A_j \\ \text{(Induction)} & \vdash & A_1 \vee A_3 \vee ... \vee A_n \\ \text{(Comutative rule)} & \vdash & (A_3 \vee ... \vee A_n) \vee A_1 \\ (RE) & \vdash & A_2 \vee ((A_3 \vee ... \vee A_n) \vee A_1) \\ (RA) & \vdash & (A_2 \vee (A_3 \vee ... \vee A_n)) \vee A_1 \\ \text{(Comutative rule)} & \vdash & A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee ... \vee A_n)) \\ \text{(Agreed standard)} & = & A_1 \vee ... \vee A_n \end{array}$$

- אם $i=1,\ j=2$,

$$\begin{array}{rcl} & & A_1 \vee A_2 \\ (RE) & \vdash & (A_3 \vee ... \vee A_n) \vee (A_1 \vee A_2) \\ (RA) & \vdash & (A_3 \vee ... \vee A_n \vee A_1) \vee A_2 \\ \text{(Comutative rule)} & \vdash & A_2 \vee ((A_3 \vee ... \vee A_n) \vee A_1) \\ (RA) & \vdash & (A_2 \vee (A_3 \vee ... \vee A_n)) \vee A_1 \\ \text{(Comutative rule)} & \vdash & A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee ... \vee A_n)) \\ \text{(Agreed standard)} & = & A_1 \vee ... \vee A_n \end{array}$$

- עבור $m>2$, נראה את הטענה באינדוקציה על m (מספר גורמי האיווי).
נשים לב שבאופן כללי על ידי RA,

$$A_{i_1} \vee ... \vee A_{i_m} \vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A_{i_3} \vee ... \vee A_{i_m}$$

נשים לב כי קיבלנו מימין ביטוי בעל $m-1$ גורמי איווי, שכן $A_{i_1} \vee A_{i_2}$ הוא גורם אחד.[8] נסמן $B := A_{i_1} \vee A_{i_2}$, ונקבל מהנחת האינדוקציה כי $B, A_{i_3}, ..., A_{i_m} \vdash B \vee A_1 \vee ... \vee A_n$,[9] כלומר

$$(A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A_{i_3} \vee ... \vee A_{i_m} \vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A_1 \vee ... \vee A_n$$

לצורך הקיצור נסמן

$$A := A_1 \vee ... \vee A_n$$

[8] נשים לב שלא ניתן להסיק מיד את $A_1 \vee ... \vee A_n$, כי הגורם $A_{i_1} \vee A_{i_2}$ אינו מופיע בה בהכרח.
[9] אין זה משנה שהסקנו $n+1$ גורמי איווי, שכן האינדוקציה היא על m (מספר גורמי האיווי בנוסחה שממנה מסיקים) ולא על n (מספר גורמי האיווי בנוסחה שאותה מסיקים).

וכעת נסיק,

$$\begin{array}{rll} & & (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A \\ \text{(Comutative rule)} & \vdash & A \vee (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \\ (RA) & \vdash & (A \vee A_{i_1}) \vee A_{i_2} \\ (\text{Induction for } m = 2) & \vdash & (A \vee A_{i_1}) \vee A \\ \text{(Comutative rule)} & \vdash & A \vee (A \vee A_{i_1}) \\ (RA) & \vdash & (A \vee A) \vee A_{i_1} \\ (\text{Induction for } m = 2) & \vdash & (A \vee A) \vee A \\ (RR) & \vdash & A \vee A \\ (RR) & \vdash & A = A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n \end{array}$$

כנדרש.[10] ■

טענה: $A \vee B \vdash (\neg\neg A) \vee B$

הוכחה: נשים לב כי,

$$\begin{array}{rll} (AS) & \vdash & (\neg\neg A) \vee (\neg A) \\ \text{(Comutative rule)} & \vdash & (\neg A) \vee (\neg\neg A) \end{array}$$

כעת נשים לב כי $\{A \vee B, (\neg A) \vee (\neg\neg A)\} \vdash B \vee (\neg\neg A)$ (מכלל החתך), וכעת $B \vee (\neg\neg A) \vdash (\neg\neg A) \vee B$ (מכלל הקומוטטיביות). ■

טענה: $\{\neg A \vee C, \neg B \vee C\} \vdash \neg (A \vee B) \vee C$

הוכחה: נשים לב כי,

$$\begin{array}{rll} (AS) & \vdash & \neg (A \vee B) \vee (A \vee B) \\ & \vdash & A \vee B \vee \neg (A \vee B) \end{array}$$

כאשר ההיסק השני הוא מלמת האיווי.

כעת, $\{A \vee (B \vee \neg (A \vee B)), \neg A \vee C\} \vdash (B \vee \neg (A \vee B)) \vee C$ (מכלל החתך), וכעת,

$$\begin{array}{rll} & & (B \vee \neg (A \vee B)) \vee C \\ \text{(Cumutative rule)} & \vdash & C \vee B \vee \neg (A \vee B) \\ & \vdash & B \vee C \vee \neg (A \vee B) \end{array}$$

[10] חשוב לשים לב היטב לשימוש במקרה $m = 2$. נסביר את הפעם הראשונה שזה מופיע בהיסק, והפעם השנייה דומה לה:
נסמן $B_1 := A \vee A_{i_1}$, נסמן $B_2 := A_{i_2}$ ונסמן $B := B_1 \vee A_1 \vee ... \vee A_{i_2} \vee ... \vee A_n$.
נשים לב כי B_1, B_2 הם שני גורמי איווי ($m = 2$) מתוך האיווי הארוך B, ולכן השימוש בהנחת האינדוקציה מאפשר להסיק $B_1 \vee B_2 \vdash B_1 \vee A$.
גם כאן אין זה משנה שהסקנו נוסחה בעלת $n + 1$ גורמי איווי, שכן האינדוקציה היא על m ולא על n.

כאשר ההיסק האחרון הוא מלמת האיווי.

כעת, $\{B \vee (C \vee \neg (A \vee B)), \neg B \vee C\} \vdash (C \vee \neg (A \vee B)) \vee C$ (מכלל החתך),
וכעת,

$$\begin{array}{rll} & & (C \vee \neg (A \vee B)) \vee C \\ \text{(Comutative rule)} & \vdash & C \vee C \vee \neg (A \vee B) \\ & \vdash & \neg (A \vee B) \vee C \end{array}$$

כאשר ההיסק האחרון הוא מלמת האיווי. ■

11.2.4 הוכחת משפט הטאוטולוגיה של פוסט

משפט (מקדים): תהי A נוסחה מהצורה $A = A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$. אם $\vdash A$, אז $\vdash^* A$.[11]

הוכחה: ניזכר במיון שיצרנו לכל הנוסחאות מהצורה הנ"ל,

1. לכל $1 \leq i \leq n$, A_i היא נוסחה אלמנטרית או שלילה של נוסחה אלמנטרית.
2. קיים $1 \leq j \leq n$, עבורו A_j אינה נוסחה אלמנטרית ואינה שלילה של נוסחה אלמנטרית.

   מקרה זה מתפצל לבדיוק אחת משלוש אפשרויות:

   (א) $A_j = B \vee C$

   (ב) $A_j = \neg (B \vee C)$

   (ג) $A_j = \neg\neg B$

נשתמש במיון זה כדי להראות כי אם A טאוטולוגיה אז $\vdash^* A$.

1. נניח כי $A = A_1 \vee ... \vee A_n$, כאשר כל A_i היא נוסחה אלמנטרית, או שלילה של נוסחה אלמנטרית.

   הראינו כי A כנ"ל היא טאוטולוגיה אם ורק אם קיימים $1 \leq i < j \leq n$, עבורם A_i נוסחה אלמנטרית וכן $A_j = \neg A_i$.

   אם כך תהי A_i נוסחה אלמנטרית וכן $A_j = \neg A_i$, אז נובע,

$$\begin{array}{rll} (AS) & \vdash & \neg A_i \vee A_i \\ {\scriptstyle (A_j = \neg A_i)} & \vdash & A_j \vee A_i \\ \vdash & \vdash & A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n \end{array}$$

   כאשר ההיסק האחרון הוא מלמת האיווי.

2. נניח כי $A = A_1 \vee ... \vee A_n$, כאשר קיים A_j שהוא איננו נוסחה אלמנטרית וגם איננו שלילה של נוסחה אלמנטרית. היות שטאוטולוגיה אינה תלויה בסדר הגורמים, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $j = 1$.

   כאמור, במקרה זה מתקיימת בדיוק אחת מתוך שלוש אפשרויות,

[11]**תזכורת:** תהי A נוסחה. נאמר כי A ***יסיקה במצומצם***, ונסמן זאת $\vdash^* A$ (ללא תלות בתאוריה מסוימת T), אם A יסיקה על ידי סדרת היסק שמכילה אקסיומה פסוקית בלבד (ולא אקסיומת ההצבה, אקסיומות השוויון, או אקסיומת הזהות) וכן שמכילה את כלל ההרחבה, הצמצום, האסוציאטיביות והחתך (ולא כלל הכנסת כמת).

(א) אם $A_1 = B \vee C$,

$$A = (B \vee C) \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

נגדיר

$$A^* := B \vee C \vee (A_2 \vee ... \vee A_n)$$

ברור כי A טאוטולוגיה אם ורק אם A^* טאוטולוגיה.[12]
נזכור שהגדרנו

$$\begin{aligned} m(A) &= l(B \vee C) + \sum_{i=2}^{n} l(A_i) \\ &= l(B) + l(C) + 1 + \sum_{i=2}^{n} l(A_i) \end{aligned}$$

$$m(A^*) = l(B) + l(C) + \sum_{i=2}^{n} l(A_i)$$

ולכן $m(A^*) < m(A)$, ומהנחת האינדוקציה $\vdash^* A^*$.
כעת, מתוך $\vdash^* A^* = B \vee (C \vee (A_2 \vee ... \vee A_n))$ נובע $\vdash^* A = (B \vee C) \vee (A_2 \vee ... \vee A_n)$ (אסוציאטיביות).

(ב) אם $A_1 = \neg\neg B$,

$$A = (\neg\neg B) \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

נגדיר

$$A^* := B \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

ברור כי A טאוטולוגיה אם ורק אם A^* טאוטולוגיה.[13]
כמו כן ברור כי $m(A^*) < m(A)$, ולכן מהנחת האינדוקציה $\vdash^* A^*$.
מטענה קודמת, באופן כללי מתוך $A \vee B \vdash (\neg\neg A) \vee B$, ולכן מתוך $\vdash^* A^* = B \vee A_2 \vee ... \vee A_n$ נובע $\vdash^* A = (\neg\neg B) \vee A_2 \vee ... \vee A_n$.

(ג) אם $A_1 = \neg(B \vee C)$,

$$A = (\neg(B \vee C)) \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

נגדיר

$$A_1^* := (\neg B) \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

$$A_2^* := (\neg C) \vee A_2 \vee ... \vee A_n$$

הראינו בטענה על בדיקת טאוטולוגיות למה הקובעת כי A טאוטולוגיה אם ורק אם A_1^*, A_2^* שתיהן יחד טאוטולוגיות.

---

[12] ניתן לבדוק כי לכל הערכה ν, $\nu(A) = \nu(A^*)$.
[13] ניתן לבדוק כי לכל הערכה ν, $\nu(A) = \nu(A^*)$.

כמו כן ראינו כי $m\left(A_1^*\right) < m\left(A\right)$ וגם $m\left(A_2^*\right) < m\left(A\right)$, ולכן מהנחת האינדוקציה $\vdash^* A_1^*$ וגם $\vdash^* A_2^*$.
מטענה קודמת, באופן כללי $\{\neg B \vee D, \neg C \vee D\} \vdash^* \neg\left(B \vee C\right) \vee D$,
ולכן גם כאן נובע $\{A_1^*, A_2^*\} \vdash^* A$. ■

מסקנה (משפט פוסט לתאוריה סופית): תהי A נוסחה ותהי T תאוריה סופית. אם A גרירה טאוטולוגית של T, אז $T \vdash^* A$.

הוכחה: נסמן $T := \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ ונניח כי A גרירה טאוטולוגית של T. נגדיר נוסחה $C := B_1 \to B_2 \to ... \to B_m \to A$, ונשים לב כי C היא טאוטולוגיה. זאת כי לכל הערכה ν, אם $\nu\left(B_i\right) = \mathbb{T}$ לכל $1 \le i \le m$, אז מהיות A גרירה טאוטולוגית של T, גם $\nu\left(A\right) = \mathbb{T}$, ולכן $\nu\left(C\right) = \mathbb{T}$, וכמו כן אם קיים $1 \le j \le m$ שעבורו $\nu\left(B_j\right) = \mathbb{F}$, אז שוב $\nu\left(C\right) = \mathbb{T}$.

נשים לב כי $C = \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee ... \vee \neg B_m \vee A$, ולכן מהמשפט המקדים נובע כי $\vdash^* C$.
כעת על ידי כלל הניתוק המוכלל $T \cup \{C\} \vdash^* A$ (ונשים לב כי כלל הניתוק המוכלל מתבסס רק על אקסיומות וכללים השייכים להיסק המצומצם), כלומר $T \vdash^* A$. ■

משפט: אם A גרירה טאוטולוגית של T, אז קיימת $T_0 \subset T$ תת קבוצה סופית, כך ש-A גרירה טאוטולוגית של T_0.

הערה: משפט זה משתמש באקסיומת הבחירה.

הוכחה: נניח בשלילה שלכל תת קבוצה סופית $T_\alpha \subset T$, A איננה גרירה טאוטולוגית של T_α. נראה כי A אינה גרירה טאוטולוגית של T, בסתירה להנחה.

יהיו $C_1, ..., C_k$ כל הנוסחאות האלמנטריות המופיעות בתוך A.

תהי $T_\alpha \subset T$ סופית. נסמן $T_\alpha := \{B_1, ..., B_t\}$. נניח שנוסחאות T_α מכילות את הנוסחאות האלמנטריות $D_1, ..., D_s$.

בלי הגבלת הכלליות נניח כי $C_1, ..., C_k, D_1, ..., D_s$ היא רשימת נוסחאות אלמנטריות שונות (אחרת נעדכן את $D_1, ..., D_s$).

נבנה טבלה המתאימה לתת הקבוצה T_α, המכילה את כל ההערכות האפשריות על קבוצת הנוסחאות האלמנטריות הנ"ל,

	C_1	$\dots$	C_k	D_1	$\dots$	D_s	A	B_1	$\dots$	B_t
1	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\dots$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\dots$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\dots$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
l_α	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\dots$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\dots$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\dots$	$\mathbb{T}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
2^{k+s}	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\dots$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\dots$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$	$\dots$	$\mathbb{T}/\mathbb{F}$

נשים לב כי $k + s$ העמודות הראשונות קובעות את t העמודות האחרונות.

מההנחה כי A איננה גרירה טאוטולוגית של T_α, נובע שקיימת השורה l_α, שבה t העמודות האחרונות מקבלות ערך $\mathbb{T}$, ואילו בעמודה המתאימה ל-A הערך הוא $\mathbb{F}$.

שורה זו מייצגת הערכה שנסמן ν_α שמעידה על כך כי A אינה גרירה טאוטולוגית של T_α. כלומר, $\nu_\alpha\left(B_j\right) = \mathbb{T}$ לכל $1 \le j \le t$, אבל $\nu_\alpha\left(A\right) = \mathbb{F}$.

לצורך הפשטות נניח כי T קבוצה בת מניה. נשים לב שכל קבוצה בת מניה ניתן לכתוב כאיחוד של קבוצות סופיות, שכל אחת מוכלת בזו הבאה אחריה.[14] כלומר, נוכל לכתוב

$$T = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n \cup ...$$

כאשר לכל j טבעי T_j קבוצה סופית, וכן

$$T_j \subset T_{j+1}$$

נניח שלכל j טבעי, מספר הנוסחאות האלמנטריות המופיעות בנוסחאות T_j הוא s_j.

לכל T_j סופית קיימת טבלה בדומה לזו שבנינו לעיל, בגודל 2^{k+s_j}, עם שורה מתאימה להערכה ν_j כזאת שמקבלת ערך $\mathbb{T}$ על כל נוסחאות T_j, אבל $\nu_j(A) = \mathbb{F}$.

כעת, בהינתן T_{j+1} סופית, קיימת טבלה בדומה לזו שבנינו לעיל, בגודל $2^{k+s_{j+1}}$, עם שורה מתאימה להערכה ν_{j+1} כזאת שמקבלת ערך $\mathbb{T}$ על כל נוסחאות T_{j+1}, אבל $\nu_{j+1}(A) = \mathbb{F}$.

אבל נזכור כי $T_j \subset T_{j+1}$, ולכן ההערכה ν_{j+1} מקבלת ערך $\mathbb{T}$ בפרט גם על כל נוסחאות T_j. כלומר, קיימת שורה בטבלה של T_{j+1} המתאימה להערכה ν_{j+1}, שהיא המשך של אותה השורה בטבלה המתאימה להערכה ν_j.

כלומר, קיבלנו סדרה של הערכות $\nu_1, \nu_2, \nu_3, ...$, כך שלכל $j > 1$ טבעי, ההערכה ν_j מזדהה עם כל ההערכות שלפניה $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{j-1}$.

ממשפט טיכונוף (התלוי באקסיומת הבחירה),[15] נובע כי קיימת הערכה ν_T כזאת המזדהה עם כל ההערכות $\nu_1, \nu_2, \nu_3, ...$. כלומר, ההערכה ν_T מקבלת ערך $\mathbb{T}$ על כל הנוסחאות של $T_1, T_2, T_3, ...$, אבל $\nu_T(A) = \mathbb{F}$.

נשים לב כי $T = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n \cup ...$, ולכן מצאנו כי $\nu_T(B) = \mathbb{T}$ לכל $B \in T$, ולמרות זאת $\nu_T(A) = \mathbb{F}$, בסתירה להנחה כי A גרירה טאוטולוגית של T. ■

מסקנה (משפט פוסט הכללי): תהי A נוסחה ותהי T תאוריה. אם A גרירה טאוטולוגית של T, אז $T \vdash^* A$.

הוכחה: מהיות A גרירה טאוטולוגית של T, מהמשפט שהראינו כעת נובע כי קיימת $T_0 \subset T$ תת קבוצה סופית, כך ש-A גרירה טאוטולוגית של T_0.

ממשפט פוסט לתאוריה סופית נובע $T_0 \vdash^* A$. אבל $T_0 \subset T$, ולכן $T \vdash^* A$. ■

12 אפילוג: טאוטולוגיה ויסיקות מצומצמת

ניזכר בשני משפטים שהוכחנו,

משפט הנאותות המצומצם: תהי A נוסחה ותהי T תאוריה. אם $T \vdash^* A$, אז A גרירה טאוטולוגית של T.

[14] כי אם C קבוצה בת מניה כלשהי, אז היא מהצורה $C = \{c_1, c_2, c_3, ...\}$. נגדיר $C_1 := \{c_1\}$, $C_2 := \{c_1, c_2\}$, $C_3 := \{c_1, c_2, c_3\}$, וכן הלאה. ברור כי $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n \cup ...$, וכן $C_j \subset C_{j+1}$.

[15] **משפט טיכונוף** (גרסה מצומצמת): תהי $\mathcal{S}$ קבוצה. נגדיר $\{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}^{\mathcal{S}} := \{f : f : \mathcal{S} \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}\}$.
לכל $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ תת קבוצה סופית, נגדיר $\{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}^{\mathcal{R}} := \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}^{|\mathcal{R}|}$.
תהי $\mathscr{A}$ קבוצת אינדקסים, ותהי $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ משפחה של תתי קבוצות סופיות של $\mathcal{S}$.
אם לכל $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathscr{A}$ שונים מתקיים $\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_{\tilde{\alpha}} \neq \emptyset$, אז גם $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} \mathcal{R}_\alpha \neq \emptyset$.

משפט הטאוטולוגיה של פוסט: תהי A נוסחה ותהי T תאוריה. אם A גרירה טאוטולוגית של T, אז $T \vdash^* A$.

מסקנה: A גרירה טאוטולוגית של T, אם ורק אם $T \vdash^* A$.

כלומר, מצאנו כי ההיסק המצומצם מאפיין באופן מלא מהי גרירה טאוטולוגית. דהיינו, גרירה טאוטולוגית היא בדיוק נוסחה כזאת שניתן להסיק אותה במצומצם.

חלק V
היסק על ידי כמתים

מבוא: לעיל ראינו כללי היסק נגזרים הנוגעים להיסק המצומצם, שבמסגרת ההיסק המצומצם לא השתמשנו בכמתים (הסרנו בין השאר את כלל הכנסת כמת). נרצה להרחיב את כללי ההיסק שבידינו לכמתים $\forall, \exists$.

לשם כך נשתמש במשפט פוסט, לפיו כל גרירה טאוטולוגית היא יסיקה. לכן, אם נוכיח כי כללים מסוימים מהווים גרירות טאוטולוגיות, ינבע מכך כי הם כללי היסק כשרים.

תזכורת: (**כלל הכנסת כמת**) מתוך $A \to B \vdash (\exists x)\, A \to B$, בתנאי שבנוסחה B אין מופעים חופשיים של x.

תזכורת: (**כמת כולל**) הגדרנו,

$$(\forall x)\, A = \neg (\exists x)\, (\neg A)$$

הערה: יכולנו גם להכניס לשפה קודם כמת כולל, ולקבל ממנו כמת קיום באמצעות ההגדרה $(\exists x)\, A = \neg (\forall x)\, (\neg A)$.

13 כלל הכנסת כמת של הכולל

טענה: $\{A \to B\} \vdash A \to (\forall x)\, B$ בתנאי שבנוסחה A אין מופעים חופשיים של x.

למה: הנוסחה $\neg D \to \neg C$ היא גרירה טאוטולוגית של $C \to D$.

הוכחת הלמה: נתבונן בטבלת כל ההערכות האפשריות,

C	D	$C \to D$	$\neg D \to \neg C$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

אלו כל ההערכות האפשריות, ולכן ברור שכל הערכה המקיימת $\nu (C \to D) = \mathbb{T}$, מקיימת גם $\nu (\neg D \to \neg C) = \mathbb{T}$. כלומר, $\neg D \to \neg C$ היא גרירה טאוטולוגית של $C \to D$, כנדרש. ■

הוכחת הטענה: נתון $A \to B$. מהלמה נובע כי $\neg B \to \neg A$ גרירה טאוטולוגית, ולכן ממשפט פוסט נובע $\vdash \neg B \to \neg A$.

נתון כי בנוסחה A אין מופעים חופשיים של x, ולכן כך גם בנוסחה $\neg A$, ולכן מכלל הכנסת כמת $\vdash (\exists x)\, (\neg B) \to \neg A$.

נשתמש בלמה שוב כדי לקבוע כי $A \to \neg (\exists x)\, (\neg B)$ גרירה טאוטולוגית. אבל נשים לב כי מהגדרה $\neg (\exists x)\, (\neg B) = (\forall x)\, B$, כלומר $A \to (\forall x)\, B$ גרירה טאוטולוגית ולכן ממשפט פוסט היא יסיקה. ■

14 כלל ההכללה

טענה: $A \vdash (\forall x)\, A$

הוכחה: על ידי כלל ההרחבה $A \vdash (\forall x)\, A \vee A$, כלומר $A \vdash \neg (\forall x)\, A \to A$. נשים לב שבנוסחה $(\forall x)\, A$ אין מופעים חופשיים של x (אם היו, כעת הם נקשרו בכמת), ולכן מהטענה הקודמת נובע $A \vdash \neg (\forall x)\, A \to (\forall x)\, A$, כלומר $A \vdash (\forall x)\, A \vee (\forall x)\,(A)$. מכלל הצמצום $A \vdash (\forall x)\, A$. ■

טענה: B היא גרירה טאוטולוגית של A, אם ורק אם $A \to B$ טאוטולוגיה.

הוכחה: (כיוון ראשון) נניח כי B גרירה טאוטולוגית של A. תהי ν הערכה. אם $\nu(A) = \mathbb{F}$, אז

$$\begin{aligned}\nu(A \to B) &= \nu(A) \to \nu(B)\\ &= \mathbb{F} \to \nu(B)\\ &= \neg\mathbb{F} \vee \nu(B)\\ &= \mathbb{T} \vee \nu(B)\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

ואם $\nu(A) = \mathbb{T}$, אז מהיות B גרירה טאוטולוגית של A נובע כי $\nu(B) = \mathbb{T}$, ולכן

$$\begin{aligned}\nu(A \to B) &= \nu(A) \to \nu(B)\\ &= \neg\mathbb{T} \vee \mathbb{T}\\ &= \mathbb{F} \vee \mathbb{T}\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

כנדרש.

(כיוון שני) נניח כי $A \to B$ טאוטולוגיה. כלומר לכל הערכה ν,

$$\nu(A \to B) = \mathbb{T}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &= \nu(A \to B)\\ &= \nu(A) \to \nu(B)\\ &= \neg\nu(A) \vee \nu(B)\end{aligned}$$

לכן אם $\nu(A) = \mathbb{T}$, אז כדי ששוויון זה יישמר בהכרח $\nu(B) = \mathbb{T}$, כלומר B גרירה טאוטולוגית של A. ■

מסקנה: תהי T תאוריה. אם B גרירה טאוטולוגית של A, וגם $T \vdash A$, אז $T \vdash B$.

הוכחה: מהיות B גרירה טאוטולוגית של A, נובע לפי הטענה הקודמת כי $A \to B$ טאוטולוגיה.

נתון $T \vdash A$, ולפי הנתון ממשפט פוסט $T \vdash A \to B$, ולכן על ידי כלל הניתוק $T \vdash B$. ■

15 הצבה של משתנים מרובים

תזכורת: **הצבה** של שם עצם v במקום משתנה x בנוסחה A, היא הנוסחה $A_x[v]$, בה מחליפים כל הופעה חופשית של משתנה x בשם העצם v.

הגדרה: **הצבה מרובה** של שמות עצם $a_1, a_2, ..., a_n$ במקום משתנים $x_1, x_2, ..., x_n$ בנוסחה A, היא הנוסחה $A_{x_1,x_2,...,x_n}[a_1, a_2, ..., a_n]$, בה מחליפים סימולטנית (ראו הערה) כל הופעה חופשית של משתנה x_i בשם העצם a_i עבור $i = 1, 2, ..., n$.

הערה: המשמעות של החלפה סימולטנית היא שלא מדובר בהצבה של משתנה אחר משתנה, אלא של כל המשתנים יחד. נראה את ההבדל באמצעות דוגמה.

נתבונן בנוסחה מהצורה $A = P(x_1, x_2)$. יהיו a_1, a_2 שמות עצם, ונניח כי $a_1 = f(x_2)$.

הצבה סימולטנית, כמו בהצבה מרובה של שני שמות עצם, היא מהצורה

$$A_{x_1,x_2}[a_1, a_2] = P(a_1, a_2) = P(f(x_2), a_2)$$

לעומת זאת אם היינו מחליפים באופן לא סימולנטי, כלומר מציבים את a_1 ואחר כך את a_2, אז נשים לב שבשלב הראשון היינו מקבלים

$$A_{x_1}[a_1] = P(a_1, x_2) = P(f(x_2), x_2)$$

ואז בשלב השני נקבל

$$(A_{x_1}[a_1])_{x_2}[a_2] = P(f(a_2), a_2)$$

וניכר כי התוצאה שונה.

15.1 כלל ההצבה

טענה: $A \vdash A_{x_1,x_2,...,x_n}[a_1, a_2, ..., a_n]$, כאשר זו הצבה מרובה חוקית.

הוכחה: נוכיח תחילה עבור $n = 1$.

אקסיומת ההצבה היא $A_x[u] \to (\exists x) A$ כאשר ההצבה חוקית. לכן עבור $\neg A$ נקבל $\neg A_x[a] \to (\exists x)(\neg A)$. מתוך זאת נקבל כגרירה טאוטולוגית את $\neg(\exists x)(\neg A) \to A_x[a]$, כלומר $(\forall x) A \to A_x[a]$. כמו כן, מכלל ההכללה שהראינו לעיל $A \vdash (\forall x) A$. כעת על ידי כלל הניתוק, מתוך $\{(\forall x) A \to A_x[a], (\forall x) A\} \vdash A_x[a]$, כנדרש עבור $n = 1$.

נכליל עבור n כלשהו. נשים לב שלא נוכל פשוט לחזור שוב ושוב את התהליך שביצענו במקרה של $n = 1$, שכן מזה נוכל להסיק רק להצבות בזו אחר זו, ואילו הצבה מרובה נעשית באופן סימולטני. לכן נעקוף בעיה זאת על ידי הגדרת משתנים חדשים. נשים לב שההבדל בין הצבה סימולטנית להצבה בזה אחר זה, היא כאשר משתנה מאוחר מופיע בשם עצם מוקדם. לכן נבחר משתנים חדשים שאינם מופיעים בשמות העצם הנתונים לנו.

נבחר משתנים חדשים $y_1, y_2, ..., y_n$, שאינם מופיעים בנוסחה A ובשמות העצם $a_1, a_2, ..., a_n$.

כעת נתבונן בהצבות $A_{x_1}[y_1], A_{x_2}[y_2], ..., A_{x_n}[y_n]$ (משתנה הוא בפרט שם עצם, ולכן ניתן להציב). היות שהמשתנים $x_1, ..., x_n$ אינם מופיעים כלל במשתנים $y_1, ..., y_n$, אין הבדל בין הצבה סימולטנית להצבה בזה אחר זה, כלומר

$$A_{x_1,x_2,...,x_n}[y_1, y_2, ..., y_n] = \left(\left(\left(A_{x_1}[y_1]\right)_{x_2}[y_2]\right) ...\right)_{x_n}[y_n]$$

כעת, באינדוקציה על ידי הפעלה בזה אחר זה של המקרה הפרטי של $n = 1$, מתוך A נוכל להסיק את

$$A_{x_1,x_2,...,x_n}[y_1, y_2, ..., y_n]$$

כעת, נציב את שמות העצם המקוריים בזה אחר זה. תחילה,

$$\left(A_{x_1,x_2,...,x_n}[y_1, y_2, ..., y_n]\right)_{y_1}[a_1]$$

ולאחר n הצבות נקבל,

$$\left(\left(\left(\left(A_{x_1,x_2,...,x_n}[y_1, y_2, ..., y_n]\right)_{y_1}[a_1]\right)_{y_2}[a_2]\right) ...\right)_{y_n}[a_n]$$

וכעת נוכל לקבל את הנוסחה המבוקשת, שכן היות שהמשתנים $y_1, ..., y_n$ אינם מופיעים כלל בשמות העצם $a_1, ..., a_n$,

$$\begin{aligned} & \left(\left(\left(\left(A_{x_1,x_2,...,x_n}[y_1, y_2, ..., y_n]\right)_{y_1}[a_1]\right)_{y_2}[a_2]\right) ...\right)_{y_n}[a_n] \\ = \quad & \left(A_{x_1,x_2,...,x_n}[y_1, y_2, ..., y_n]\right)_{y_1,y_2,...,y_n}[a_1, a_2, ..., a_n] \\ = \quad & A_{x_1,x_2,...,x_n}[a_1, a_2, ..., a_n] \end{aligned}$$

כנדרש. ■

15.2 משפט ההצבה

משפט ההצבה: משפט זה בעל שני חלקים, והוא מכליל את כלל ההצבה:

1.

$$\vdash A_{x_1,x_2,...,x_n}[a_1, a_2, ..., a_n] \to (\exists x_1)(\exists x_2) ... (\exists x_n) A$$

2.

$$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2) ... (\forall x_n) A \to A_{x_1,x_2,...,x_n}[a_1, a_2, ..., a_n]$$

תחילה נזכיר טענת עזר.

למה: פעולת החץ היא טרנזיטיבית. כלומר, $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$.

מסקנה: על ידי טרנזיטיביות n פעמים, $\{B_0 \to B_1, ..., B_{n-1} \to B_n\} \vdash B_0 \to B_n$.

הוכחה: די להראות כי $A \to C$ גרירה טאוטולוגית של $B \to C$ יחד עם $A \to B$, שכן לפי משפט פוסט ינבע כי במצב זה ניתן להסיק את האחרונה משתי הראשונות (אפילו בהיסק מצומצם, ודאי שבהיסק רגיל).

תהי ν הערכה ונניח כי $\nu(B \to C) = \mathbb{T}$ וגם $\nu(A \to B) = \mathbb{T}$. צריך להראות כי $\nu(A \to C) = \mathbb{T}$.

מהנתון נובע כי

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \nu(B \to C) \\ &= \neg\nu(B) \vee \nu(C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \nu(A \to B) \\ &= \neg\nu(A) \vee \nu(B) \end{aligned}$$

כמו כן נשים לב כי

$$\nu(A \to C) = \neg\nu(A) \vee \nu(C)$$

אם $\neg\nu(A) = \mathbb{T}$ אז $\nu(A \to C) = \mathbb{T}$. לכן נניח $\neg\nu(A) = \mathbb{F}$.

לכן, מההנחה $\nu(A \to B) = \mathbb{T}$ נובע כי $\nu(B) = \mathbb{T}$, כלומר $\neg\nu(B) = \mathbb{F}$.

לכן, מההנחה $\nu(B \to C) = \mathbb{T}$ נובע כי $\nu(C) = \mathbb{T}$, ולכן $\nu(A \to C) = \mathbb{T}$. ■

הוכחה:

1. אקסיומת ההצבה קובעת $A_x[v] \to (\exists x) A$. אם נבחר $v = x$ (כל משתנה הוא שם עצם), נובע $\vdash A \to (\exists x) A$.
   על ידי הפעלה n פעמים נקבל את n הנוסחאות,

$$\begin{aligned} &\vdash A \to (\exists x_n) A \\ &\vdash (\exists x_n) A \to (\exists x_{n-1})(\exists x_n) A \\ &\vdots \\ &\vdash (\exists x_2) ... (\exists x_n) A \to (\exists x_1) ... (\exists x_n) A \end{aligned}$$

   נפעיל את הלמה על אוסף הנוסחאות הנ"ל ונקבל כי

$$\vdash A \to (\exists x_1)(\exists x_2) ... (\exists x_n) A$$

   מכלל ההצבה של משתנים מרובים,

$$\begin{aligned} \vdash &\quad (A \to (\exists x_1) ... (\exists x_n) A)_{x_1,...,x_n}[a_1, ..., a_n] \\ = &\quad A_{x_1,...,x_n}[a_1, ..., a_n] \to (\exists x_1) ... (\exists x_n) A \end{aligned}$$

   כנדרש.

2. נשתמש באופן דומה באקסיומת ההצבה עבור $\neg A$, ונסיק את $\neg A \to (\exists x)(\neg A)$.
נוסחה זו גוררת טאוטולוגית את $\neg(\exists x)(\neg A) \to A$, כלומר $\vdash (\forall x) A \to A$.
על ידי הפעלה n פעמים נקבל את n הנוסחאות,

$$\begin{aligned}
&\vdash \quad (\forall x_n) A \to A \\
&\vdash \quad (\forall x_{n-1})(\forall x_n) A \to (\forall x_n) A \\
&\quad \vdots \\
&\vdash \quad (\forall x_1) \dots (\forall x_n) A \to (\forall x_2) \dots (\forall x_n) A
\end{aligned}$$

נפעיל את הלמה על אוסף הנוסחאות הנ"ל ונקבל כי

$$\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) A \to A$$

מכלל ההצבה של משתנים מרובים,

$$\begin{aligned}
\vdash \quad & ((\forall x_1) \dots (\forall x_n) A \to A)_{x_1,\dots,x_n}[a_1,\dots,a_n] \\
= \quad & (\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n) A \to A_{x_1,x_2,\dots,x_n}[a_1,a_2,\dots,a_n]
\end{aligned}$$

כנדרש. ■

טענה: $\vdash A$ אם ורק אם $\vdash (\forall x) A$.

הוכחה: (כיוון ראשון)

מכלל ההכללה $A \vdash (\forall x) A$, ולכן אם $\vdash A$ אז $\vdash (\forall x) A$.

(כיוון שני)

ממשפט ההצבה $\vdash (\forall x) A \to A$. כעת, אם $\vdash (\forall x) A$ אז על ידי כלל הניתוק, $\{(\forall x) A, (\forall x) A \to A\} \vdash A$. ■

16 כלל הפילוג

טענה:

1. $A \to B \vdash (\exists x) A \to (\exists x) B$
2. $A \to B \vdash (\forall x) A \to (\forall x) B$

הוכחה:

1. נשים לב כי מאקסיומת ההצבה, $\vdash B = B_x[x] \to (\exists x) B$.
מתוך $B \to (\exists x) B$ יחד עם $A \to B$, על ידי טרנזיטיביות של החץ $\vdash A \to (\exists x) B$.
מכלל הכנסת כמת, היות שבנוסחה $(\exists x) B$ אין הופעות חופשיות של x, $\vdash (\exists x) A \to (\exists x) B$.

2. נשים לב כי ממשפט ההצבה, $\vdash (\forall x)\, A \to A$.
מתוך $(\forall x)\, A \to A$ יחד עם $A \to B$, על ידי טרנזיטיביות של החץ $\vdash (\forall x)\, A \to B$.
מכלל הכנסת כמת (עבור $\forall$), היות שבנוסחה $(\forall x)\, A$ אין הופעות חופשיות של x, $\vdash (\forall x)\, A \to (\forall x)\, B$. ■

17 משפט הדדוקציה

טענה: תהי A נוסחה ותהי T תאוריה. אם $T \vdash A \to B$, אזי $T \cup \{A\} \vdash B$.

הוכחה: מההנחה $T \vdash A \to B$ נובע בפרט גם כי $T \cup \{A\} \vdash A \to B$. כמו כן ברור כי $T \cup \{A\} \vdash A$.

כעת על ידי כלל הניתוק, $\{A, A \to B\} \vdash B$. ■

תזכורת: נוסחה A נקראת **סגורה**, אם אין בה הופעות חופשיות של משתנים. כלומר, כל המשתנים המופיעים בה קשורים בכמת.

משפט הדדוקציה: יהיו A נוסחה סגורה, T תאוריה. אם $T \cup \{A\} \vdash B$ אז $T \vdash A \to B$.

מסקנה: תהי A נוסחה סגורה ותהי T תאוריה. אזי $T\cup\{A\} \vdash B$ אם ורק אם $T \vdash A \to B$.

הוכחה: נניח כי $T\cup\{A\} \vdash B$, ונראה כי $T \vdash A \to B$. תהי $C_1, C_2, ..., C_n$ סדרת ההיסק של B מתוך $T \cup \{A\}$.

נניח באינדוקציה כי $T \vdash A \to C_1,\ A \to C_2,\ ,..., A \to C_{i-1}$ לאיזה $1 < i \leq n$. נראה כי $T \vdash A \to C_i$.

נבחן את כל האפשרויות:

1. C_i אקסיומה לוגית. מכלל ההרחבה $\vdash \neg A \vee C_i$, ובפרט $T \vdash \neg A \vee C_i$. כלומר $T \vdash A \to C_i$.
2. $C_i \in T \cup \{A\}$. אם $C_i \in T$ אז בפרט $T \vdash C_i$, ולכן מכלל ההרחבה באותו אופן $T \vdash A \to C_i$.
אם $C_i = A$, אז מאקסיומה פסוקית $A \to A$, ובפרט מתקיים $T \vdash A \to A$, כלומר $T \vdash A \to C_i$.
3. C_i מתקבלת מתוך הנוסחאות הקודמות בסדרת ההיסק על ידי אחד מכללי ההיסק:

(א) <u>כלל ההרחבה</u>: קיים $1 \leq h < i$ שעבורו $C_i = E \vee C_h$ לנוסחה E כלשהי. מהנחת האינדוקציה $T \vdash A \to C_h$. נשים לב כי $A \to E \vee C_h$ גרירה טאוטולוגית של $A \to C_h$,[16] לכן לפי משפט פוסט $T \vdash A \to E \vee C_h$, כלומר $T \vdash A \to C_i$.

(ב) <u>כלל הצמצום</u>: קיים $1 \leq h < i$ שעבורו $C_h = B \vee B$, כך שמתקיים $C_i = B$. מהנחת האינדוקציה $T \vdash A \to C_h$, כלומר $T \vdash A \to B \vee B$. נשים לב כי $A \to B$ גרירה טאוטולוגית של $A \to B \vee B$,[17] לכן לפי משפט פוסט $T \vdash A \to B$, כלומר $T \vdash A \to C_i$.

[16] קל לבדוק שלכל הערכה ν המקיימת $\nu\,(A \to C_h) = \mathbb{T}$, בהכרח גם $\nu\,(A \to E \vee C_h) = \mathbb{T}$.
[17] קל לבדוק שלכל הערכה ν המקיימת $\nu\,(A \to B \vee B) = \mathbb{T}$, בהכרח גם $\nu\,(A \to B) = \mathbb{T}$.

(ג) כלל האסוציאטיביות: קיים $1 \leq h < i$ שעבורו $C_h = D \vee (E \vee F)$, כך שמתקיים $C_i = (D \vee E) \vee F$ לנוסחאות D, E, F כלשהן. מהנחת האינדוקציה $T \vdash A \to C_h$, כלומר $T \vdash A \to D \vee (E \vee F)$. נשים לב כי $A \to ((D \vee E) \vee F)$ גרירה טאוטולוגית של $A \to (D \vee (E \vee F))$,[18] לכן לפי משפט פוסט $T \vdash A \to ((D \vee E) \vee F)$, כלומר $T \vdash A \to C_i$.

(ד) כלל החתך: קיימים $1 \leq h, k < i$ שעבורם $C_h = D \vee E$ וכן $C_k = \neg D \vee F$, כך שמתקיים $C_i = E \vee F$ לנוסחאות D, E, F כלשהן. מהנחת האינדוקציה $T \vdash A \to C_h = D \vee E$ וגם $T \vdash A \to C_k = \neg D \vee F$. נשים לב כי $A \to (E \vee F)$ גרירה טאוטולוגית של $A \to (D \vee E)$ יחד עם $A \to (\neg D \vee F)$,[19] לכן לפי משפט פוסט $T \vdash A \to (E \vee F)$, כלומר $T \vdash A \to C_i$.

(ה) כלל הכנסת כמת: קיים $1 \leq h < i$ שעבורו $C_h = D \to E$, כך שמתקיים $C_i = (\exists x)\, D \to E$, עבור נוסחה E כלשהי שאין בה הופעות חופשיות של המשתנה x.

מהנחת האינדוקציה $T \vdash A \to C_h$, כלומר $T \vdash A \to D \to E$. נשים לב כי $D \to A \to E$ גרירה טאוטולוגית של $A \to D \to E$,[20] לכן לפי משפט פוסט $T \vdash D \to A \to E$.

נשים לב שהנחנו כי x אינו מופיע חופשית בנוסחה E, וכן גם x אינו מופיע חופשית בנוסחה A (כי הנחנו במשפט ש-A נוסחה סגורה). לכן מכלל הכנסת הכמת $T \vdash (\exists x)\, D \to (A \to E)$.

נשים לב כי $A \to ((\exists x)\, D \to E)$ גרירה טאוטולוגית של $(\exists x)\, D \to (A \to E)$,[21] לכן לפי משפט פוסט $T \vdash A \to ((\exists x)\, D \to E)$, כלומר $T \vdash A \to C_i$.

בפרט קיבלנו כי טענה זו נכונה עבור $i = n$, כלומר $T \vdash A \to C_n$, אבל $C_n = B$, כנדרש. ■

18 הרחבה של שפה על ידי קבועים

מבוא: עד עתה עסקנו בשפה בעלת סיגנטורה בסיסית. במשפט הקבועים, אותו ננסח מיד, נרחיב את הסיגנטורה של השפה על ידי הוספה של סמלי קבועים חדשים (לאו דווקא מספר סופי של קבועים), ונסמן את השפה המורחבת על ידי L'.

נסמן היסק הכולל נוסחאות מהשפה L על ידי $\vdash_L$, ובהתאמה, היסק הכולל נוסחאות מהשפה L' נסמן $\vdash_{L'}$.

נשים לב כי $\vdash_L$ הוא ההיסק המוכר שסומן לעיל על ידי $\vdash$, אולם כאן ההבחנה בין היסק מתוך נוסחאות של L לבין היסק מתוך נוסחאות של L' נעשתה עיקר הדיון, ולכן נסמן את ההיסקים הללו במיוחד.

[18] קל לבדוק שלכל הערכה ν המקיימת $\nu(D \vee (E \vee F)) = \mathbb{T}$, בהכרח גם $\nu((D \vee E) \vee F) = \mathbb{T}$.

[19] קל לבדוק שלכל הערכה ν המקיימת $\nu(A \to (D \vee E)) = \mathbb{T}$ וגם $\nu(A \to (\neg D \vee F)) = \mathbb{T}$, בהכרח גם $\nu(A \to (E \vee F)) = \mathbb{T}$.

[20] קל לבדוק שלכל הערכה ν המקיימת $\nu(A \to (D \to E)) = \mathbb{T}$, בהכרח גם $\nu(D \to (A \to E)) = \mathbb{T}$.

[21] קל לבדוק שלכל הערכה ν המקיימת $\nu((\exists x)\, D \to (A \to E)) = \mathbb{T}$, בהכרח גם $\nu(A \to ((\exists x)\, D \to E)) = \mathbb{T}$.

18.1 שכתוב נוסחה

הגדרה: תהי L שפה, ותהי $L^{'}$ שפה המרחיבה את L על ידי סמלי קבועים חדשים.

תהי U נוסחה או שם עצם, ונניח כי סמלי הקבועים החדשים שמופיעים ב־U הם $e_1, ..., e_k$,[22] ויהיו $y_1, ..., y_k$ משתנים חדשים.

נגדיר **שכתוב** של U על ידי $y_1, ..., y_k$, בכך שעבור $i = 1, ..., k$, נחליף את הקבוע e_i במשתנה y_i.

טענה: תוצאה של שכתוב שם עצם בשפה $L^{'}$ על ידי משתנים חדשים $y_1, ..., y_k$, היא שם עצם בשפה L.

הוכחה: נוכיח זאת באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של שם העצם. יהי u שם עצם. נבחן את כל האפשרויות לסדרת היצירה של שמות עצם:

1. u משתנה, כלומר $u = z$ עבור z משתנה בשפה L. במקרה זה תוצאת השכתוב היא $u' = z$ (ללא שינוי), ולכן u' שם עצם בשפה L.
2. u סמל פונקציה 0־מקומית, כלומר $u = h$ עבור h סמל קבוע בשפה L. אם h סמל קבוע בשפה L, תוצאת השכתוב היא $u' = h$ (ללא שינוי), ואם $h = e_j$ לאיזה $1 \leq j \leq k$, תוצאת השכתוב היא $u' = y_j$. לכן בכל מקרה u' שם עצם בשפה L.
3. $u = f\left(u_1, ..., u_n\right)$ עבור f סמל פונקציה n־מקומית בשפה L' ועבור $u_1, ..., u_n$ שמות עצם בשפה L'. במקרה זה תוצאת השכתוב היא $u' = f\left(u_1', ..., u_n'\right)$. נניח באינדוקציה כי הטענה נכונה עבור שמות עצם בעלי סדרת יצירה באורך קטן מ־n, כלומר $u_1', ..., u_n'$ כולם תוצאות שכתוב של שמות עצם בעלי סדרות יצירה באורכים קטנים מ־n, ולכן הם שמות עצם בשפה L, ולכן $u' = f\left(u_1', ..., u_n'\right)$ שם עצם בשפה L. ■

טענה: תוצאה של שכתוב נוסחה בשפה L' על ידי משתנים חדשים $y_1, ..., y_k$, היא נוסחה בשפה L.

הוכחה: נוכיח זאת באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של הנוסחה. תהי B נוסחה. נבחן את כל האפשרויות לסדרת היצירה של נוסחאות:

1. B נוסחה אטומית: $B = P\left(u_1, ..., u_n\right)$ עבור P סמל יחס n־מקומי בשפה L ועבור $u_1, ..., u_n$ שמות עצם בשפה L'. במקרה זה תוצאת השכתוב היא $B' = P\left(u_1', ..., u_n'\right)$, כאשר u_i' שכתוב של u_i. לפי הטענה הקודמת u_i' שם עצם, ולכן $B' = P\left(u_1', ..., u_n'\right)$ נוסחה (אטומית) בשפה L.
2. $B = C \vee D$: במקרה זה תוצאת השכתוב היא $B' = C' \vee D'$, כאשר C' שכתוב של C, D' שכתוב של D. מהנחת האינדוקציה C', D' נוסחאות בשפה L, ולכן $B' = C' \vee D'$ נוסחה בשפה L.
3. $B = \neg C$: במקרה זה תוצאת השכתוב היא $B' = \neg C'$, כאשר C' שכתוב של C. מהנחת האינדוקציה C' נוסחה בשפה L, ולכן $B^{'} = \neg C'$ נוסחה בשפה L.

[22] נשים לב שאמנם יכול להיות שבשפה $L^{'}$ ישנם אינסוף קבועים חדשים, אולם סדרת יצירה היא בעלת אורך סופי, ולכן יש לכל היותר מספר סופי של קבועים חדשים בסדרת היצירה של A.

4. $B=(\exists x)\,C$: במקרה זה תוצאת השכתוב היא $B'=(\exists x)\,C'$, כאשר C' שכתוב של C. מהנחת האינדוקציה C' נוסחה בשפה L, ולכן $B'=(\exists x)\,C'$ נוסחה בשפה L. ■

טענה: תוצאה של שכתוב אקסיומה לוגית בשפה $L^{'}$ על ידי משתנים חדשים $y_1,...,y_k$, היא אותה אקסיומה לוגית בשפה L.

הוכחה: נבחן את כל האקסיומות:

1. **אקסיומה פסוקית:** $A=\neg B\vee B$. לאחר שכתוב נקבל $A'=\neg B'\vee B'$ כאשר B' שכתוב של B. לכן קיבלנו את האקסיומה הפסוקית בשפה L.
2. **אקסיומת הזהות:** $A=x\approx x$. לאחר שכתוב נקבל $A'=A$, היות שאין קבועים כלל באקסיומת הזהות. לכן קיבלנו את אקסיומת הזהות בשפה L.
3. **אקסיומת השוויון:**

$$A=x_1\approx y_1\to...\to x_n\approx y_n\to f\left(x_1,...,x_n\right)\approx f\left(y_1,...,y_n\right)$$

לאחר שכתוב נקבל $A'=A$, היות שאין קבועים כלל באקסיומת השוויון. לכן קיבלנו את אקסיומת השוויון בשפה L.
באופן זהה עבור

$$A=x_1\approx y_1\to...\to x_n\approx y_n\to P\left(x_1,...,x_n\right)\to P\left(y_1,...,y_n\right)$$

4. **אקסיומת ההצבה:** נניח $A=B_x\left[u\right]\to(\exists x)\,B$. לאחר שכתוב נקבל $A'=B'_x\left[u'\right]\to(\exists x)\,B'$, כאשר B' שכתוב של B וכן u' שכתוב של u, ולכן קיבלנו את אקסיומת ההצבה בשפה L, בתנאי שההצבה $B'_x\left[u'\right]$ היא חוקית.
ואכן, נשים לב שבחרנו את המשתנים $y_1,...,y_k$ להיות משתנים חדשים, ממילא לא מופיעים בנוסחה B, ולכן לא ייתכן מצב שאחד מהם הופיע חופשית ולאחר ההצבה הוא נקשר בכמת, ולכן $B'_x\left[u'\right]$ הצבה חוקית. ■

טענה: שכתוב של כלל היסק בשפה L', הוא אותו כלל היסק בשפה L.

הוכחה: נבחן את כל כללי ההיסק:

1. **כלל ההרחבה:** נניח כי מסיקים את $A=B\vee C$ מתוך C. לאחר שכתוב נקבל $A'=B'\vee C'$, כאשר B',C' השכתובים של B,C בהתאמה. כלומר, הסקנו את $A'=B'\vee C'$ מתוך $C^{'}$, וקיבלנו את כלל ההרחבה בשפה L.
2. **כלל הצמצום:** נניח כי מסיקים את $A=B$ מתוך $B\vee B$. לאחר שכתוב נקבל $A'=B'$, כאשר B' שכתוב של B. כלומר הסקנו את $A'=B'$ מתוך $B'\vee B'$, וקיבלנו את כלל הצמצום בשפה L.
3. **כלל האסוציאטיביות:** נניח כי מסיקים את $A=(C\vee D)\vee E$ מתוך $B=C\vee(D\vee E)$. לאחר שכתוב נקבל $A'=(C'\vee D')\vee E'$ כאשר C',D',E' השכתובים של C,D,E בהתאמה. כלומר, הסקנו את $A'=(C'\vee D')\vee E'$ מתוך $B'=C'\vee(D'\vee E')$, וקיבלנו את כלל האסוציאטיביות בשפה L.

4. **כלל החתך:** נניח כי מסיקים את $A = E \vee F$ מתוך $B = D \vee E$ יחד עם $C = \neg D \vee F$. לאחר שכתוב נקבל $A' = E' \vee F'$, כאשר E', F' השכתובים של E, F בהתאמה. כלומר, הסקנו את $A' = E' \vee F'$ מתוך $B' = D' \vee E'$ יחד עם $C' = \neg D' \vee F'$, כאשר D' השכתוב של D, וקיבלנו את כלל החתך בשפה L.

5. **כלל הכנסת כמת:** נניח כי מסיקים את $A = ((\exists x) C) \to D$ מתוך $B = C \to D$, כאשר בנוסחה D אין הופעות חופשיות של המשתנה x. לאחר שכתוב נקבל $A' = ((\exists x) C') \to D'$, כאשר C', D' השכתובים של C, D בהתאמה. כלומר, הסקנו את $A' = ((\exists x) C') \to D'$ מתוך $B' = C' \to D'$ בתנאי שבנוסחה C' אין הופעה חופשית של x.

ואכן, בחרנו את המשתנים $y_1, ..., y_k$ להיות משתנים חדשים וממילא לא ייתכן שאחד מהם הוא x. לכן הכנסת הכמת $(\exists x) C'$ מתאפשרת. ■

טענה: תהי T תאוריה של נוסחאות מהשפה L. אם $A_1, ..., A_n$ סדרת היסק בשפה L' מתוך T (כלומר $T \vdash_{L'} A_i$ עבור $i = 1, ..., n$), אז $A'_1, ..., A'_n$ סדרת היסק בשפה L מתוך T (כלומר $T \vdash_L A_i$ עבור $i = 1, ..., n$).

הוכחה: תחילה, $A'_1, ..., A'_n$ הן נוסחאות, כתוצאות של שכתוב נוסחאות. תהי A_i כלשהי עבור $1 \leq i \leq n$. אם $A_i \in T$, אזי $A'_i = A_i$ (כי T מכילה נוסחאות מהשפה L בלבד). כמו כן, אם A_i היא אקסיומה לוגית בשפה L' או כלל היסק בשפה L', הראינו לעיל כי תוצאת השכתוב היא אותה אקסיומה לוגית בשפה L או כלל היסק בשפה L, בהתאמה. ■

18.2 משפט הקבועים

משפט הקבועים: תהי L שפה, ותהי L' שפה המרחיבה את L על ידי סמלי קבועים חדשים. תהי A נוסחה בשפה L ותהי T תאוריה המכילה נוסחאות בשפה L בלבד.

יהיו $e_1, ..., e_n$ קבועים חדשים כלשהם מתוך הקבועים החדשים של L', שונים זה מזה, אזי $T \vdash_L A$ אם ורק אם $T \vdash_{L'} A_{x_1,...,x_n}[e_1, ..., e_n]$.

הוכחה: (כיוון ראשון)

נניח כי $T \vdash_L A$, אז ברור כי $T \vdash_{L'} A$ על ידי אותה סדרת היסק (נשים לב שכל נוסחה בשפה L היא גם נוסחה בשפה L'), המהווה גם סדרת היסק בתוך L'. כעת על ידי כלל ההצבה, $T \vdash_{L'} A_{x_1,...,x_n}[e_1, ..., e_n]$.

(כיוון שני)

נניח כי $T \vdash_{L'} A_{x_1,...,x_n}[e_1, ..., e_n]$. תהי $C_1, ..., C_m$ סדרת ההיסק של נוסחה זו מתוך T, כלומר $T \vdash_{L'} C_1, ..., C_m$ וכן $C_m = A_{x_1,...,x_n}[e_1, ..., e_n]$.

נשים לב כי ייתכן שהקבועים בהם נעשה שימוש בסדרת ההיסק יכולים לכלול יותר קבועים מאשר $e_1, ..., e_n$, אך עדיין בכל מקרה יש רק מספר סופי מהם. אם כך נסמן את כל הקבועים בהם נעשה שימוש בסדרת ההיסק עלי די $e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_r$, סך הכל r קבועים.

נצטייד במשתנים חדשים $y_1, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_r$, כאלה שלא הופיעו כלל בסדרת ההיסק $C_1, ..., C_m$. תהי C_i עבור $i = 1, ..., n$ כלשהו. נבצע שכתוב של $C_1, ..., C_i$ על ידי $y_1, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_r$ באופן שהגדרנו לעיל. כלומר, בכל פעם שמופיע קבוע e_k בנוסחה כלשהי, מחליפים אותו במשתנה y_k, עבור כל $1 \leq k \leq r$.

נתבונן בנוסחאות המשוכתבות $C'_1, ..., C'_m$, ונשים לב כי

$$C'_m = (A_{x_1,...,x_n}[e_1, ..., e_n])' = A_{x_1,...,x_n}[y_1, ..., y_n]$$

מהמסקנה לעיל נובע כי $C'_1, ..., C'_m$ מהווה סדרת היסק של $A_{x_1,...,x_n}[y_1, ..., y_n]$ בשפה L מתוך T, כלומר $T \vdash_L A_{x_1,...,x_n}[y_1, ..., y_n]$.

נשתמש בכלל ההצבה עבור המשתנים $x_1, ..., x_n$ עצמם, ונקבל

$$\begin{aligned} T \quad \vdash_L \quad & (A_{x_1,...,x_n}[y_1, ..., y_n])_{y_1,...,y_n}[x_1, ..., x_n] \\ = \quad & A_{x_1,...,x_n}[x_1, ..., x_n] \\ = \quad & A \end{aligned}$$

כאשר ההצבה חוקית מכך שהמשתנים $y_1, ..., y_n$ חדשים. ■

19 משפט השקילות

משפט השקילות: יהיו A, A' נוסחאות, ויהיו $B_1, B'_1 B_2, B'_2, ..., B_m, B'_m$ נוסחאות נוספות. נניח כי A' מתקבלת מתוך A על ידי מספר כלשהו של החלפות B_i ב־B'_i (לאו דווקא החלפנו כל B_i ב־B'_i).

אם T תאוריה המקיימת $T \vdash B_i \leftrightarrow B'_i$ לכל $1 \leq i \leq m$, אזי $T \vdash A \leftrightarrow A'$.

דוגמה: אם $\neg\neg C$ מופיעה בתוך A, והחלפנו את $\neg\neg C$ ב־C, (השקולה לה לפי משפט פוסט), אז הנוסחה החדשה A' שקולה ל־A.

הוכחה: נבחין בין שני מקרים.

- מקרה ראשון: $A = B_i$ לאיזה $1 \leq i \leq m$. במקרה זה $A' = B'_i$. נתון כי $T \vdash B_i \leftrightarrow B'_i$, כלומר $T \vdash A \leftrightarrow A'$.
- מקרה שני: לא $A = B_i$ לאף $1 \leq i \leq m$. נשתמש באינדוקציה על סדרת היצירה של A.
  - נניח A נוסחה אטומית. כלומר $A = P(u_1, ..., u_n)$ עבור P סמל יחס n־מקומי ועבור $u_1, ..., u_n$ שמות עצם. נשים לב כי במצב זה אין ל־A אף תת־נוסחה ולכן בהכרח $A = B_i$ לאיזה $1 \leq i \leq m$, ולכן מקרה זה מכוסה במקרה הראשון.
  - נניח $A = C \vee D$. אזי על ידי אותן החלפות של B_i ב־B'_i, מתוך C נקבל C' ומתוך D נקבל D', ואז $A' = C' \vee D'$. מהנחת האינדוקציה $T \vdash C \leftrightarrow C'$ וגם $T \vdash D \leftrightarrow D'$. נשים לב כי $A \leftrightarrow A'$ גרירה טאוטולוגית של $C \leftrightarrow C'$ יחד עם $D \leftrightarrow D'$, ולכן ממשפט פוסט נובע כי $T \vdash A \leftrightarrow A'$.
  - נניח $A = \neg C$. אזי מתוך C נקבל C', ואז $A' = \neg C'$. מהנחת האינדוקציה $T \vdash C \leftrightarrow C'$. נשים לב כי $A \leftrightarrow A'$ גרירה טאוטולוגית של $C \leftrightarrow C'$, ולכן ממשפט פוסט נובע כי $T \vdash A \leftrightarrow A'$.
  - נניח $A = (\exists x) C$. אזי מתוך C נקבל C', ואז $A' = (\exists x) C'$. מהנחת האינדוקציה $T \vdash C \leftrightarrow C'$, כלומר $T \vdash C \to C'$ וגם $T \vdash C' \to C$. מהפעלת כלל הפילוג על שתי התוצאות מהנחת האינדוקציה, $T \vdash (\exists x) C \to (\exists x) C'$ וגם $T \vdash (\exists x) C' \to (\exists x) C$. נשים לב כי $A \leftrightarrow A'$ גרירה טאוטולוגית של $(\exists x) C \to (\exists x) C'$ יחד עם $(\exists x) C' \to (\exists x) C$, ולכן ממשפט פוסט נובע $T \vdash A \leftrightarrow A'$. ■

20 משפט הווריאנט

משפט הווריאנט: נניח כי משתנה y אינו מופיע חופשית בנוסחה B, אזי

$$\vdash (\exists x)\, B \leftrightarrow (\exists y)\, B_x\,[y]$$

הוכחה: נראה כל אחד מכיווני החץ.

- נראה כי $\vdash (\exists y)\, B_x\,[y] \rightarrow (\exists x)\, B$: y לא מופיע חופשית ב־B, ולכן $B_x\,[y]$ הצבה חוקית, ומאקסיומת ההצבה $\vdash B_x\,[y] \rightarrow (\exists x)\, B$. כמו כן בפרט y לא מופיע חופשית ב־$(\exists x)\, B$, ולכן מכלל הכנסת כמת $\vdash (\exists y)\, B_x\,[y] \rightarrow (\exists x)\, B$.
- נראה כי $\vdash (\exists x)\, B \rightarrow (\exists y)\, B_x\,[y]$: נשים לב כי $B = (B_x\,[y])_y\,[x]$ (זו הצבה חוקית כפי שהזכרנו לעיל), ומאקסיומת ההצבה עבור $B_x\,[y]$ נובע $\vdash (B_x\,[y])_y\,[x] \rightarrow (\exists y)\, B_x\,[y]$, כלומר $\vdash B \rightarrow (\exists y)\, B_x\,[y]$. מכלל הכנסת כמת, $(\exists x)\, B \rightarrow (\exists y)\, B_x\,[y]$ (כפי שהזכרנו לעיל y לא מופיע חופשית ב־$(\exists x)\, B$).

אם כך שני כיווני החץ נכונים, וברור כי החץ הכפול $\leftrightarrow$ גרירה טאוטולוגית של שני הכיוונים, ולכן ממשפט פוסט נובע כי $\vdash (\exists x)\, B \leftrightarrow (\exists y)\, B_x\,[y]$. ■

21 משפט הסימטריה

משפט הסימטריה: לכל שמות עצם a, b,

$$\vdash a \approx b \leftrightarrow b \approx a$$

הוכחה: מאקסיומת השוויון עבור P סמל היחס הדו־מקומי $\approx$,

$$\vdash t_1 \approx s_1 \rightarrow t_2 \approx s_2 \rightarrow t_1 \approx t_2 \rightarrow s_1 \approx s_2$$

נבחר משתנים חדשים x, y, ונציב באקסיומת השוויון הנ"ל x במקום t_1, t_2, s_2 וכן y במקום s_1,

$$\vdash x \approx y \rightarrow x \approx x \rightarrow x \approx x \rightarrow y \approx x$$

נשים לב כי נוסחה זו גוררת טאוטולוגית את הנוסחה,[23]

$$x \approx x \rightarrow x \approx y \rightarrow y \approx x$$

ולכן לפי משפט פוסט היא יסיקה. נשים לב כי מאקסיומת הזהות, $\vdash x \approx x$.

כעת על ידי כלל הניתוק, $\{x \approx x, x \approx x \rightarrow x \approx y \rightarrow y \approx x\} \vdash A := x \approx y \rightarrow y \approx x$.

נפעיל את כלל ההצבה פעמיים ונקבל $\vdash A_{x,y}\,[a,b] = a \approx b \rightarrow b \approx a$ וכן $\vdash A_{x,y}\,[b,a] = b \approx a \rightarrow a \approx b$.

אם כך שני כיווני החץ נכונים, וברור כי החץ הכפול $\leftrightarrow$ גרירה טאוטולוגית של שני הכיוונים, ולכן ממשפט פוסט נובע כי $\vdash a \approx b \leftrightarrow b \approx a$. ■

[23] באופן כללי $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow C$ גוררת טאוטולוגית את $B \rightarrow A \rightarrow C$.

22 משפט השוויון

משפט השוויון:

1. יהיו a, a' שמות עצם, ויהיו $b_1, b_1', ..., b_m, b_m'$ שמות עצם נוספים.
נניח כי $a^{'}$ מתקבל מתוך a על ידי מספר כלשהו של החלפות של b_i ב־b_i' (לאו דווקא כולם).
אם $T \vdash b_i \approx b_i'$ לכל $1 \leq i \leq m$, אז $T \vdash a \approx a'$.

2. יהיו A, A' נוסחאות, ויהיו $b_1, b_1', ..., b_m, b_m'$ שמות עצם.
נניח כי A' מתקבלת מתוך A על ידי מספר כלשהו של החלפות של b_i ב־b_i' (לאו דווקא כולם).
אם $T \vdash b_i \approx b_i'$ לכל $1 \leq i \leq m$, אז $T \vdash A \leftrightarrow A'$.

הערה: ההחלפה בה עוסקים במשפט אינה כוללת החלפה של משתנה שמופיע בצמוד לכמת (כלומר משתנה x שמופיע בצורה $\exists x$).

הוכחה:

1. נחלק לשני מקרים.

- מקרה ראשון: $a = b_i$ לאיזה $1 \leq i \leq m$. במקרה זה $a' = b_i'$. נתון כי $T \vdash b_i \approx b_i'$, כלומר $T \vdash a \approx a'$.
- מקרה שני: לא $a = b_i$ לאף $1 \leq i \leq m$. נשתמש באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של שם העצם a.

  - $a = x$ עבור x משתנה. נשים לב כי במצב זה אין ל־a אף תת־שם עצם ולכן בהכרח $a = b_i$ לאיזה $1 \leq i \leq m$, ולכן מקרה זה מכוסה במקרה הראשון.
  - $a = h$ עבור h קבוע. בדיוק באותו אופן, גם במצב זה אין ל־a אף תת־שם עצם ולכן בהכרח $a = b_i$ לאיזה $1 \leq i \leq m$, ולכן מקרה זה מכוסה במקרה הראשון.
  - $a = f(u_1, ..., u_k)$ עבור f סמל פונקציה k־מקומית ועבור $u_1, ..., u_k$ שמות עצם. במקרה זה $a' = f(u_1', ..., u_k')$, כאשר u_j' מתקבל מתוך u_j לכל $1 \leq j \leq k$ על ידי אותן ההחלפות של b_i ב־b_i'.
  מהנחת האינדוקציה $T \vdash u_j \approx u_j'$ לכל $1 \leq j \leq k$. מאקסיומת השוויון לפונקציות,

$$x_1 \approx y_1 \to ... \to x_k \approx y_k \to f(x_1, ..., x_k) \approx f(y_1, ..., y_k)$$

  נציב בה את $u_1, ..., u_k$ במקום $x_1, ..., x_k$ וכן את $u_1', ..., u_k'$ במקום $y_1, ..., y_k$,

$$u_1 \approx u_1' \to ... \to u_k \approx u_k' \to f(u_1, ..., u_k) \approx f(u_1', ..., u_k')$$

  ומתוך נוסחה זו יחד עם הנתון כי $T \vdash u_j \approx u_j'$ לכל $1 \leq j \leq k$, על ידי כלל הניתוק נובע $T \vdash a \approx a'$. ▲

2. נראה זאת באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של הנוסחה A.

- A נוסחה אטומית. כלומר $A = P(u_1, ..., u_n)$ עבור P סמל יחס n־מקומי ועבור $u_1, ..., u_n$ שמות עצם. במקרה זה $A' = P(u'_1, ..., u'_n)$, כאשר u'_j מתקבל מתוך u_j על ידי אותן ההחלפות של b_i ב־b'_i.
מהחלק הראשון של המשפט נובע כי $T \vdash u_i \approx u'_i$ לכל $1 \leq j \leq k$.
מאקסיומת השוויון ליחסים,
$$\vdash x_1 \approx y_1 \to ... \to x_n \approx y_n \to P(x_1, ..., x_n) \to P(y_1, ..., y_n)$$
נציב בה את $u_1, ..., u_k$ במקום $x_1, ..., x_k$ וכן את $u'_1, ..., u'_k$ במקום $y_1, ..., y_k$,
$$\vdash u_1 \approx u'_1 \to ... \to u_k \approx u'_k \to P(u_1, ..., u_k) \to P(u'_1, ..., u'_k)$$
ומתוך נוסחה זו יחד עם הנתון כי $T \vdash u_j \approx u'_j$ לכל $1 \leq j \leq k$, על ידי כלל הניתוק נובע $T \vdash A \to A'$.
מצד שני, נציב באקסיומת השוויון את $u'_1, ..., u'_k$ במקום $x_1, ..., x_k$ וכן את $u_1, ..., u_k$ במקום $y_1, ..., y_k$,
$$u'_1 \approx u_1 \to ... \to u'_k \approx u_k \to P(u'_1, ..., u'_k) \to P(u_1, ..., u_k)$$
כעת ידוע $T \vdash u_h \approx u'_j$ לכל $1 \leq j \leq k$, ולכן על ידי משפט הסימטריה $T \vdash u'_j \approx u_j$ לכל $1 \leq j \leq k$, ויחד עם ההצבה הנ"ל באקסיומת השוויון, על ידי כלל הניתוק נובע $T \vdash A' \to A$.
כעת על ידי משפט פוסט נובע $T \vdash A \leftrightarrow A'$.
- $A = C \vee D$. במקרה זה $A' = C' \vee D'$, ומהנחת האינדוקציה $T \vdash C \leftrightarrow C'$ וגם $T \vdash D \leftrightarrow D'$. ניתן לראות כי $A \leftrightarrow A'$ גרירה טאוטולוגית של $C \leftrightarrow C'$ יחד עם $D \leftrightarrow D'$, ולכן ממשפט פוסט $T \vdash A \leftrightarrow A'$.
- $A = \neg C$. במקרה זה $A' = \neg C'$, ומהנחת האינדוקציה $T \vdash C \leftrightarrow C'$. ניתן לראות כי $A \leftrightarrow A'$ גרירה טאוטולוגית של $C \leftrightarrow C'$, ולכן ממשפט פוסט $T \vdash A \leftrightarrow A'$.
- $A = (\exists x) C$. במקרה זה $A' = (\exists x) C'$, כאשר C' מתקבלת מתוך C על ידי אותן ההחלפות של b_i ב־b'_i. מהנחת האינדוקציה $T \vdash C \leftrightarrow C'$. מכלל הפילוג $T \vdash (\exists x) C \to (\exists x) C'$ וגם $T \vdash (\exists x) C \to (\exists x) C'$. ניתן לראות כי $A \leftrightarrow A'$ גרירה טאוטולוגית של $(\exists x) C \to (\exists x) C'$ יחד עם $(\exists x) C' \to (\exists x) C$, ולכן ממשפט פוסט נובע $T \vdash A \leftrightarrow A'$. ▲

■

טענה: יהי a שם עצם, ויהיו $b_1, b'_1, ..., b_m, b'_m$ שמות עצם. אזי
$$\vdash b_1 \approx b'_1 \to ... \to b_m \approx b'_m \to a_{x_1,...,x_m}[b_1, ..., b_m] \approx a_{x_1,...,x_m}[b'_1, ..., b'_m]$$

הערה: זו הכללה של אקסיומת השוויון, המתקבלת מטענה זו עבור שמות עצם מהצורה $a = f(x_1, ..., x_m)$.

הוכחה: נשתמש במשפט הדדוקציה, לפיו עבור A נוסחה סגורה, $T\cup\{A\}\vdash B$ אם ורק אם $T\vdash A\to B$ לכל נוסחה B.

כעת אם הנוסחאות $b_1\approx b_1^{'},...,b_m\approx b_m^{'}$ היו סגורות, אז על ידי שימוש m פעמים במשפט הדדוקציה, ההיסק שבטענה שקול להיסק

$$\{b_1\approx b_1',...,b_m\approx b_m'\}\vdash a_{x_1,...,x_m}[b_1,...,b_m]\approx a_{x_1,...,x_m}[b_1',...,b_m']$$

כדי לטפל בכך שהנוסחאות לא סגורות, נצרף לסיגנטורה של השפה מספיק סמלי קבועים חדשים, כך שנוכל להציב בכל שמות העצם $b_1,b_1',...,b_m,b_m'$ את סמלי הקבועים החדשים במקום כל המשתנים החופשיים שמופיעים בהם.

יהיו $c_1,c_1',...,c_m,c_m'$ שמות העצם המתקבלים מתוך שמות העצם $b_1,b_1',...,b_m,b_m'$ בהתאמה, על ידי הצבת הקבועים החדשים.

לפי חלקו הראשון של משפט השוויון, $b_i\approx b_i'\vdash c_i\approx c_i'$ לכל $1\le i\le m$, ולכן

$$\{c_1\approx c_1',...,c_m\approx c_m'\}\vdash a_{x_1,...,x_m}[c_1,...,c_m]\approx a_{x_1,...,x_m}[c_1',...,c_m']$$

כעת הנוסחאות $c_1\approx c_1',...,c_m\approx c_m'$ הן סגורות, ולכן ממשפט הדדוקציה נובע באופן שקול,

$$\vdash c_1\approx c_1'\to...\to c_m\approx c_m'\to a_{x_1,...,x_m}[c_1,...,c_m]\approx a_{x_1,...,x_m}[c_1',...,c_m']$$

נשתמש שוב בחלקו הראשון של משפט השוויון,

$$\vdash b_1\approx b_1'\to...\to b_m\approx b_m'\to a_{x_1,...,x_m}[b_1,...,b_m]\approx a_{x_1,...,x_m}[b_1',...,b_m']$$

כנדרש. ■

23 משפט הקידומת

הגדרה: נאמר כי נוסחה A היא **בצורת הקידומת**, אם היא מהצורה

$$A=(Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_nx_n)B$$

עבור $Q_i=\exists$ או $Q_i=\forall$ לכל $1\le i\le n$, ועבור B נוסחה ללא כמתים כלל.

משפט הקידומת: כל נוסחה שקולה לנוסחה בצורת הקידומת.

כלומר, לכל נוסחה A קיימת נוסחה $A^{'}$ בצורת הקידומת, המקיימת $\vdash A\leftrightarrow A^{'}$.

לצורך ההוכחה נראה תחילה שתי טענות עזר.

טענה 1: לכל נוסחה D,

1. $\vdash(\forall x)(\neg D)\leftrightarrow\neg(\exists x)D$
2. $\vdash(\exists x)(\neg D)\leftrightarrow\neg(\forall x)D$

הוכחה:

1. מהגדרת הכמת $\forall$,

$$(\forall x)(\neg D) = \neg(\exists x)(\neg\neg D)$$

ידוע כי $D \leftrightarrow \neg\neg D$, ולכן ממשפט השקילות

$$\vdash (\forall x)(\neg D) \leftrightarrow \neg(\exists x) D$$

2. מהגדרת הכמת $\forall$,

$$\neg(\forall x) D = \neg\neg(\exists x)(\neg D)$$

ידוע כי $D \leftrightarrow \neg\neg D$, ולכן ממשפט השקילות

$$\vdash \neg(\forall x) D \leftrightarrow (\exists x)(\neg D)$$

$\blacksquare$

טענה 2: יהיו D, E נוסחאות.

- אם בנוסחה E אין מופעים חופשיים של המשתנה x,
  1. $\vdash (\exists x) D \vee E \leftrightarrow (\exists x)(D \vee E)$
  2. $\vdash (\forall x) D \vee E \leftrightarrow (\forall x)(D \vee E)$
- אם בנוסחה D אין מופעים חופשיים של המשתנה x,
  1. $\vdash D \vee (\exists x) E \leftrightarrow (\exists x)(D \vee E)$
  2. $\vdash D \vee (\forall x) E \leftrightarrow (\forall x)(D \vee E)$

הוכחה: נוכיח את המקרה בו בנוסחה E אין מופעים חופשיים של המשתנה x. ההוכחה עבור המקרה בו בנוסחה D אין מופעים חופשיים של המשתנה x מתקבלת מהפעלת טיעונים זהים.

1. נראה תחילה את כיוון החץ $\rightarrow$.

תחילה נשים לב $D \rightarrow D \vee E$ טאוטולוגיה, ומכלל הפילוג $\vdash (\exists x) D \rightarrow (\exists x)(D \vee E)$.

באותו אופן ניתן לקבל $\vdash (\exists x) E \rightarrow (\exists x)(D \vee E)$.

מאקסיומת ההצבה $\vdash E \rightarrow (\exists x) E$ (כי $(\exists x) E$ הצבה חוקית), כלומר $\vdash E \rightarrow (\exists x) E \rightarrow (\exists x)(D \vee E)$, ומטרנזיטיביות החץ נובע $\vdash E \rightarrow (\exists x)(D \vee E)$.

נשים לב כי $(\exists x) D \rightarrow (\exists x)(D \vee E)$ יחד עם $E \rightarrow (\exists x)(D \vee E)$ גוררות טאוטולוגית את $(\exists x) D \vee E \rightarrow (\exists x)(D \vee E)$.[24]

נראה כעת את כיוון החץ $\leftarrow$.

תחילה נשים לב כי מאקסיומת ההצבה $\vdash D \rightarrow (\exists x) D$, וכי נוסחה זו גוררת טאוטולוגית את $D \vee E \rightarrow (\exists x) D \vee E$.

מכלל הכנסת כמת $\vdash (\exists x)(D \vee E) \rightarrow (\exists x) D \vee E$ (כי מההנחה x אינו מופיע חופשית בנוסחה E, ואילו בנוסחה D הוא כעת נקשר בכמת).

קיבלנו חיצים בשני הכיוונים, שגוררים טאוטולוגית את $\leftrightarrow$.

[24] באופן כללי, $A \rightarrow C$ יחד עם $B \rightarrow C$ גוררות טאוטולוגית את $A \vee B \rightarrow C$.

2. נראה תחילה את כיוון החץ $\rightarrow$.

תחילה נשים לב כי ממשפט ההצבה $\vdash (\forall x)\, D \rightarrow D$, וכי נוסחה זו גוררת טאוטולוגית את $(\forall x)\, D \vee E \rightarrow D \vee E$.

מכלל הכנסת כמת של הכולל $\vdash (\forall x)\, D \vee E \rightarrow (\forall x)\, (D \vee E)$ (כי מההנחה x אינו מופיע חופשית בנוסחה E, ואילו בנוסחה D הוא כעת נקשר בכמת).

נראה כעת את כיוון החץ $\leftarrow$.

תחילה נשים לב כי ממשפט ההצבה $\vdash (\forall x)\, (D \vee E) \rightarrow D \vee E$, וכי נוסחה זו גוררת טאוטולוגית את $((\forall x)\, (D \vee E) \wedge (\neg E)) \rightarrow D$.[25]

מכלל הכנסת כמת של הכולל, $\vdash ((\forall x)\, (D \vee E) \wedge (\neg E)) \rightarrow (\forall x)\, D$, ונוסחה זו גוררת טאוטולוגית את $(\forall x)\, (D \vee E) \rightarrow (\forall x)\, D \vee E$.[26]

קיבלנו חיצים בשני הכיוונים, שגוררים טאוטולוגית את $\leftrightarrow$, וממשפט פוסט נובע כי הנוסחה המבוקשת יסיקה. ■

הוכחת משפט הקידומת: באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של A.

- A נוסחה אטומית. כלומר, $A = P\,(u_1, ..., u_n)$ עבור P סמל יחס n־מקומי ועבור $u_1, ..., u_n$ שמות עצם. במקרה זה A כבר בצורת הקידומת.
- $A = (\exists x)\, B$. מהנחת האינדוקציה קיימת B' בצורת הקידומת המקיימת $\vdash B \leftrightarrow B'$. נתבונן בנוסחה $A' = (\exists x)\, B'$. ברור כי A' היא בצורת הקידומת, וממשפט השקילות נובע כי $\vdash A \leftrightarrow A'$.
- $A = \neg B$. מהנחת האינדוקציה קיימת B' בצורת הקידומת המקיימת $\vdash B \leftrightarrow B'$. נסמן $B' = (R_1 y_1) ... (R_k y_k)\, C$ עבור $R_i = \exists$ או $R_i = \forall$ לכל $1 \leq i \leq k$, וכן C נוסחה ללא כמתים.

  מהפעלת טענה 1 k פעמים, נובע כי $\vdash \neg B' \leftrightarrow (R'_1 y_1) ... (R'_k y_k)\, (\neg C)$ כאשר
  $$R'_i = \begin{cases} \forall & R_i = \exists \\ \exists & R_i = \forall \end{cases}.$$

  לכן מתוך $\vdash B \leftrightarrow B'$ נובע $\vdash \neg B \leftrightarrow \neg B'$. לכן עבור $A' = \neg B'$, שהיא בבירור בצורת הקידומת, $\vdash A \leftrightarrow A'$.
- $A = B \vee C$. מהנחת האינדוקציה קיימות B', C' בצורת הקידומת כך שמתקיים $\vdash B \leftrightarrow B', \vdash C \leftrightarrow C'$. ברור כי $\vdash A \leftrightarrow B' \vee C'$. אולם נשים לב כי $B' \vee C'$ אינה בהכרח בצורת הקידומת.

  נסמן את צורות הקידומת,
  $$B' = (R_1 y_1) ... (R_k y_k)\, D$$
  $$C' = (S_1 z_1) ... (S_m z_m)\, E$$

  לכמת, כלומר הקבוצה $y_1, ..., y_k$ והקבוצה $z_1, ..., z_m$, קיימים משתנים משותפים (כלומר $y_i =$
  ט נוכל להציב במקומם משתנים חדשים ולקבל נוסחאות חדשות שגם הן בצורת הקידומת,
  $$B'' = (R_1 y'_1) ... (R_k y'_k)\, D'$$
  $$C'' = (S_1 z'_1) ... (S_m z'_m)\, E'$$

  שורים בכמת המופיעים באחת הנוסחאות B'', C'' שונים מכל המשתנים המופיעים בשנייה.

---

[25] באופן כללי, $A \rightarrow B \vee C$ גוררת טאוטולוגית את $A \wedge (\neg B) \rightarrow C$

[26] באופן כללי, $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow C$ גוררת טאוטולוגית את $A \rightarrow C \vee B$.

מהפעלת טענה 2 $k+m$ פעמים, נובע כי

$$\vdash B'' \vee C'' \leftrightarrow (R_1 y_1') \ldots (R_k y_k') (S_1 z_1') \ldots (S_m z_m') (D' \vee E')$$

לכן עבור $A' = B'' \vee C''$, שהיא בבירור בצורת הקידומת, $\vdash A \leftrightarrow A'$. ■

חלק VI
שלמות

24 עקביות

הגדרה: אומרים כי תאוריה T היא **עקבית**, אם לא ניתן להסיק ממנה נוסחה ואת שלילתה של אותה נוסחה.

כלומר, לא קיימת נוסחה A, שעבורה $T \vdash A$ וגם $T \vdash \neg A$.

טענה: מתאוריה לא עקבית ניתן להסיק כל נוסחה.

הוכחה: תהי T תאוריה לא עקבית. מההגדרה קיימת נוסחה A, שעבורה $T \vdash A$ וגם $T \vdash \neg A$. נשים לב כי $A \wedge \neg A$ היא גרירה טאוטולוגית של A יחד עם $\neg A$, ולכן ממשפט פוסט $T \vdash A \wedge \neg A$.

תהי B נוסחה כלשהי. נראה כי B גרירה טאוטולוגית של $A \wedge \neg A$, וממשפט פוסט ינבע כי $T \vdash B$. אם כך צריך להראות שלכל הערכה ν המקיימת $\nu(A \wedge \neg A) = \mathbb{T}$, מתקיים $\nu(B) = \mathbb{T}$. אבל נשים לב שלא קיימת הערכה כזאת, שכן אם הייתה ν כזאת, אז $\mathbb{T} = \nu(A \wedge \neg A) = \nu(A) \wedge \neg\nu(A) = \mathbb{F}$, וזו סתירה. לכן B גרירה טאוטולוגית של $A \wedge \neg A$ באופן ריק, כנדרש. ■

מסקנה: תאוריה היא עקבית אם ורק אם קיימת נוסחה A כך שלא ניתן להסיק $T \vdash A \wedge \neg A$.

טענה: כל תאוריה שיש לה מודל, היא עקבית.

הוכחה: תהי T תאוריה ויהי $\mathcal{M}$ מודל של T. כלומר לכל $B \in T$ ולכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$, $\overline{\sigma}(B) = \mathbb{T}$. נניח בשלילה כי T אינה עקבית. כלומר קיימת A שעבורה $T \vdash A$ וגם $T \vdash \neg A$.

נתבונן בנוסחה $B := A \wedge \neg A$. מההנחה כי $\mathcal{M}$ מודל של T נובע כי לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$, $\overline{\sigma}(B) = \mathbb{T}$. מצד שני,

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(B) &= \overline{\sigma}(A \wedge (\neg A)) \\
&= \overline{\sigma}(A) \wedge \overline{\sigma}(\neg A) \\
&= \mathbb{F}
\end{aligned}$$

וקיבלנו סתירה. ■

טענה: לכל תאוריה T ולכל נוסחה סגורה A מתקיים כי $T \vdash A$ אם ורק אם $T \cup \{\neg A\}$ אינה עקבית.

הוכחה: (כיוון ראשון)

נניח כי $T \vdash A$. בפרט מתקיים כי $T \cup \{\neg A\} \vdash A$. מצד שני, ברור כי $T \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$. וקיבלנו את ההגדרה לאי־עקביות.

(כיוון שני)

נניח כי $T \cup \{\neg A\}$ אינה עקבית. לכן קיימת B שעבורה $T \cup \{\neg A\} \vdash B$ וגם $T \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$.

נשים לב כי $\neg A$ נוסחה סגורה, ולכן ממשפט הדדוקציה $T\cup\{\neg A\}\vdash C$ אם ורק אם $T\vdash\neg A\to C$ לכל נוסחה C.

נבחר $C:=B\wedge\neg B$, ונקבל כי מההנחה $T\cup\{\neg A\}\vdash B\wedge\neg B$ נובע כי $T\vdash\neg A\to B\wedge\neg B=A\vee B\wedge\neg B$.

נשים לב כי A היא גרירה טאוטולוגית של $A\vee B\wedge\neg B$, כי כל הערכה ν המקיימת $\nu\left(A\vee B\wedge\neg B\right)=\mathbb{T}$ בהכרח מקיימת $\nu\left(A\right)=\mathbb{T}$. לכן ממשפט פוסט $T\vdash A$. ■

25 סְגוֹר של נוסחה

הגדרה: עבור נוסחה A, **הסְגוֹר** של A הוא נוסחה $A^{'}$ שבה מטילים כמת $\forall$ על כל משתנה חופשי המופיע ב־A.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ מבנה, תהי A נוסחה ותהי $A^{'}$ הסגור של A. אזי $\mathcal{M}\vDash A$ אם ורק אם $\mathcal{M}\vDash A^{'}$.

הוכחה: (כיוון ראשון)

נניח כי $\mathcal{M}\vDash A$. כלומר לכל השמה $\sigma:Var\to|\mathcal{M}|$, $\overline{\sigma}\left(A\right)=\mathbb{T}$. בפרט נובע מכך שלכל $a\in|\mathcal{M}|$, עבור ההשמה $\sigma\left[x/a\right]:Var\to|\mathcal{M}|$, $\overline{\sigma\left[x/a\right]}\left(A\right)=\mathbb{T}$, ולכן

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}\left(\left(\forall x\right)A\right) &= \bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\overline{\sigma\left[x/a\right]}\left(A\right)\\ &= \bigwedge_{a\in|\mathcal{M}|}\mathbb{T}\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

נשים לב כי $A^{'}=\left(\forall x_1\right)...\left(\forall x_m\right)A$ עבור $x_1,...,x_m$ משתנים חופשיים המופיעים ב־A, ולכן $\mathcal{M}\vDash A^{'}$.

(כיוון שני)

נניח כי $\mathcal{M}\vDash A^{'}$. נניח תחילה כי $\mathcal{M}\vDash\left(\forall x\right)A$. ממשפט ההצבה נובע כי $\vdash\left(\forall x\right)A\to A$, ולכן ממשפט הנאותות לכל השמה $\sigma:Var\to|\mathcal{M}|$, $\overline{\sigma}\left(\left(\forall x\right)A\right)\to\overline{\sigma}\left(A\right)=\mathbb{T}$. אבל מההנחה $\mathcal{M}\vDash\left(\forall x\right)A$ נובע כי $\sigma\left(\left(\forall x\right)A\right)=\mathbb{T}$, ולכן $\overline{\sigma}\left(A\right)=\mathbb{T}$. כלומר $\mathcal{M}\vDash A$.

נשים לב כי $A^{'}=\left(\forall x_1\right)...\left(\forall x_m\right)A$ עבור $x_1,...,x_m$ משתנים חופשיים המופיעים ב־A, ולכן $\mathcal{M}\vDash A^{'}$. ■

26 משפט השלמות של גדל (Gödel)

משפט השלמות: לכל תאוריה עקבית קיים מודל.

מסקנה: בסימונים שהראינו לעיל,

$$Th\left(Mod\left(T\right)\right)\subset\left\{A\mid T\vdash A\right\}$$

הוכחת המסקנה: תהי $A \in Th\left(Mod\left(T\right)\right)$, כלומר לכל $\mathcal{M} \vDash A$ מתקיים $\mathcal{M} \vDash A$. צריך להראות כי $T \vdash A$. מטענה קודמת נובע כי $\mathcal{M} \vDash A$ אם ורק אם $\mathcal{M} \vDash A'$ עבור A' הסגור של A, ולכן נניח ללא הגבלת הכלליות כי A סגורה.

תחילה נשים לב כי $T \cup \{\neg A\}$ בהכרח לא עקבית, כי אם היא הייתה עקבית אז ממשפט השלמות קיים לה מודל, $\mathcal{M} \vDash T \cup \{\neg A\}$, ובפרט $\mathcal{M} \vDash \neg A$. אבל $\mathcal{M}$ מודל של T, כלומר $\mathcal{M} \in Mod\left(T\right)$, ובכל זאת $\mathcal{M}$ לא מספק את A, כלומר $A \notin Th\left(Mod\left(T\right)\right)$, בסתירה להנחה.

לכן נובע $T \cup \{\neg A\}$ לא עקבית, כלומר $T \cup \{\neg A\} \vdash B \wedge \neg B$ עבור נוסחה B כלשהי. מההנחה כי $\neg A$ סגורה, על ידי משפט הדדוקציה, $T \vdash \neg A \to B \wedge \neg B$.

נשים לב כי A גרירה טאוטולוגית של $\neg A \to B \wedge \neg B$,[27] ולכן ממשפט פוסט $T \vdash A$, כנדרש. ■

מבוא להוכחת משפט השלמות: איך בנויה ההוכחה?

- נציג את המטרה: ברקע יש לנו תאוריה T עקבית. אנחנו מעוניינים למצוא איזשהו מודל של T, כאשר כל המידע שבידינו הוא רק הנוסחאות של T הכתובות בשפה L כלשהי. כיצד נמציא את המודל?

  נשיג את אותו מודל בכמה שלבים:

1. נגדיר תחילה **מבנה קנוני**, בעזרת כלים הקשורים רק לתאוריה ולשפה בה היא כתובה.
2. נגדיר מהי **תאוריה שלמה** ונגדיר את **תכונת הנקין**. נצטמצם לתאוריות העקביות והשלמות שמקיימות את תכונת הנקין, ונראה שעבור תאוריות אלה המבנה הקנוני מהווה מודל. כלומר לסוג זה של תאוריות מתקיים משפט השלמות.
3. נגדיר מהי **הרחבה שמרנית** של תאוריה ביחס לשפה מסוימת. נראה שלכל תאוריה עקבית קיימת הרחבה שמרנית שמקיימת את תכונת הנקין.
4. נראה עוד יותר מכך - שעבור כל תאוריה עקבית, אותה הרחבה שמרנית שמקיימת את תכונת הנקין יכולה להתרחב לתאוריה שלמה.
5. כעת על ידי המסקנה מסעיף 2 לאותה הרחבה קיים מודל, שהוא המבנה הקנוני. נראה שלמעשה מודל זה הוא גם מודל של התאוריה הנתונה, כפי שקובע משפט השלמות.

26.1 חלק א: המבנה הקנוני

מבוא: נתונה לנו תאוריה עקבית T, ואנחנו מעוניינים למצוא עבורה מודל. אין לנו שום מידע על התאוריה, ולכן הדרך היחידה להגדיר מבנה היא באמצעים סינטקטיים בלבד.

נניח כי בסיגנטורה של השפה קיימים סמלי קבועים. כלומר, קיימים שמות עצם שלא מכילים משתנים.

הגדרה: תהי T תאוריה עקבית. נגדיר על קבוצת שמות העצם ללא משתנים יחס $\sim$,

$$a \sim b \iff T \vdash a \approx b$$

[27] שכן לכל הערכה ν המקיימת $\nu\left(\neg A \to B \wedge \neg B\right) = \mathbb{T}$, בהכרח $\nu\left(\neg A\right) = \mathbb{F}$, ולכן $\nu\left(A\right) = \mathbb{T}$.

טענה: עבור T תאוריה עקבית, היחס $\sim$ הוא יחס שקילות.

הוכחה: צריך להוכיח רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.

- רפלקסיביות: מאקסיומת הזהות $x \approx x$, ועל ידי כלל ההצבה $a \approx a$. כלומר $a \sim a$.
- סימטריות: ממשפט הסימטריה, $a \approx b \leftrightarrow b \approx a$. לכן $T \vdash a \approx b$ אם ורק אם $T \vdash b \approx a$. כלומר $a \sim b$ אם ורק אם $b \sim a$.
- טרנזיטיביות: מאקסיומת השוויון עבור סמל היחס הדו־מקומי $\approx$,

$$x_1 \approx y_1 \to x_2 \approx y_2 \to ((x_1 \approx x_2) \to (y_1 \approx y_2))$$

ומכלל ההצבה, נציב $x_1 = a$ וגם $y_1 = a$, כמו כן נציב $x_2 = b$ וגם נציב $c = y_2$,

$$a \approx a \to b \approx c \to ((a \approx b) \to (a \approx c))$$

מרפלקסיביות נובע $T \vdash a \approx a$, ולכן מתוך $T \vdash b \approx c$ וגם $T \vdash a \approx b$, לפי כלל הניתוק נובע $T \vdash a \approx c$. כלומר אם $a \sim b$ וגם $b \sim c$ אז $a \sim c$. ■

סימון: בהינתן a שם עצם ללא משתנה, נסמן את מחלקת השקילות שלו תחת יחס השקילות $\sim$ על ידי $[a]_\sim$.

הגדרה: תהי T תאוריה עקבית, כאשר מניחים שבשפה קיימים שמות עצם ללא משתנים. נגדיר **מבנה קנוני** $\mathcal{M}$ עבור T בצורה הבאה.

קבוצת המבנה $|\mathcal{M}|$ תהיה קבוצת מחלקות השקילות של יחס השקילות $\sim$ שהגדרנו על קבוצת שמות העצם ללא משתנים.

פירושי סמלי הפונקציות והיחסים שבשפה במבנה יהיו:

- אם h סמל קבוע,

$$h^{\mathcal{M}} := [h]_\sim$$

- אם f סמל פונקציה n־מקומית, עבור כל $a_1, ..., a_n$ שמות עצם ללא משתנים,

$$f^{\mathcal{M}}\left([a_1]_\sim, [a_2]_\sim, ..., [a_n]_\sim\right) := [f(a_1, ..., a_n)]_\sim$$

- אם P סמל יחס n־מקומי, עבור כל $a_1, ..., a_n$ שמות עצם ללא משתנים,

$$P^{\mathcal{M}}\left([a_1]_\sim, [a_2]_\sim, ..., [a_n]_\sim\right) := \begin{cases} \mathbb{T} & T \vdash P(a_1, ..., a_n) \\ \mathbb{F} & \text{otherwise} \end{cases}$$

טענה: עבור T תאוריה עקבית, פירושי הפונקציות והיחסים במבנה הקנוני $\mathcal{M}$ מוגדרים היטב. כלומר, הפירושים אינם תלויים בבחירת הנציגים של מחלקות השקילות.

הוכחה:

- עבור פירושי סמלי הפונקציות (בפרט גם עבור סמלי קבועים): יהיו $a_1',...,a_n'$ נציגים אחרים של אותן מחלקות השקילות. כלומר $a_i \sim a_i'$ לכל $1 \leq i \leq n$. צריך להראות כי,

$$f^{\mathcal{M}}\left([a_1']_\sim,...,[a_n']_\sim\right) = f^{\mathcal{M}}\left([a_1]_\sim,...,[a_n]_\sim\right)$$

כלומר צריך להראות,

$$[f(a_1,...,a_n)]_\sim = [f(a_1',...,a_n')]_\sim$$

מאקסיומת השוויון,

$$\vdash x_1 \approx y_1 \to ... \to x_n \approx y_n \to f(x_1,...,x_n) \approx f(y_1,...,y_n)$$

מכלל ההצבה,

$$\vdash a_1 \approx a_1' \to ... \to a_n \approx a_n' \to f(a_1,...,a_n) \approx f(a_1',...,a_n')$$

אבל נתון כי $T \vdash a_i \approx a_i'$ לכל $1 \leq i \leq n$, ולכן מכלל הניתוק

$$T \vdash f(a_1,...,a_n) \approx f(a_1',...,a_n')$$

כלומר,

$$[f(a_1,...,a_n)]_\sim = [f(a_1',...,a_n')]_\sim$$

כנדרש.

- עבור פירושי סמלי יחסים: יהיו $a_1',...,a_n'$ נציגים אחרים של אותן מחלקות השקילות. כלומר $a_i \sim a_i'$ לכל $1 \leq i \leq n$. צריך להראות כי,

$$P^{\mathcal{M}}\left([a_1']_\sim,...,[a_n']_\sim\right) = P^{\mathcal{M}}\left([a_1]_\sim,...,[a_n]_\sim\right)$$

מאקסיומת השוויון,

$$\vdash x_1 \approx y_1 \to ... \to x_n \approx y_n \to P(x_1,...,x_n) \to P(y_1,...,y_n)$$

מכלל ההצבה,

$$\vdash a_1 \approx a_1' \to ... \to a_n \approx a_n' \to P(a_1,...,a_n) \to P(a_1',...,a_n')$$

אבל נתון כי $T \vdash a_i \approx a_i'$ לכל $1 \leq i \leq n$, ולכן מכלל הניתוק

$$T \vdash P(a_1,...,a_n) \to P(a_1',...,a_n')$$

מסימטריות יחס השקילות שהגדרנו (שנבעה ממשפט הסימטריה) נובע כי גם $T \vdash a_i' \approx a_i$, ולכן על ידי ההצבה המתאימה באקסיומת השוויון נקבל באותו אופן,

$$T \vdash P(a_1',...,a_n') \to P(a_1,...,a_n)$$

וממשפט פוסט,

$$T \vdash P(a_1,...,a_n) \leftrightarrow P(a_1',...,a_n')$$

מכך נובע על ידי כלל הניתוק, כי $T \vdash P(a_1,...,a_n)$ אם ורק אם $T \vdash P(a_1',...,a_n')$, כנדרש. ■

טענה: תהי T תאוריה עקבית ויהי $\mathcal{M}$ המבנה הקנוני שלה. אזי לכל שם עצם a שאין בו משתנים ולכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\tilde{\sigma}(a) = [a]_\sim$$

הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של שם העצם a.

- $a = x$ עבור x משתנה. מקרה זה לא ייתכן, כי a ללא משתנים.
- $a = h$ עבור h סמל קבוע. במקרה זה

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(a) &= \tilde{\sigma}(h)\\ &= h^{\mathcal{M}}\\ &= [h]_\sim\\ &= [a]_\sim\end{aligned}$$

- $a = f(b_1, ..., b_m)$ עבור f סמל פונקציה m־מקומית, $b_1, ..., b_m$ שמות עצם. אז מהנחת האינדוקציה נקבל,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(a) &= \tilde{\sigma}(f(b_1, ..., b_m))\\ &= f^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(b_1), ..., \tilde{\sigma}(b_m))\\ &= f^{\mathcal{M}}([b_1]_\sim, ..., [b_m]_\sim)\\ &= [f(b_1, ..., b_m)]_\sim\\ &= [a]_\sim\end{aligned}$$

כנדרש. ∎

דוגמה: נראה דוגמה לכך שהמבנה הקנוני <u>אינו</u> מהווה מודל של T.

ניקח סיגנטורה של שדה, כלומר $L = (0, 1, +, \cdot)$, כאשר $0, 1$ סמלי קבועים, $+, \cdot$ סמלי פונקציות דו־מקומיות.

ניקח את T להיות אקסיומות השדה (כלומר 0 איבר אדיש לחיבור, 1 איבר אדיש לכפל, קיום נגדי לחיבור, קיום נגדי לכפל, קומוטטיביות ואסוציאטיביות לכפל ולחיבור, ופילוג של הכפל מעל החיבור).

מה הם שמות העצם ללא משתנים בשפה זו? אלו כל האיברים שניתנים לבנייה מתוך סמלי הקבועים $0, 1$ על ידי חיבור וכפל.

ניתן להראות כי $[0]_\sim, [1]_\sim, [1+1]_\sim, [1+1+1]_\sim, ...$ אלו כל מחלקות השקילות של יחס השקילות $\sim$. כלומר קבוצת המבנה היא המספרים הטבעיים, עם פירושי הסמלים הנורשים לה מפירושי הסמלים במבנה של השדה.

קיבלנו כי המבנה הקנוני של מבנה השדה, הוא מבנה המספרים הטבעיים. אבל בטבעיים אין נגדי לחיבור ואין הופכי לכפל, ולכן המבנה הקנוני אינו מודל של T.

26.2 חלק ב: משפט השלמות לתאוריה עקבית ושלמה עם תכונת הנקין

הגדרה: אומרים כי תאוריה T בשפה L כלשהי מקיימת את **תכונת הנקין**, אם לכל נוסחה סגורה מהצורה $(\exists x)\, A$, קיים קבוע e בסיגנטורה של השפה L, כך שמתקיים $T \vdash (\exists x)\, A \to A_x\,[e]$.

הנוסחה $(\exists x)\, A \to A_x\,[e]$ נקראת **אקסיומת הנקין**.

הגדרה: תאוריה T נקראת **שלמה**, אם לכל נוסחה סגורה A, מתקיים $T \vdash A$ או $T \vdash \neg A$.

דוגמה: התאוריה של השדות אינה שלמה, שכן הנוסחה הסגורה $1+1 \approx 0$ מתקיימת במודל מסוים ($\mathbb{Z}_2$, כשדה בעל שני איברים, עם חיבור וכפל מודולו 2), אבל לא מתקיימת במודל אחר ($\mathbb{R}$).

משפט: לכל תאוריה שלמה ועקבית המקיימת את תכונת הנקין, קיים מודל. מודל זה הוא המבנה הקנוני.

הוכחה: תהי T תאוריה שלמה ועקבית, ובעלת תכונת הנקין. יהי $\mathcal{M}$ המבנה הקנוני שלה. צריך להראות כי $\mathcal{M} \vDash T$. כלומר, לכל נוסחה $A \in T$, $\mathcal{M} \vDash A$.

הראינו כי לכל נוסחה A מתקיים $\mathcal{M} \vDash A$ אם ורק אם $\mathcal{M} \vDash A'$ עבור A' הסגור של A. לכן ללא הגבלת הכלליות מספיק להראות זאת עבור נוסחאות סגורות.

משלמות T נובע כי לכל נוסחה סגורה A מתקיים $T \vdash A$ או $T \vdash \neg A$, אם כך נראה שאכן לכל נוסחה A - סגורה, ללא הגבלת הכלליות - מתקיים כי אם $T \vdash A$ אז $\mathcal{M} \vDash A$, ואם $T \vdash \neg A$ אז $\mathcal{M} \vDash \neg A$.

נשתמש באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של הנוסחה A.

- $A = P\,(a_1, ..., a_n)$ עבור P סמל יחס n־מקומי, $a_1, ..., a_n$ שמות עצם. הנחנו כי A סגורה, ולכן $a_1, ..., a_n$ הם שמות עצם ללא משתנים כלל (כי בנוסחה אטומית אין כלל כמתים).

  מהגדרת המבנה הקנוני, לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}\,(A) &= \overline{\sigma}\,(P\,(a_1, ..., a_n)) \\ &= P^{\mathcal{M}}\,(\tilde{\sigma}\,(a_1)\,, ..., \tilde{\sigma}\,(a_n)) \\ &= P^{\mathcal{M}}\,([a_1]_\sim\,, ..., [a_n]_\sim) \\ &= \begin{cases} \mathbb{T} & T \vdash P\,(a_1, ..., a_n) = A \\ \mathbb{F} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

  ולכן ברור כי אם $T \vdash A$ אז $\mathcal{M} \vDash A$, ואם $T \vdash \neg A$ אז $\mathcal{M} \vDash \neg A$.

- $A = B \vee C$. מהיות A סגורה נובע כי B, C סגורות. משלמות T מתקיימת רק אחת מארבע האפשרויות הבאות,

  1. $T \vdash B, T \vdash C$: במקרה זה בהכרח $T \vdash A = B \vee C$. מהנחת האינדוקציה $\mathcal{M} \vDash B, C$, ולכן $\mathcal{M} \vDash A = B \vee C$.
  2. $T \vdash B, T \vdash \neg C$: במקרה זה בהכרח $T \vdash A = B \vee C$. מהנחת האינדוקציה $\mathcal{M} \vDash B, \neg C$, ולכן $\mathcal{M} \vDash A = B \vee C$.

3. $T \vdash \neg B, T \vdash C$: במקרה זה בהכרח $T \vdash A = B \vee C$. מהנחת האינדוקציה $\mathcal{M} \vDash \neg B, C$, ולכן $\mathcal{M} \vDash A = B \vee C$.
4. $T \vdash \neg B, T \vdash \neg C$: במקרה זה בהכרח $T \vdash \neg A = \neg (B \vee C)$. מהנחת האינדוקציה $\mathcal{M} \vDash \neg B, \neg C$, ולכן $\mathcal{M} \vDash \neg A = \neg (B \vee C)$.[28]

- $A = \neg B$. מהיות A סגורה נובע כי B סגורה. משלמות T מתקיימת רק אחת משתי האפשרויות הבאות,

1. $T \vdash B$: במקרה זה מהנחת האינדוקציה $\mathcal{M} \vDash B$, ולכן $\mathcal{M} \vDash \neg\neg B = \neg A$.
2. $T \vdash \neg B$: במקרה זה מהנחת האינדוקציה $\mathcal{M} \nvDash B$ (כי B סגורה), ולכן לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$, $\overline{\sigma}(B) = \mathbb{F}$, ולכן $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$. כלומר $\mathcal{M} \vDash A$.

- $A = (\exists x) B$. מהיות A סגורה, נובע כי x הוא המשתנה היחיד שעלול להופיע בצורה חופשית בנוסחה B.

מתכונת הנקין נובע שקיים בסיגנטורה של השפה סמל קבוע e, כך שמתקיים $T \vdash (\exists x) B \to B_x[e]$.

משלמות T מתקיימת רק אחת משתי האפשרויות הבאות,

1. $T \vdash A = (\exists x) B$: נרצה להראות כי $\mathcal{M} \vDash A = (\exists x) B$.
על ידי שימוש באקסיומת הנקין וכלל הניתוק, $T \vdash B_x[e]$. לכן מהנחת האינדוקציה $\mathcal{M} \vDash B_x[e]$.[29]
נשים לב כי מטענה קודמת $e^{\mathcal{M}} = [e]_\sim = \tilde{\sigma}(e)$. כעת, על ידי טענה שהראינו בעבר,[30]

$$\begin{aligned} \overline{\sigma[x/[e]_\sim]}(B) &= \overline{\sigma[x/\tilde{\sigma}(e)]}(B) \\ &= \overline{\sigma}(B_x[e]) \\ &= \mathbb{T} \end{aligned}$$

כעת תהי השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(A) &= \overline{\sigma}((\exists x) B) \\ &= \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B) \\ &= \mathbb{T} \end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון הוא כי עבור $[e]_\sim \in |\mathcal{M}|$, $\overline{\sigma[x/[e]_\sim]}(B) = \mathbb{T}$.

2. $T \vdash \neg A = \neg (\exists x) B$: נרצה להראות כי $\mathcal{M} \vDash \neg A = \neg (\exists x) B$.
על פי אקסיומת ההצבה, לכל שם עצם ללא משתנים u, אם הצבה $B_x[u]$ חוקית, $B_x[u] \to (\exists x) B$. לכן מהנתון $T \vdash \neg (\exists x) B$, על ידי כלל הניתוק, $T \vdash \neg (B_x[u])$. לכן מהנחת האינדוקציה $\mathcal{M} \vDash \neg B_x[u]$.

[28] ניתן לשים לב כי $\neg A = \neg (B \vee C)$ היא גרירה טאוטולוגית של $\neg B \wedge \neg C$.

[29] נשים לב כי סדרת היצירה של B (שהיא מאורך קטן מזה של סדרת היצירה של A) מניבה סדרת יצירה של $B_x[e]$ שהיא באותו אורך כאשר בכל שלב מחליפים את הופעות x בסמל הקבוע e.
דרך נוספת להצדיק את השימוש בהנחת האינדוקציה היא לבצע סימולטנית אינדוקציה נוספת על מספר הכמתים.

[30] בפרק **פעולת השמה על הצבה**.

כלומר, לכל השמה $\tau : Var \to |\mathcal{M}|$, $\overline{\tau}(B_x[u]) = \mathbb{F}$. כמו כן נשים לב כי מהנימוקים שהראינו במקרה הקודם, נובע מכך כי,

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \overline{\tau}(B_x[u]) \\ &= \overline{\tau[x/\tilde{\sigma}(u)]}(B) \\ &= \overline{\tau[x/[u]_\sim]}(B) \end{aligned}$$

כעת נשים לב שמהגדרת המבנה הקנוני $\mathcal{M}$, כל איבר $a \in |\mathcal{M}|$ הוא מהצורה $a = [u]_\sim$ עבור u שם עצם ללא משתנים. לכן בפרט עבור ההשמה $\sigma[x/a]$,

$$\overline{\sigma[x/a]}(B) = \mathbb{F}$$

ולכן נובע

$$\overline{\sigma}((\exists x)B) = \bigvee_{a\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B) = \mathbb{F}$$

כלומר $\overline{\sigma}(\neg A) = \overline{\sigma}(\neg(\exists x)B) = \mathbb{T}$. ■

26.3 חלק ג: הרחבה שמרנית

הגדרה: תהי T תאוריה בשפה L. היות שבהקשר זה ההתייחסות לשפה בה כתובות נוסחאות התאוריה היא מהותית, נסמן T/L. כלומר, T/L היא התאוריה T הכתובה בשפה L.

- **הרחבה** של T/L היא תאוריה T' הכתובה בשפה L', כלומר T'/L', כאשר L' היא שפה חדשה המכילה את L ומתקבלת ממנה על ידי הוספה של סמלי קבועים חדשים, וכן T' היא תאוריה חדשה המכילה את T וכתובה בשפה L'.
- **הרחבה שמרנית** של T/L, היא הרחבה T'/L', המקיימת את התכונה הבאה: לכל נוסחה A בשפה L, מתקיים $T \vdash_L A$ אם ורק אם $T' \vdash_{L'} A$.

טענה: תהי T'/L' הרחבה שמרנית של T/L. אם T עקבית אז גם T' עקבית.

הוכחה: תהי A נוסחה כלשהי בשפה L. נתבונן בנוסחה $A \wedge \neg A$. משמרנות ההרחבה, מתקיים $T \vdash_L A \wedge \neg A$ אם ורק אם $T' \vdash_{L'} A \wedge \neg A$. מעקביות T נובע כי $T \nvdash_L A \wedge \neg A$, ולכן גם $T' \nvdash_{L'} A \wedge \neg A$. אבל אם T' לא הייתה עקבית כל נוסחה הייתה יסיקה ממנה, ולכן T' עקבית. ■

משפט: תהי T תאוריה עקבית בשפה L. אזי עבור T/L קיימת הרחבה שמרנית T'/L', כך שהתאוריה T' מקיימת את תכונת הנקין.

הוכחה: תחילה נסמן לצורך הנוחות $T_0 := T$ וכן $L_0 := L$.

נתבונן בכל הנוסחאות הסגורות בשפה L, שהן בעלות הצורה $(\exists x)B$. לכל נוסחה כנ"ל נתאים סמל קבוע חדש, ייחודי לה, שנסמן $e_{(\exists x)B}$.

נרחיב את הסיגנטורה של L באמצעות כל סמלי הקבועים החדשים מהצורה $e_{(\exists x)B}$. נסמן את השפה החדשה L_1.

במקביל, נוסיף לתאוריה T את כל אקסיומות הנקין מהצורה $(\exists x)\, B \to B_x \left[e_{(\exists x)B}\right]$.
נסמן את התאוריה החדשה T_1.

נשים לב כי T_1/L_1 לא בהכרח מקיימת את תכונת הנקין, שכן השפה L_1 גדולה יותר מהשפה L_0 ולכן יש בה נוסחאות חדשות שלגביהן איננו יודעים את אקסיומת הנקין.

נמשיך בדיוק באותה הבנייה, ונגדיר הרחבה T_2/L_2, כך שהשפה L_2 מכילה את L_1 ומרחיבה אותה על ידי סמלי הקבועים החדשים עבור הנוסחאות החדשות שהתווספו לשפה L_1, וכן שהתאוריה T_2 מכילה את T_1 ומרחיבה אותה על ידי כל אקסיומות הנקין המתאימות לנוסחאות החדשות הנ"ל.

נמשיך את הבנייה באופן זה, ונקבל סדרה אינסופית של הרחבות $T_1/L_1,\, T_2/L_2,\, T_3/L_3,\, \ldots$.

כעת נגדיר שפה חדשה $L' = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ ותאוריה חדשה $T' = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.[31] נראה כי ההרחבה T'/L' היא ההרחבה המבוקשת של T/L. כלומר היא הרחבה שמרנית המקיימת את תכונת הנקין.

למה 1: התאוריה T' בשפה L' מקיימת את תכונת הנקין.

הוכחה: תהי נוסחה סגורה מהצורה $(\exists x)\, B$ בשפה L'. היות שנוסחה היא בעלת אורך סופי, קיים m טבעי גדול מספיק, כך שהנוסחה $(\exists x)\, B$ היא בשפה L_m.
לכן אקסיומת הנקין המתאימה לה, $(\exists x)\, B \to B_x \left[e_{(\exists x)B}\right]$, שייכת לתאוריה T_{m+1}, ולכן גם לתאוריה T'. ▲

למה 2: T'/L' היא הרחבה שמרנית של T/L.

הוכחה: תהי A נוסחה בשפה L. ברור כי אם $T \vdash_L A$ אז $T' \vdash_{L'} A$. נראה את הכיוון ההפוך.
נניח כי $T' \vdash_{L'} A$. נשים לב כי T' התקבלה מתוך T על ידי הוספה של אקסיומות הנקין. כמו כן, היות שהיסק הוא תהליך סופי, ההיסק $T' \vdash_{L'} A$ משתמש במספר סופי של אקסיומות הנקין. לכן קיימות אקסיומות הנקין $H_1, \ldots, H_N$ בשפה L', כך שמתקיים $T \cup \{H_1, \ldots, H_N\} \vdash_{L'} A$.
כל אקסיומת הנקין היא נוסחה סגורה, ולכן ממשפט הדדוקציה, מתוך $T \cup \{H_1, \ldots, H_N\} \vdash_{L'} A$ נובע כי $T \vdash_{L'} H_1 \to \ldots \to H_N \to A$.
נסדר מחדש את $H_1, \ldots, H_N$ לסדרה $H_{j_1}, \ldots, H_{j_N}$, כאשר j_i הוא המספר המינימלי שעבורו H_{j_i} היא בשפה L_{j_i}. כמו כן ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי $H_{j_i} \neq H_{j_k}$ לכל $i \neq k$ (נשים לב שייתכן $j_N < N$, כלומר אולי חלק מהאקסיומות יושמטו במהלך הסידור המחודש).
נסמן את אקסיומות הנקין הללו $H_{j_i} = (\exists x_i)\, B_i \to (B_i)_{x_i} \left[e_{(\exists x_i)B_i}\right]$. מהסידור המחודש נובע כי כל סמל קבוע $e_{(\exists x_i)B_i}$ מופיע במקום אחד לכל היותר.
נשכתב ונכתוב במקום הקבוע $e_{\left(\exists x_{j_1}\right)B_{j_1}}$ סמל משתנה חדש y, וממשפט הקבועים נובע,

$$T \vdash_{L'} (\exists x_{j_1})\, B_{j_1} \to (B_{j_1})_{x_{j_1}} [y] \to H_{j_2} \to \ldots \to H_{j_N} \to A$$

מכלל הכנסת הכמת נכניס את הכמת $\exists y$,

$$T \vdash_{L'} (\exists y) \left((\exists x_{j_1})\, B_{j_1} \to (B_{j_1})_{x_{j_1}} [y] \right) \to H_{j_2} \to \ldots \to H_{j_N} \to A$$

[31]נשים לב כי האינדקסים מתחילים מאפס. כלומר, L' כוללת את $L_0 := L$, וכן T' כוללת את $T_0 := T$.

נטפל בנפרד בנוסחה הראשונה בגרירה, $(\exists y)\left(\left(\exists x_{j_1}\right) B_{j_1} \rightarrow \left(B_{j_1}\right)_{x_{j_1}}[y]\right)$.
היות שהמשתנה y נבחר להיות משתנה חדש, ברור שהוא אינו מופיע חופשית בנוסחה B_{j_1}. לכן מתוך אחד מכיווני החץ הכפול של משפט הווריאנט,

$$\vdash \left(\exists x_{j_1}\right) B_{j_1} \rightarrow (\exists y)\left(B_{j_1}\right)_{x_{j_1}}[y]$$

ומטענת עזר 2 שהראינו לפני הוכחת משפט הקידומת,

$$\vdash (\exists y)\left(\left(\exists x_{j_1}\right) B_{j_1} \rightarrow \left(B_{j_1}\right)_{x_{j_1}}[y]\right)$$

נחזור לנוסחה הכללית,

$$T \vdash_{L'} (\exists y)\left(\left(\exists x_{j_1}\right) B_{j_1} \rightarrow \left(B_{j_1}\right)_{x_{j_1}}[y]\right) \rightarrow H_{j_2} \rightarrow \ldots \rightarrow H_{j_N} \rightarrow A$$

הראינו כי ניתן להסיק את הנוסחה הראשונה, ולכן על ידי כלל הניתוק,

$$T \vdash_{L'} H_{j_2} \rightarrow \ldots \rightarrow H_{j_N} \rightarrow A$$

כעת נוכל לחזור על אותו התהליך עבור $H_{j_2}, \ldots, H_{j_N}$, ולבסוף נקבל

$$T \vdash_{L'} A$$

נשים לב כי L' התקבלה מתוך L על ידי הוספת סמלי קבועים חדשים, ולכן ניתן להפעיל את משפט הקבועים ולקבל כי,

$$T \vdash_L A$$

כנדרש. ▲

אם כך מצאנו כי T'/L' היא הרחבה שמרנית המקיימת את תכונת הנקין, כנדרש. ■

26.4 חלק ד: הרחבה שלמה (משפט לינדנבאום)

משפט לינדנבאום: תהי T תאוריה עקבית בשפה L. ממשפט קודם ידוע שקיימת T'/L' הרחבה שמרנית של T/L המקיימת את תכונת הנקין.

אזי עבור T'/L' זו, קיימת הרחבה T''/L' (נשים לב כי T'' תאוריה בשפה L'), כך שהתאוריה T'' שלמה.

טענה: ההרחבה T''/L' שבמשפט לינדנבאום מקיימת את תכונת הנקין.

הוכחה: צריך להראות כי לכל נוסחה מהצורה $(\exists x)\, B$ עבור B סגורה, קיים סמל קבוע e בשפה L', כך שמתקיים $T'' \vdash (\exists x)\, B \rightarrow B_x[e]$.

נתון כי T'/L' היא בעלת תכונת הנקין, ולכן $T' \vdash (\exists x)\, B \rightarrow B_x[e]$. אבל $T' \subset T''$, ולכן בפרט גם $T'' \vdash (\exists x)\, B \rightarrow B_x[e]$. ■

הערה: כדי להוכיח את משפט לינדנבאום נשתמש בגרסה מסוימת של אקסיומת הבחירה, שנקראת "הלמה של טייכמולר־טוקיי".

26.4.1 הלמה של טייכמולר־טוקיי

הגדרה: תהי $\mathcal{Q}$ משפחה של קבוצות. נאמר כי $\mathcal{Q}$ היא בעלת **טיפוס סופי**, אם מתקיים כי $M \in \mathcal{Q}$ אם ורק אם לכל $M_0 \subset M$ סופית, $M_0 \in \mathcal{Q}$.

כלומר, השתייכות של קבוצה M למשפחה $\mathcal{Q}$, שקולה לכך שכל תת קבוצה סופית שלה שייכת למשפחה $\mathcal{Q}$.

הגדרה: תהי $\mathcal{Q}$ משפחה של קבוצות. נאמר כי איבר $N \in \mathcal{Q}$ (כלומר N קבוצה) הוא **מקסימלי**, אם לא קיימת $M \in \mathcal{Q}$ המכילה את N.

הלמה של טייכמולר־טוקיי: תהי $\mathcal{S}$ קבוצה כלשהי. תהי $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ קבוצת תתי הקבוצות של $\mathcal{S}$. תהי $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$. כלומר, איברי $\mathcal{R}$ הם תת־קבוצות של $\mathcal{S}$.

אם $\mathcal{R}$ היא מטיפוס סופי, אז קיים ב־$\mathcal{R}$ איבר מקסימלי.

הערה: הלמה של טייכמולר־טוקיי שקולה ל**אקסיומת הבחירה**, הקובעת כך:

תהי $\mathcal{A}$ קבוצת אינדקסים כלשהי. תהי $\mathcal{Q} := \{Q_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ משפחה של קבוצות. אזי קיימת על $\mathcal{Q}$ **פונקציית בחירה**, כלומר פונקציה $\mathfrak{C} : \mathcal{A} \to \mathcal{Q}$ המקיימת $\mathfrak{C}(A) \in Q_A$ לכל $A \in \mathcal{A}$.

כלומר, הפונקציה $\mathfrak{C}$ **בוחרת** לכל אינדקס $A \in \mathcal{A}$ איבר כלשהו $\mathfrak{C}(A) \in Q_A$.

26.4.2 הוכחת משפט לינדנבאום

הוכחה: תהי T תאוריה עקבית בשפה L, ותהי L'/T' הרחבה שמרנית עם תכונת הנקין שלה. תהי $\mathcal{S}$ קבוצת כל הנוסחאות הסגורות שבשפה L'. נגדיר,

$$\mathcal{R} := \{M \subset \mathcal{S} \mid T' \cup M \text{ is consistent}\}$$

נתון כי T' עקבית ולכן $\emptyset \in \mathcal{R}$. לכן $\mathcal{R}$ לא ריקה.

למה: $\mathcal{R}$ מטיפוס סופי.

הוכחת הלמה: צריך להראות כי $M \in \mathcal{R}$ אם ורק אם לכל $M_0 \subset M$ סופית, $M_0 \in \mathcal{R}$.

(כיוון ראשון) אם $M \in \mathcal{R}$ אז $T' \cup M$ עקבית. לכן ברור שלכל $M_0 \subset M$ סופית בפרט $T' \cup M_0$ עקבית, כלומר $M_0 \in \mathcal{R}$.

(כיוון שני) תהי M המקיימת שלכל $M_0 \subset M$ סופית, $M_0 \in \mathcal{R}$. כלומר $T' \cup M_0$ עקבית לכל $M_0 \subset M$ סופית. נראה כי $M \in \mathcal{R}$, כלומר נראה כי $T' \cup M$ עקבית.

נניח בשלילה כי $M \notin \mathcal{R}$, כלומר $T' \cup M$ לא עקבית. לכן $T' \cup M \vdash A \wedge \neg A$ לאיזו נוסחה A. אבל כל סדרת היסק היא סופית, ולכן קיימת תת־קבוצה סופית $M_0 \subset M$, שעבורה $T' \cup M_0 \vdash A \wedge \neg A$, כלומר $T' \cup M_0$ לא עקבית ולכן $M_0 \notin \mathcal{R}$, בסתירה להנחה. מכאן כי $M \in \mathcal{R}$.

הראינו את שני כיווני השקילות, ולכן $\mathcal{R}$ מטיפוס סופי. ▲

אם כך, מהלמה של טייכמולר־טוקיי קיימת $N \in \mathcal{R}$ מקסימלית. כלומר, קיימת קבוצת נוסחאות סגורות $N \subset \mathcal{S}$, שאם מצרפים לתאוריה $T' \cup N$ איבר חדש כלשהו (נוסחה סגורה) היא מפסיקה להיות עקבית.

נראה כי $T'' := T' \cup N$ תאוריה שלמה בשפה L'. תהי $A \in \mathcal{S}$ (כלומר, A נוסחה סגורה בשפה L'), צריך להראות כי $T'' \vdash A$ או $T'' \vdash \neg A$.

נתבונן בתאוריה $T'' \cup \{\neg A\}$. אם $\neg A \in N$, אז $T'' \vdash \neg A$ וסיימנו. אז נניח $\neg A \notin N$. במקרה זה, ממקסימליות N נובע כי $T'' \cup \{\neg A\}$ לא עקבית ($T'' := T' \cup N$). כלומר, $T'' \cup \{\neg A\} \vdash B \wedge \neg B$ לאיזו נוסחה B. נתון כי $\neg A$ סגורה, ולכן ממשפט הדדוקציה $T'' \vdash \neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)$. נשים לב כי הנוסחה A היא גרירה טאוטולוגית של הנוסחה $\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)$,[32] לכן ממשפט פוסט, $T'' \vdash A$.

אם כך מצאנו כי עבור נוסחה סגורה שרירותית A, מתוך T'' ניתן להסיק את A או את $\neg A$, כלומר T'' תאוריה שלמה. ■

26.5 סיום הוכחת משפט השלמות

משפט: לכל תאוריה עקבית קיים מודל.

הוכחה: תהי T תאוריה עקבית בשפה L. צריך להראות שקיים מבנה $\mathcal{M}$ המקיים $\mathcal{M} \vDash T$.

תהי T'/L' הרחבה שמרנית של T/L, המקיימת את תכונת הנקין. תהי T''/L' הרחבה שלמה של T'/L'. הזכרנו לעיל כי T''/L' מקיימת את תכונת הנקין, והיא שלמה ועקבית, לכן המבנה הקנוני $\mathcal{M}$ הוא מודל שלה, כלומר $\mathcal{M} \vDash T''$. נשים לב כי $T' \subset T''$, ולכן בפרט $\mathcal{M} \vDash T'$. נראה כי $\mathcal{M} \vDash T$.

תהי A נוסחה המקיימת $T \vdash_L A$. מהיות T'/L' הרחבה שמרנית של T/L נובע כי $T' \vdash_{L'} A$, ולכן מההנחה $\mathcal{M} \vDash T'$ נובע ממשפט הנאותות כי $\mathcal{M} \vDash A$. כלומר, $\mathcal{M} \vDash T$, כנדרש. ■

26.6 מסקנה: משפט הקומפקטיות (לתחשיב היחסים)

משפט: תאוריה שלכל תת־קבוצה סופית שלה יש מודל, יש לה מודל.

הוכחה: תהי T תאוריה בשפה L, ונניח שלכל תת־קבוצה סופית $T_0 \subset T$ קיים מודל. נראה כי T עקבית, ולכן לפי משפט השלמות יש לה מודל.

נניח בשלילה כי T לא עקבית. לכן $T \vdash A \wedge \neg A$ עבור A נוסחה כלשהי. היות שכל סדרת היסק היא סופית, נובע שקיימת $T_0 \subset T$ כך שמתקיים $T_0 \vdash A \wedge \neg A$, כלומר T_0 לא עקבית, ולכן לא קיים מודל של T_0, בסתירה להנחה. ■

[32] שכן לכל הערכה ν המקיימת $\nu(\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)) = \mathbb{T}$, בהכרח $\nu(\neg A) = \mathbb{F}$, כלומר $\nu(A) = \mathbb{T}$.

חלק VII
תת־מודלים

27 תת־מבנה

הגדרה: יהי $\mathcal{M}$ מבנה בשפה L. נאמר כי $\mathcal{N}$ הוא **תת־מבנה** של $\mathcal{M}$, אם

1. $|\mathcal{N}| \subset |\mathcal{M}|$
2. הפירושים של $\mathcal{M}$ מתלכדים עם הפירושים של $\mathcal{N}$ על $|\mathcal{N}|$. כלומר,

(א) סמלי היחסים מתפרשים ב־$\mathcal{N}$ כמו ב־$\mathcal{M}$. כלומר, לכל P סמל יחס n־מקומי, לכל $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{N}| \subset |\mathcal{M}|$,

$$P^{\mathcal{N}}(a_1, ..., a_n) = P^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n)$$

(ב) סמלי הפונקציות מתפרשים ב־$\mathcal{N}$ כמו ב־$\mathcal{M}$. כלומר, לכל f סמל פונקציה n־מקומית, לכל $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{N}| \subset |\mathcal{M}|$, ראשית

$$f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n) \in |\mathcal{N}|$$

ומתקיים השוויון,

$$f^{\mathcal{N}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n)$$

למה: יהי $\mathcal{M}$ מבנה ויהי $\mathcal{N}$ תת־מבנה שלו. לכל השמה $\tau : Var \to |\mathcal{N}|$, לכל שם עצם u,

$$\tilde{\tau}^{\mathcal{N}}(u) = \tilde{\tau}^{\mathcal{M}}(u)$$

כלומר, ההרחבות של ההשמה לשמות עצם על המבנה $\mathcal{M}$ ועל המבנה $\mathcal{N}$, מזדהות.

הוכחה: באינדוקציה על סדרת היצירה של שם העצם u.

נניח $u = x$ משתנה. אזי,

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}^{\mathcal{N}}(u) &= \tilde{\tau}^{\mathcal{N}}(x) \\
&= \tau^{\mathcal{N}}(x) \\
&= \tau^{\mathcal{M}}(x) \\
&= \tilde{\tau}^{\mathcal{M}}(x) \\
&= \tilde{\tau}^{\mathcal{M}}(u)
\end{aligned}$$

נניח $u=f\left(v_1,...,v_m\right)$. אזי,

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^{\mathcal{N}}\left(u\right) &= \tilde{\tau}^{\mathcal{N}}\left(f\left(v_1,...,v_m\right)\right)\\ &= f^{\mathcal{N}}\left(\tilde{\tau}^{\mathcal{N}}\left(v_1\right),...,\tilde{\tau}^{\mathcal{N}}\left(v_m\right)\right)\\ &= f^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\tau}^{\mathcal{M}}\left(v_1\right),...,\tilde{\tau}^{\mathcal{M}}\left(v_m\right)\right)\\ &= \tilde{\tau}^{\mathcal{M}}\left(f\left(v_1,...,v_m\right)\right)\\ &= \tilde{\tau}^{\mathcal{M}}\left(u\right)\end{aligned}$$

כאשר השוויון האמצעי הוא מהיות $\mathcal{N}$ תת־מבנה של $\mathcal{M}$. ■

למה: יהי $\mathcal{M}$ מבנה ויהי $\mathcal{N}$ תת־מבנה שלו. לכל השמה $\tau:Var\to|\mathcal{N}|$, לכל נוסחה <u>חסרת כמתים</u> A,

$$\overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(A\right)=\overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(A\right)$$

כלומר, ההרחבות של ההשמה לנוסחאות על המבנה $\mathcal{M}$ ועל המבנה $\mathcal{N}$, מזדהות.

הוכחה: באינדוקציה על סדרת היצירה של הנוסחה A.

נניח $A=P\left(u_1,...,u_n\right)$. אזי לפי הלמה הקודמת,

$$\begin{aligned}\overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(A\right) &= \overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(P\left(u_1,...,u_n\right)\right)\\ &= P^{\mathcal{N}}\left(\tilde{\tau}^{\mathcal{N}}\left(u_1\right),...,\tilde{\tau}^{\mathcal{N}}\left(u_n\right)\right)\\ &= P^{\mathcal{N}}\left(\tilde{\tau}^{\mathcal{M}}\left(u_1\right),...,\tilde{\tau}^{\mathcal{M}}\left(u_n\right)\right)\\ &= P^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\tau}^{\mathcal{M}}\left(u_1\right),...,\tilde{\tau}^{\mathcal{M}}\left(u_n\right)\right)\\ &= \overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(P\left(u_1,...,u_n\right)\right)\\ &= \overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(A\right)\end{aligned}$$

נניח $A=B\vee C$. אזי מהנחת האינדוקציה,

$$\begin{aligned}\overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(A\right) &= \overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(B\vee C\right)\\ &= \overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(B\right)\vee\overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(C\right)\\ &= \overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(B\right)\vee\overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(C\right)\\ &= \overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(B\vee C\right)\\ &= \overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(A\right)\end{aligned}$$

נניח $A=\neg B$. אזי מהנחת האינדוקציה,

$$\begin{aligned}\overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(A\right) &= \overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(\neg B\right)\\ &= \neg\overline{\tau}^{\mathcal{N}}\left(B\right)\\ &= \neg\overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(B\right)\\ &= \overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(\neg B\right)\\ &= \overline{\tau}^{\mathcal{M}}\left(A\right)\end{aligned}$$

נשים לב כי A חסרת כמתים, לכן אין צורך לבדוק עבור הצורה $A=\left(\exists x\right)B$.[33] ■

[33] ואכן לנוסחאות בעלות כמתים משפט זה כלל אינו נכון.

טענה: תהי T_0 קבוצת נוסחאות חסרות כמתים. יהי $\mathcal{M}_0$ מבנה ויהי $\mathcal{N}_0$ תת־מבנה. אם $\mathcal{N}_0 \vDash T_0$ אז גם $\mathcal{M}_0 \vDash T_0$.

הוכחה: תהי $A \in T_0$, נרצה להראות כי $\mathcal{N}_0 \vDash A$. מהנתון כי $\mathcal{M}_0 \vDash T_0$ נובע כי $\mathcal{M}_0 \vDash A$. כלומר, לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}_0|$, $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$.

תהי השמה $\tau : Var \to |\mathcal{N}_0| \subset |\mathcal{M}_0|$ כלשהי. נשים לב כי τ היא השמה גם של $\mathcal{N}_0$ וגם של $\mathcal{M}_0$. לכן $\overline{\tau}^{\mathcal{N}_0}(A) = \overline{\tau}^{\mathcal{M}_0}(A) = \mathbb{T}$.

קיבלנו שלכל השמה $\tau : Var \to |\mathcal{N}_0|$, $\overline{\tau}(A) = \mathbb{T}$. כלומר $\mathcal{N}_0 \vDash A$, כנדרש. ■

28 משפט טרסקי־לוס

משפט טרסקי־לוס: תהי T תאוריה בשפה L. נניח כי T היא בעלת התכונה הבאה: לכל מודל $\mathcal{M} \vDash T$, לכל $\mathcal{N}$ תת־מבנה של $\mathcal{M}$, מתקיים $\mathcal{N} \vDash T$.

נגדיר

$$T_0 := \{A \mid A \text{ is without quantifiers, and } T \vdash A\}$$

אזי

$$T_0 \vdash T$$

כלומר, $T_0 \vdash B$ לכל $B \in T$.

במילים אחרות, T, T_0 תאוריות שקולות (כלומר, כל נוסחה שיסיקה מאחת, יסיקה מהאחרת).

הוכחה: נשים לב כי אם כל מודל של T_0 הוא גם מודל של T, אז ממשפט השלמות נובע שכל נוסחה של T יסיקה מתוך T_0.[34] אם כך מספיק להראות שכל מודל של T_0 הוא מודל של T. כלומר מספיק להראות כי אם $\mathcal{M} \vDash T_0$ אז $\mathcal{M} \vDash T$.

יהי $\mathcal{M} \vDash T_0$. נראה שקיים מודל של T, שעבורו $\mathcal{M}$ תת־מבנה שלו, ומההנחה שבמשפט ינבע כי $\mathcal{M} \vDash T$, כנדרש.

תחילה נרחיב את השפה, על ידי כך שלכל $a \in |\mathcal{M}|$ נוסיף סמל קבוע חדש וייחודי e_a. נקבל שפה חדשה,

$$L(\mathcal{M}) = L \cup \{e_a \mid a \in |\mathcal{M}|\}$$

כעת נרחיב את $\mathcal{M}$ להיות מבנה מעל לשפה החדשה $L(\mathcal{M})$, על ידי הגדרת הפירושים של הקבועים החדשים,

$$e_a^{\mathcal{M}} := a$$

נגדיר את התאוריה

$$\mathcal{D}_{\mathcal{M}} := \left\{A \mid A \text{ is without quantifiers and closed in } L(\mathcal{M}),\ \text{s.t. } \mathcal{M} \vDash_{L(\mathcal{M})} A\right\}$$

כלומר, $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ כוללת את כל הנוסחאות שהן חסרות כמתים וגם ללא משתנים חופשיים ($\mathcal{D}$ בשביל דיאגרמה. תאוריה זו מכונה בדרך כלל **הדיאגרמה של** $\mathcal{M}$).

[34] כי אם $B \in T$ אז כל מודל של T מספק אותה. אבל כל כל מודל של T_0 הוא מודל של T, ולכן כל מודל של T_0 מספק אותה. לכן לפי משפט השלמות $T_0 \vdash B$.

טענה 1: אם $\mathcal{N}$ מבנה בשפה $L(\mathcal{M})$ המקיים $\mathcal{N} \vDash \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, אז יש תת־מבנה של $\mathcal{N}$ שאיזומורפי ל־$\mathcal{M}$.

הוכחה: נגדיר העתקה $f : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ על ידי $f(a) = e_a^{\mathcal{N}} \in |\mathcal{N}|$.

- תחילה נראה כי f חח"ע.

יהיו $a, b \in |\mathcal{M}|$ שונים זה מזה. נשים לב כי $\neg(e_a \approx e_b) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, כי זו נוסחה בשפה $L(\mathcal{M})$, חסרת כמתים וסגורה, וכמו כן $\mathcal{M} \vDash \neg(e_a \approx e_b)$, שכן לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(\neg(e_a \approx e_b)) &= \neg\overline{\sigma}(e_a \approx e_b)\\ &= \neg(\tilde{\sigma}(e_a) = \tilde{\sigma}(e_b))\\ &= \neg\left(e_a^{\mathcal{M}} = e_b^{\mathcal{M}}\right)\\ &= \neg(a = b)\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

כעת, הנחנו כי $\mathcal{N} \vDash \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, ולכן לכל השמה $\tau : Var \to |\mathcal{N}|$,

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &= \overline{\tau}(\neg(e_a \approx e_b))\\ &= \neg\overline{\tau}(e_a \approx e_b)\\ &= \neg(\tilde{\tau}(e_a) = \tilde{\tau}(e_b))\\ &= \neg\left(e_a^{\mathcal{N}} = e_b^{\mathcal{N}}\right)\\ &= \neg(f(a) = f(b))\end{aligned}$$

וקיבלנו כי f חח"ע.

- כעת נראה כי המבנה $f(\mathcal{M})$ שקבוצת המבנה שלו היא $f(|\mathcal{M}|)$, מהווה תת־מבנה. ברור כי $f(|\mathcal{M}|) \subset |\mathcal{N}|$, אם כך נותר להגדיר את פירושי סמלי הפונקציות והיחסים בתוך $f(\mathcal{M})$, ולהראות כי הם מתלכדים כאשר מצמצמים את $|\mathcal{N}|$ לתוך $f(|\mathcal{M}|)$.
  - בהינתן סמל פונקציה n־מקומי g, לכל $a_1, ..., a_n \in f(|\mathcal{M}|)$ נגדיר,

$$g^{f(\mathcal{M})}(a_1, ..., a_n) := f\left(g^{\mathcal{M}}\left(f^{-1}(a_1), ..., f^{-1}(a_n)\right)\right)$$

נזכור כי f חח"ע ולכן זה מוגדר היטב, וכמו כן ברור כי פירוש זה הוא בתוך $f(|\mathcal{M}|)$. כעת צריך להראות כי,

$$g^{f(\mathcal{M})}(a_1, ..., a_n) = g^{\mathcal{N}}(a_1, ..., a_n)$$

נסמן $a_0 := g^{\mathcal{M}}\left(f^{-1}(a_1), ..., f^{-1}(a_n)\right) \in |\mathcal{M}|$, ונשים לב כי $e_{a_0} \approx g\left(e_{f^{-1}(a_1)}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}\right) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, שכן לכל השמה $\sigma : Var \to |\mathcal{M}|$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}\left(e_{a_0} \approx g\left(e_{f^{-1}(a_1)}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}\right)\right) &= \overline{\sigma}(e_{a_0}) = \overline{\sigma}\left(g\left(e_{f^{-1}(a_1)}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}\right)\right)\\ &= e_{a_0}^{\mathcal{M}} = g^{\mathcal{M}}\left(e_{f^{-1}(a_1)}^{\mathcal{M}}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}^{\mathcal{M}}\right)\\ &= a_0 = g^{\mathcal{M}}\left(f^{-1}(a_1), ..., f^{-1}(a_n)\right)\\ &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

אבל $\mathcal{N} \vDash \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, ולכן נובע כי $\mathcal{N} \vDash e_{a_0} \approx g\left(e_{f^{-1}(a_1)}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}\right)$,
כלומר לכל השמה $\tau : Var \to |\mathcal{N}|$,

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \overline{\tau}\left(e_{a_0} \approx g\left(e_{f^{-1}(a_1)}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}\right)\right) \\ &= \overline{\tau}\left(e_{a_0}\right) = \overline{\tau}\left(g\left(e_{f^{-1}(a_1)}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}\right)\right) \\ &= e_{a_0}^{\mathcal{N}} = g^{\mathcal{N}}\left(e_{f^{-1}(a_1)}^{\mathcal{N}}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}^{\mathcal{N}}\right) \\ &= f\left(a_0\right) = g^{\mathcal{N}}\left(a_1, ..., a_n\right) \\ &= f\left(g^{\mathcal{M}}\left(f^{-1}\left(a_1\right), ..., f^{-1}\left(a_n\right)\right)\right) = g^{\mathcal{N}}\left(a_1, ..., a_n\right) \end{aligned}$$

כנדרש.

– בהינתן סמל יחס n־מקומי P, לכל $a_1, ..., a_n \in f\left(|\mathcal{M}|\right)$ נגדיר,

$$P^{f(\mathcal{M})}\left(a_1, ..., a_n\right) = P^{\mathcal{M}}\left(f^{-1}\left(a_1\right), ..., f^{-1}\left(a_n\right)\right)$$

כעת צריך להראות כי אם $P^{f(\mathcal{M})}\left(a_1, ..., a_n\right) = \mathbb{T}$ אז $P^{\mathcal{N}}\left(a_1, ..., a_n\right) = \mathbb{T}$.
אם $P^{f(\mathcal{M})}\left(a_1, ..., a_n\right) = \mathbb{T}$, באותו אופן שראינו לעיל מתקיים כי,

$$P\left(e_{f^{-1}(a_1)}, ..., e_{f^{-1}(a_n)}\right) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$$

ולכן $\mathcal{N} \vDash P\left(e_{u_1}, ..., e_{u_n}\right)$, וחישוב ערך השמה שרירותית לתוך $\mathcal{N}$ יראה כי $P^{\mathcal{N}}\left(a_1, ..., a_n\right) = \mathbb{T}$. ▲

טענה 2: התאוריה $T \cup \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ עקבית.

הוכחה: נניח בשלילה כי $T \cup \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \vdash A \wedge \neg A$. מסופיות סדרת ההיסק, קיימות $B_1, ..., B_m \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ כך שמתקיים $T \cup \{B_1, ..., B_m\} \vdash_{L(\mathcal{M})} A \wedge \neg A$.
מההנחה כי $B_1, ..., B_m \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ נובע כי הן סגורות, ולכן ניתן להשתמש במשפט הדדוקציה ולקבל כי,

$$T \vdash_{L(\mathcal{M})} B_1 \to ... \to B_m \to A \wedge \neg A$$

נשים לב כי נוסחה זו גוררת טאוטולוגית את $(\neg B_1) \vee ... \vee (\neg B_m)$, ולכן ממשפט פוסט,

$$T \vdash_{L(\mathcal{M})} (\neg B_1) \vee ... \vee (\neg B_m)$$

נשכתב את $(\neg B_1) \vee ... \vee (\neg B_m)$, ונחליף את כל הקבועים החדשים e_a של השפה $L(\mathcal{M})$ המופיעים בהם במשתנים חדשים (נאמר y_a). נניח שמהשכתוב מתקבלות הנוסחאות $B_1', ..., B_m'$, אז על ידי משפט הקבועים,

$$T \vdash (\neg B_1') \vee ... \vee (\neg B_m')$$

נשים לב כי זו בפרט נוסחה חסרת כמתים ולכן מהגדרת T_0,

$$(\neg B_1') \vee ... \vee (\neg B_m') \in T_0$$

נציב בחזרה את e_a במקום y_a ונקבל את הנוסחאות הקודמות, וממשפט הקבועים,

$$T_0 \vdash_{L(\mathcal{M})} (\neg B_1) \vee ... \vee (\neg B_m)$$

אבל $\mathcal{M} \vDash T_0$, ולכן ממשפט הנאותות,

$$\mathcal{M} \vDash (\neg B_1) \vee ... \vee (\neg B_m)$$

אבל $B_1, ..., B_m \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, ולכן $\mathcal{M} \vDash B_1, ..., B_m$, וקיבלנו סתירה. לכן בהכרח $T \cup \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ עקבית. ▲

סיום הוכחת המשפט: מטענה 2 נובע שמעקביות $T \cup \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ קיים מודל $\mathcal{L}' \vDash T \cup \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$. מטענה 1 נובע כי $\mathcal{L}'$ מכיל תת־מבנה $f(\mathcal{M})$ איזומורפי לתת־מבנה $\mathcal{M}$.

נגדיר מבנה $\mathcal{L}$ להיות בדיוק $\mathcal{L}'$, למעט זה שנחליף בו את התת־מבנה $f(\mathcal{M})$ בתת־מבנה $\mathcal{M}$. כלומר, $\mathcal{M}$ הוא תת־מבנה של המודל $\mathcal{L}$.

מהתכונה של T שהנחנו במשפט, מתוך ההנחה $\mathcal{L} \vDash T$ וכן $\mathcal{M}$ תת־מודל של $\mathcal{L}$ נובע כי $\mathcal{M} \vDash T$, וזה מספיק כפי שהסברנו בראשית ההוכחה. ■

חלק VIII
נספחים

29 נספח 1: אקסיומות פיאנו

מבוא: כדי לתאר את המספרים הטבעיים עם התכונות שלהם המוכרות לנו, נציג מערכת אקסיומטית שממנה נובעות התכונות הללו.

הגדרה: נתבונן בשפה $L=(0,S,\cdot,+)$, כאשר 0 סמל קבוע, S סמל פונקציה חד־מקומית, $\cdot,+$ סמל פונקציות דו־מקומיות. **אקסיומות פיאנו** AP הן מערכת הנוסחאות הבאה,

1. $\neg(S(x)\approx 0)$ (0 אינו עוקב)
2. $(S(x_1)\approx S(x_2))\to(x_1\approx x_2)$ (פונקציית העוקב S חח"ע)
3. $x+0\approx x$ (0 אדיש לחיבור)
4. $S(x_1+x_2)\approx x_1+S(x_2)$
5. $x_1\cdot 0\approx 0$
6. $x_1\cdot S(x_2)\approx x_1\cdot x_2+x_1$ (פילוג)
7. לכל נוסחה φ בשפה L,

$$\varphi_x[0]\wedge((\forall x)(\varphi\to\varphi_x[S(x)]))\to(\forall x)\varphi$$

(אקסיומת האינדוקציה)

ניתן להראות כי הפירוש של התאוריה AP על ידי מבנה המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ עם החיבור והכפל המוכרים, מאפשר להסיק מתוך AP את כל התכונות המוכרות של המספרים הטבעיים. כלומר, מערכת זו מספיקה כדי לתאר מודל של המספרים הטבעיים שהיינו מעוניינים בו.

כך למשל $AP\vdash(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1+x_2\approx x_2+x_1)$ (קומוטטיביות).

30 נספח 2: מורפיזמים ושקילות אלמנטרית

הגדרה: יהיו $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ מבנים בשפה. נאמר כי הם **שקולים אלמנטרית**, ונסמן $\mathcal{M}_1\equiv\mathcal{M}_2$, אם לכל נוסחה φ שאין בה משתנים חופשיים (כלומר, הופעות כל המשתנים בה קשורות בכמת),

$$\mathcal{M}_1\vDash\varphi\iff\mathcal{M}_2\vDash\varphi$$

דוגמה: נתבונן בשפה $L=(\cdot,1)$, ובמבנה $\mathcal{M}_1=\mathbb{C}$ המפרש את $\cdot$ ככפל של מספרים מרוכבים ואת 1 כאיבר היחידה המרוכב, ובמבנה $\mathcal{M}_2=M_2(\mathbb{C})$ (אוסף המטריצות 2×2 מעל המרוכבים) המפרש את $\cdot$ ככפל מטריצות ואת 1 כמטריצת היחידה 2×2. מבנים אלו <u>אינם</u> שקולים אלמנטרים, היות שהנוסחה

$$\varphi=(\forall x)(\forall y)((x\cdot y\approx y\cdot x))$$

מסופקת על ידי $\mathcal{M}_1$ אבל לא על ידי $\mathcal{M}_2$.

דוגמה: נתבונן בשפה $L=(\cdot,1)$, ובמבנה $\mathcal{M}_1=(\mathbb{R}^+,\cdot)$ המכיל את המספרים הממשיים האי־שליליים ומפרש את $\cdot$ ככפל של מספרים ממשיים, ובמבנה $\mathcal{M}_2=(\mathbb{R},+)$ המכיל את כל המספרים הממשיים ומפרש את $+$ כחיבור של מספרים ממשיים.

מבנים אלו שקולים אלמנטרית, כי ניתן להגדיר העתקה $e:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$ על ידי

$$x\mapsto e^x$$

והיא מהווה **איזומורפיזם** של המבנים הללו. מיד נגדיר מהו איזומורפיזם, וניתן להוכיח כי אם קיים איזומורפיזם אז המבנים שקולים אלמנטרית.

הגדרה: אם $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ מבנים בשפה, אומרים כי העתקה $h:|\mathcal{M}_1|\to|\mathcal{M}_2|$ היא **הומומורפיזם**, אם

1. לכל סמל פונקציה n־מקומי f ולכל $a_1,...,a_n\in|\mathcal{M}_1|$,

$$h\left(f^{\mathcal{M}_1}(a_1,...,a_n)\right)=f^{\mathcal{M}_2}(h(a_1),...,h(a_n))$$

2. לכל סמל יחס n־מקומי R ולכל $a_1,...,a_n\in|\mathcal{M}_1|$, אם

$$R^{\mathcal{M}_1}(a_1,...,a_n)=\mathbb{T}$$

אז

$$R^{\mathcal{M}_2}(h(a_1),...,h(a_n))=\mathbb{T}$$

הגדרה: הומומורפיזם חד־חד־ערכי ועל, המקיים את דרישה 2 גם בכיוון ההפוך, נקרא **איזומורפיזם**.

משפט: אם $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ מבנים איזומורפיים (כלומר שקיים איזומורפיזם ביניהם), אז הם שקולים אלמנטרית.

הערה: בכיוון השני הטענה לא נכונה. כלומר יש מבנים שקולים אלמנטרית שאין איזומורפיזם ביניהם.

למשל $(\mathbb{Q},<)\equiv(\mathbb{R},<)$ (לא פשוט להראות את זה), על אף שאין אף פונקציה חח"ע ועל ביניהם (משיקולי עוצמות).

הוכחת המשפט המלאה מושארת כתרגיל (באינדוקציה), אך נראה טענת עזר שתוכיח את בסיס האינדוקציה (גם הוכחה זו תהיה באינדוקציה).

טענת עזר: אם $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ מבנים איזומורפיים על ידי איזומורפיזם $h:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$, אז לכל השמה $\sigma:Var\to\mathcal{M}_1$,

$$\widetilde{h\circ\sigma}=h\circ\tilde{\sigma}$$

כלומר, לכל שם עצם u,

$$\widetilde{h\circ\sigma}(u)=h\circ\tilde{\sigma}(u)=h(\tilde{\sigma}(u))$$

כמו כן,

$$\overline{h \circ \sigma} = \pi \circ \overline{\sigma}$$

כלומר, לכל נוסחה A,

$$\overline{h \circ \sigma}\,(A) = h \circ \overline{\sigma}\,(A) = h\left(\overline{\sigma}\,(A)\right)$$

הערה: נשים לב כי $h \circ \sigma$ היא השמה מהצורה $h \circ \sigma : Var \to \mathcal{M}_2$.

הוכחת טענת העזר: נראה זאת באינדוקציה מבנית. אם u הוא משתנה, אז מהגדרה של ההשמה $\tilde{\sigma}\,(u) = \sigma\,(u)$, ולכן

$$\begin{aligned}
\widetilde{h \circ \sigma}\,(u) &= h \circ \sigma\,(u) \\
&= h\left(\sigma\,(u)\right) \\
&= h\left(\tilde{\sigma}\,(u)\right) \\
&= h \circ \tilde{\sigma}\,(u)
\end{aligned}$$

נניח כי $u = f\,(u_1, ..., u_n)$ עבור f סמל פונקציה n־מקומית ועבור $u_1, ..., u_n$ שמות עצם, ונניח באינדוקציה כי הטענה נכונה עבור $u_1, ..., u_n$. אזי,

$$\begin{aligned}
\widetilde{h \circ \sigma}\,(u) &= \widetilde{h \circ \sigma}\left(f\,(u_1, ..., u_n)\right) \\
&= f^{\mathcal{M}_2}\left(\widetilde{h \circ \sigma}\,(u_1), ..., \widetilde{h \circ \sigma}\,(u_n)\right) \\
&= f^{\mathcal{M}_2}\left(h\left(\tilde{\sigma}\,(u_1)\right), ..., h\left(\tilde{\sigma}\,(u_n)\right)\right) \\
&= h\left(f^{\mathcal{M}_1}\left(\tilde{\sigma}\,(u_1), ..., \tilde{\sigma}\,(u_n)\right)\right) \\
&= h\left(\tilde{\sigma}\left(f\,(u_1, ..., u_n)\right)\right) \\
&= h\left(\tilde{\sigma}\,(u)\right) \\
&= h \circ \tilde{\sigma}\,(u)
\end{aligned}$$

כאשר השוויון השלישי הוא מהנחת האינדוקציה, והשוויון הרביעי הוא מהיות h הומומורפיזם.

את הטענה עבור נוסחאות ניתן להסיק באופן דומה, באינדוקציה על סדרת היצירה של הנוסחה. ■

30.1 משחקי Ehrenfeucht-Fraisse

הגדרה: תהי L שפה בה רק סמלי יחס. יהיו $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_1$ מבנים בשפה L.

לכל n טבעי, נתאר **משחק** $EF^n_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$ בין שני שחקנים, המכריע האם המבנים הללו שקולים אלמנטרית.

השחקן הראשון ייקרא "המאתגר" והשחקן השני "העונה", והם משחקים n שלבים.

בשלב הראשון המאתגר בוחר איבר באחת מקבוצות המבנה, והעונה בוחר בתגובה איבר בקבוצת המבנה האחרת. בשלב הבא שוב המאתגר בוחר איבר באחת מקבוצות המבנה (אולי שונה מהראשונה), והעונה בוחר בתגובה איבר בקבוצת המבנה האחרת.

כך ממשיכים n שלבים, ולבסוף מתקבלות שתי קבוצות $a_1,...,a_n \in |\mathcal{M}_1|$, $b_1,...,b_n \in$ $|\mathcal{M}_2|$ (כאשר כל a_i וכל b_i יכולים להיבחר על ידי כל אחד מהשחקנים).

נכריז על **ניצחון** במשחק, אם לכל $0 \le k \le n$, לכל סמל יחס k-מקומי R, ולכל $b_{i_1},...,b_{i_k} \in \{b_1,...,b_n\}$, $a_{i_1},...,a_{i_k} \{a_1,...,a_n\}$,

$$R^{\mathcal{M}_1}(a_{i_1},...,a_{i_k}) = R^{\mathcal{M}_2}(b_{i_1},...,b_{i_k})$$

טענה: אם קיימת אסטרטגיית ניצחון במשחק $EF^n_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$ לכל n טבעי, אזי $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$.

הערה: גם הכיוון השני של הטענה נכון, במצב בו מספר סמלי היחס הוא סופי.

הוכחה: תהי B נוסחה סגורה המקיימת $\mathcal{M}_1 \vDash B$. צריך להראות כי $\mathcal{M}_2 \vDash B$.

ממשפט הקידומת נובע כי $B \leftrightarrow (Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_mx_m)A$ לאיזו נוסחה כנ"ל בצורת הקידומת, אז נסתכל על הנוסחה השקולה בצורת הקידומת. מההנחה בטענה נובע שיש אסטרטגיית ניצחון במשחק $EF^m_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$.

כעת, עבור הכמת Q_1,

- אם $Q_1 = \exists$, מההנחה $\mathcal{M}_1 \vDash (Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_mx_m)A$ נובע שקיים $a_1 \in |\mathcal{M}_1|$ שעבורו

$$\mathcal{M}_1 \vDash (Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_mx_m)A_{x_1}[a_1]$$

ולכן

$$\mathcal{M}_1 \vDash (Q_2x_2)...(Q_mx_m)A_{x_1}[a_1]$$

תהי $b_1 \in |\mathcal{M}_2|$ התשובה המנצחת של העונה לאתגר $a_1 \in |\mathcal{M}_1|$.

- אם $Q_1 = \forall$, אז יהי $b_1 \in |\mathcal{M}_2|$ איבר כלשהו, ותהי $a_1 \in |\mathcal{M}_1|$ התשובה של העונה לאתגר $b_1 \in |\mathcal{M}_2|$. נשים לב כי,

$$\mathcal{M}_1 \vDash (Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_mx_m)A_{x_1}[a_1]$$

ולכן

$$\mathcal{M}_1 \vDash (Q_2x_2)...(Q_mx_m)A_{x_1}[a_1]$$

נחזור על התהליך עבור הכמתים $Q_2,...,Q_m$ עד שניפטר מכולם ונקבל כי

$$\mathcal{M}_1 \vDash A_{x_1,x_2,...,x_m}[a_1,a_2,...,a_m]$$

מההנחה שהבחירות נעשו בהתאם לאסטרטגיית ניצחון, נובע מכך כי

$$\mathcal{M}_2 \vDash A_{x_1,x_2,...,x_m}[b_1,b_2,...,b_m]$$

באותה צורה, בהינתן B נוסחה סגורה המקיימת $\mathcal{M}_2 \vDash B$ ניתן להראות $\mathcal{M}_1 \vDash B$.
לכן בסך הכל נקבל $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$. ■

31 נספח 3: משפט לובנהיים־סקולם, ופרדוקס סקולם

משפט לובנהיים־סקולם: תהי T תאוריה עקבית בשפה L, ונניח כי L בעלת סיגנטורה לכל היותר בת־מניה.

אזי קיים $\mathcal{M}$ מודל של T, כך שקבוצת המבנה של המודל, $|\mathcal{M}|$, היא לכל היותר בת־מניה.

(לא נוכיח משפט זה).

הפרדוקס של סקולם: תהי ST התאוריה של תורת הקבוצות מעל לשפה $L = (\in)$, כאשר $\in$ סמל יחס דו־מקומי, המתפרש כסמל השייכות המוכר בקבוצות.

אם ST תאוריה עקבית, אז ממשפט השלמות קיים לה מודל $\mathcal{M}$, וממשפט לובנהיים־סקולם ניתן להניח כי קבוצת המבנה $|\mathcal{M}|$ היא לכל היותר בת־מניה.

נשים לב כי אחת מאקסיומות תורת הקבוצות קובעת כי איבר של קבוצה הוא קבוצה בעצמו, ולכן לא תיתכן שקיים קבוצה שעוצמתה גדולה מבת־מניה (אחרת כל איבריה היו שייכים לקבוצת המבנה, לפי האקסיומה הנ"ל).

מצד שני, ממשפט קנטור הידוע בתורת הקבוצות,[35] קיימת קבוצה שאינה בת־מניה. לכאורה בסתירה למשפט לובנהיים־סקולם.

הסיבה לכך שזהו רק פרדוקס ולא סתירה לוגית, היא שמשפט קנטור עוסק בעוצמות, ומונחים אלו מוגדרים על ידי פונקציות מסוימות, ופונקציות אלה אינן בהכרח חלק מהמודל בן המניה של לובנהיים־סקולם. כלומר, מושג העוצמה מוגדר רק יחסית למבנה ולא באופן כללי לכל מודל.

[35] משפט קנטור קובע בפרט כי עוצמת $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ גדולה ממש מעוצמת $\mathbb{N}$, כלומר היא גדולה מבת־מניה.