סיכום אינפי 1 – קורס 80131

הסיכום מבוסס על הרצאות של פרופ' צליל סלע באוניברסיטה העברית, בשנת הלימודים 2012-13.

אני רוצה להודות לכל הסטודנטים ששלחו תיקונים והגהות ועזרו בכתיבת הסיכום, שבלעדיהם הוא היה מכיל הרבה יותר שגיאות.

עם זאת חשוב לדעת שהסיכום אינו מוגה באופן מסודר ושהוא לא עבר אישור של פרופ' סלע.

נחי א.

nachman.avraham@mail.huji.ac.il

תוכן עניינים:

יחידה 1 - המספרים הממשיים

- **שדה**

קבוצה נקראת שדה, כאשר פעולות "חיבור" ו"כפל" מוגדרות בה, ומתקיימים הכללים הבאים:

1. עבור פעולת החיבור:
   a. אם $a,b\in F$, אז קיים $c\in F$ יחיד, כך שמתקיים $a+b=c$
   b. קומוטטיביות (חילופיות): לכל $a,b\in F$ מתקיים $a+b=b+a$
   c. אסוציאטיביות (קיבוציות): לכל $a,b,c\in F$ מתקיים $(a+b)+c=a+(b+c)$
   d. קיום איבר האפס: קיים איבר 0_F, כך שלכל $a\in F$ מתקיים $a+0_F=a$
   e. קיום איבר נגדי: לכל $a\in F$ קיים איבר $-a\in F$, כך שמתקיים $a+(-a)=0_F$
2. עבור פעולת הכפל:
   a. לכל $a,b\in F$ קיים איבר $c\in F$ יחיד, כך שמתקיים $ab=c$
   b. קומוטטיביות: לכל $a,b\in F$ מתקיים $ab=ba$
   c. אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in F$ מתקיים $(ab)c=a(bc)$
   d. קיום איבר היחידה: קיים איבר $1_F\in F$, כך שלכל $a\in F$ מתקיים $a\cdot 1_F=a$
   e. קיום איבר הופכי: אם $a\in F$, $a\neq 0$, אז קיים איבר $a^{-1}\in F$, כך שמתקיים $aa^{-1}=1_F$
3. דיסטריבוטיביות: לכל $a,b,c\in F$ מתקיים $a(b+c)=ab+ac$

- <u>טענה</u>: האיבר הנייטרלי לחיבור הוא יחיד.

- <u>הוכחה</u>: נניח שקיימים שני איברים נייטרליים לחיבור, 0_1 , 0_2.

$0_1=0_1+0_2=0_2+0_1=0_2$. נסיק כי $0_1=0_2$, משמע האיבר הנייטרלי יחיד.

- <u>טענה</u>: האיבר הנגדי הוא יחיד.

- <u>הוכחה</u>: נניח שקיימים עבור a כלשהו שני איברים נגדיים, α_1 , α_2.

$$\alpha_1=\alpha_1+0=\alpha_1+(a+\alpha_2)=(\alpha_1+a)+\alpha_2=(a+\alpha_1)+\alpha_2=0+\alpha_2=\alpha_2$$

נסיק כי $\alpha_1=\alpha_2$, משמע האיבר הנגדי לחיבור יחיד.

- **<u>תכונות של שדות</u>**

עבור כל x, y, a, b ששייכים לשדה מתקיימות התכונות הבאות:

i. $x_1 + y = x_2 + y \Rightarrow x_1 = x_2$

ii. $x \cdot 0 = 0$

iii. אם $a \neq 0$ אזי למשוואה $ax + b = 0$ יש פתרון יחיד.

iv. $-(x+y) = (-x) + (-y)$

v. אם $x, y \neq 0$ אזי $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

vi. אם $x \neq 0$ אזי $-(-x) = x$

vii. אם $x \neq 0$ אזי $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$

<u>הוכחות:</u>

i.
$$x_1 + y = x_2 + y \Rightarrow (x_1 + y) + (-y) = (x_2 + y) + (-y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 + (y + (-y)) = x_2 + (y + (-y)) \Rightarrow x_1 + 0 = x_2 + 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ii. מההגדרה מתקיים $0 + 0 = 0$, ולכן $x \cdot 0 = x(0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$.

מטענה i ניתן להסיק $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0$

iii. מכיוון שנתון $a \neq 0$, ניתן לבטא:
$$ax + b + (-b) = 0 + (-b) \Rightarrow ax = -b \Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}(-b) \Rightarrow x = a^{-1}(-b)$$

אם כן מצאנו שאם למשוואה יש פתרון, הרי שהוא $a^{-1}(-b)$. נציב ונוודא שאכן הפתרון פותר כל משוואה: $ax + b = 0 \Rightarrow aa^{-1}(-b) + b = 0 \Rightarrow 1 \cdot (-b) + b = 0 \Rightarrow -b + b = 0$

iv. מהגדרת הנגדי נובע כי $-(x+y) + (x+y) = 0$. נוכיח כי גם $(-x)+(-y)+(x+y)=0$, ומיחידות הנגדי ינבע כי $(-x) + (-y) = -(x+y)$:
$$(-x) + (-y) + (x+y) = (-x) + x + (-y) + y = 0 + 0 = 0$$

v. $x, y \neq 0$. מהגדרת ההופכי נובע כי $\left(xx^{-1}\right)\left(yy^{-1}\right) = 1 \cdot 1 = 1$, וגם $(xy)(xy)^{-1} = 1$.

נציב:
$$\left(xx^{-1}\right)\left(yy^{-1}\right) = (xy)(xy)^{-1} \Rightarrow \left(x^{-1}x\right)\left(yy^{-1}\right) = (xy)(xy)^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^{-1}(xy)y^{-1} = (xy)(xy)^{-1} \Rightarrow x^{-1}y^{-1}(xy) = (xy)(xy)^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^{-1}y^{-1}(xy)(xy)^{-1} = (xy)(xy)^{-1}(xy)^{-1} \Rightarrow x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}$$

vi. אם $x \neq 0$ אזי נבטא:
$$-(-x) + (-x) = 0 \Rightarrow (-(-x) + (-x)) + x = 0 + x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -(-x) + ((-x) + x) = x \Rightarrow -(-x) + 0 = x \Rightarrow -(-x) = x$$

vii. אם $x \neq 0$ אזי
$$\left(x^{-1}\right)^{-1} x^{-1} = 1 \Rightarrow \left(x^{-1}\right)^{-1} x^{-1} = x^{-1}x \Rightarrow \left(x^{-1}\right)^{-1} x^{-1}x = x^{-1}xx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^{-1}\right)^{-1} \cdot 1 = 1 \cdot x \Rightarrow \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$$

- **<u>שדה סדור</u>**

יהי $\mathbb{F}$ שדה. נאמר כי $\mathbb{F}$ "שדה סדור" אם לכל $x, y, z \in \mathbb{F}$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. אם $x, y \in \mathbb{F}$ אזי מתקיימת <u>בדיוק אחת</u> מהאפשרויות הבאות - $x < y$, $x > y$ או $x = y$.
2. טרנזיטיביות (תורשתיות): אם $y < z$ וגם $x < y$ אזי $x < z$
3. אינווריאנטיות: אם $x < y$ אזי $x + z < y + z$
4. נניח $z > 0$. אם $x > y$ אזי $zx > zy$

- **<u>תכונות של שדה סדור</u>**

עבור כל x, y, u, v, a ששייכים לשדה סדור מתקיימות התכונות הבאות:

i. אם $x < y$ וגם $u < v$, אזי $x + u < y + v$
ii. $x < y$ אמ"מ $-x > -y$
iii. נניח $x \neq 0$, אזי $x > 0$ או $-x > 0$ (ולא שניהם יחד)
iv. נניח $a < 0$. אם $x > y$ אזי $ax < ay$
v. אם $x < 0$ וגם $y < 0$, אזי $xy > 0$
vi. נניח $x \neq 0$, אזי $x^2 > 0$
vii. אם $x > 0$ אז $x^{-1} > 0$; אם $x < 0$ אז $x^{-1} < 0$
viii. נניח y, x שווי-סימן. אם $x > y$ אז $x^{-1} < y^{-1}$

<u>הוכחות</u>:

i. מהגדרות השדה הסדור נובע כי $x < y \Rightarrow x + u < y + u$ וגם כי $u < v \Rightarrow y + u < y + v$.
נסיק מכך כי $x + u < y + u < y + v \Rightarrow x + u < y + v$

ii. נוכיח את השקילויות הבאות:

$$x < y \Leftrightarrow x + \left(\left(-x\right) + \left(-y\right)\right) < y + \left(\left(-x\right) + \left(-y\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \left(-x\right)\right) + \left(-y\right) < \left(y + \left(-y\right)\right) - x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 + \left(-y\right) < 0 + \left(-x\right) \Leftrightarrow -y < -x$$

iii. ידוע כי $x \neq 0$, אזי מהגדרת השדה הסדור נובע כי $x > 0$ או $x < 0$. מתכונה ii נובע כי אם $x > 0$ אזי $-x < 0$, ואם $x < 0$ אזי $-x > 0$.

iv. נניח $a < 0$. מתכונה iii נובע כי אם $a < 0$ אז $-a > 0$.
נתון כי $x > y$. מהגדרת השדה הסדור נובע כי אם $x > y$ אז $-ax > -ay$.
מתכונה iii נובע כי אם $-ax > -ay$ אזי $ax < ay$.

v. נתון כי $y < 0$, ולכן מתכונה iv נובע $x < 0 \Rightarrow xy > 0 \cdot y \Rightarrow xy > 0$

vi. אם $x<0$, $y<0$ מתכונה v עולה כי מתקיים $xy>0$, ובפרט גם עבור $xx=x^2>0$.
אם $x>0$ מהגדרת השדה הסדור נובע כי $xx=x^2>0$.

vii. טענת עזר: $1>0$.
הוכחה של טענת העזר: נניח בשלילה $1<0$, אזי מתכונה iv נובע כי
$x<y\Rightarrow 1\cdot x>1\cdot y$. אך מהגדרת איבר היחידה עולה כי $1\cdot x=x$, $1\cdot y=y$, ולכן
$x<y\Rightarrow 1\cdot x<1\cdot y$, בסתירה להנחה $1<0$.
נוכיח את התכונה vii: נניח בשלילה כי $x>0$, $x^{-1}<0$. מתכונה iv נובע כי $xx^{-1}<0$.
אך לפי הגדרה של איבר הופכי עולה כי $xx^{-1}<0\Rightarrow 1<0$, בסתירה לטענת העזר.

viii. נניח x,y שווי-סימן, $y<x$. מתכונה v נובע כי $xy>0$.

מתכונה vii נובע כי ניתן לכתוב -

$$y<x\Rightarrow (xy)^{-1}y<(xy)^{-1}x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^{-1}y^{-1})y<(x^{-1}y^{-1})x\Rightarrow x^{-1}<y^{-1}$$

- **<u>צפיפות השדה הסדור</u>**

יהיו $x,y\in\mathbb{F}$, ונניח $x<y$. קיים $z\in\mathbb{F}$ כך ש- $x<z<y$.

- <u>הוכחה</u>:

נגדיר את z באופן הבא: $z=(x+y)\cdot 2^{-1}=x\cdot 2^{-1}+y\cdot 2^{-1}$, $"2"\underset{def}{=}1+1$.

נוכיח כי $x<z<y$:

ניתן לכתוב - $x=x\cdot 2^{-1}+x\cdot 2^{-1}$, $y=y\cdot 2^{-1}+y\cdot 2^{-1}$, ומכאן נובע כי
$x<x\cdot 2^{-1}+y\cdot 2^{-1}$, $y>y\cdot 2^{-1}+x\cdot 2^{-1}$.

⟦ נימוק:
$$\left[\!\left[\begin{array}{l} x=x\cdot 1=x\cdot(2\cdot 2^{-1})=(x\cdot 2)\cdot 2^{-1}=(x+x)2^{-1}=x\cdot 2^{-1}+x\cdot 2^{-1} \\ y=y\cdot 1=y\cdot(2\cdot 2^{-1})=(y\cdot 2)\cdot 2^{-1}=(y+y)2^{-1}=y\cdot 2^{-1}+y\cdot 2^{-1}\end{array}\right.\right.$$

הגדרנו את z להיות $z=x\cdot 2^{-1}+y\cdot 2^{-1}$, ולכן ניתן להסיק –

$$\left.\begin{array}{l} x<x\cdot 2^{-1}+y\cdot 2^{-1}\Rightarrow x<z \\ y>y\cdot 2^{-1}+x\cdot 2^{-1}\Rightarrow z<y\end{array}\right\}\Rightarrow x<z<y$$

- **<u>ערך מוחלט</u>**

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

הערך המוחלט של $x \in \mathbb{F}$, מסומן על-ידי $|x|$, והוא מוגדר כך – $|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- **<u>"min" או "max"</u>**

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור, ותהי הקבוצה $A \subseteq \mathbb{F}$.

נגדיר מינימום ומקסימום באופן הבא - $\min A = \left\{ m \in A \middle| \forall_{a \in A} \quad m \le a \right\}$, $\max A = \left\{ m \in A \middle| \forall_{a \in A} \quad m \ge a \right\}$

- **<u>טענה</u>**

אם ל- A יש מינימום, הוא יחיד; אם ל- A יש מקסימום, הוא יחיד.

- <u>הוכחה</u>: נניח כי ל- A יש שני איברים שמהווים מקסימום. כלומר $m_1, m_2 = \max A$.

מהגדרת המקסימום נובע כי $\forall_{a \in A} \quad m_1 \ge a$ ובפרט גם $m_1 \ge m_2$, ובאותו האופן גם נובע כי $\forall_{a \in A} \quad m_2 \ge a$ ובפרט גם $m_2 \ge m_1$.

משני הנתונים נסיק - $(m_1 \ge m_2) \wedge (m_2 \ge m_1) \Rightarrow m_1 = m_2$

- **<u>קבוצה אינדוקטיבית</u>**

תהי הקבוצה $I \subseteq \mathbb{R}$. I נקראת "קבוצה אינדוקטיבית" אם מתקיימות בה שתי התכונות הבאות:

1. $0_{\mathbb{F}} \in I$
2. $x \in I \Rightarrow x + 1_{\mathbb{F}} \in I$

- **<u>קבוצת המספרים הטבעיים</u> $\mathbb{N}$**

נגדיר את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ להיות קבוצת החיתוך של כל הקבוצות האינדוקטיביות של $\mathbb{R}$. כלומר, $\mathbb{N} = \bigcap I = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \forall I \quad x \in I \right\}$.

(מההגדרה נובע ישירות כי $\mathbb{N}$ קטנה או שווה מכל הקבוצות האינדוקטיביות).

- **<u>טענה</u>**

$\mathbb{N}$ היא קבוצה אינדוקטיבית.

- <u>הוכחה</u>: נוכיח ששני התנאים להגדרת קבוצה אינדוקטיבית מתקיימים עבור $\mathbb{N}$.

1. נראה כי $0\in\mathbb{N}$: מהגדרת קבוצה אינדוקטיבית נובע כי $0\in I$ לכל I, ולכן
$$0\in\bigcap I\Rightarrow 0\in\mathbb{N}$$
2. נראה כי $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x+1\in\mathbb{N}$: נניח כי x כלשהו מקיים $x\in\mathbb{N}$. אם $x\in\mathbb{N}$ אזי $x\in\bigcap I$. מהגדרת קבוצה אינדוקטיבית נובע כי $x\in\bigcap I\Rightarrow x+1\in\bigcap I$, ולכן ניתן להסיק כי $x+1\in\mathbb{N}$.

- **<u>סגירות $\mathbb{N}$ לחיבור ולכפל</u>**

אם $n,m\in\mathbb{N}$ אזי $nm,n+m\in\mathbb{N}$.

- <u>הוכחה:</u> (של סגירות לחיבור) נבחר $n\in\mathbb{N}$, ונגדיר את הקבוצה הבאה –

$$B=\left\{m\in\mathbb{N}\middle|n+m\in\mathbb{N}\right\}$$

מהגדרת הקבוצה B נובע כי $B\subseteq\mathbb{N}$. נוכיח ש- B קבוצה אינדוקטיבית בעצמה, ומהמינימליות של $\mathbb{N}$ ינבע כי $B=\mathbb{N}$.

מכאן נסיק כי $m\in\mathbb{N}\Rightarrow n+m\in\mathbb{N}$.

נוודא ש- B קבוצה אינדוקטיבית:

1. $n+0\in\mathbb{N}$, ולכן $0\in B$
2. $m\in B\Rightarrow n+m\in\mathbb{N}\Rightarrow(n+m)+1\in\mathbb{N}\Rightarrow n+(m+1)\in\mathbb{N}\Rightarrow m+1\in B$

- <u>הוכחה:</u> (של סגירות לכפל) נבחר $n\in\mathbb{N}$, ונגדיר את הקבוצה הבאה –

$$C=\left\{m\in\mathbb{N}\middle|nm\in\mathbb{N}\right\}$$

מהגדרת הקבוצה C נובע כי $C\subseteq\mathbb{N}$. נוכיח ש- C קבוצה אינדוקטיבית בעצמה, ומהמינימליות של $\mathbb{N}$ ינבע כי $C=\mathbb{N}$.

מכאן נסיק כי $m\in\mathbb{N}\Rightarrow nm\in\mathbb{N}$.

נוודא ש- C קבוצה אינדוקטיבית:

1. $n\cdot 0\in\mathbb{N}$, ולכן $0\in C$
2. $m\in C\Rightarrow nm\in\mathbb{N}\Rightarrow nm+n\in\mathbb{N}\Rightarrow n(m+1)\in\mathbb{N}\Rightarrow m+1\in C$

(המעבר השני נובע מהסגירות של $\mathbb{N}$ לחיבור.)

- **<u>טענה</u>**

לכל $n\in\mathbb{N}$ לא קיים $x\in\mathbb{N}$, כך שמתקיים $n<x<n+1$.

<u>טענת עזר</u>: לכל $n\in\mathbb{N}$, $0<n$, מתקיים $1\le n$.

<u>הוכחת טענת העזר</u>: נגדיר את הקבוצה $D=\mathbb{N}-\left\{x\in\mathbb{N}\middle|0<x<1\right\}$.

מהגדרת הקבוצה D נובע כי $D\subseteq\mathbb{N}$. נוכיח ש- D קבוצה אינדוקטיבית בעצמה, ומהמינימליות של $\mathbb{N}$ ינבע $D=\mathbb{N}$. מכאן נסיק כי $\left\{x\in\mathbb{N}\middle|0<x<1\right\}=\varnothing$, כמבוקש.

נוודא ש- D קבוצה אינדוקטיבית:

1. מההגדרה נובע כי $0\in D$
2. נתון כי $0<x$. מכאן נסיק $x>0\Rightarrow x+1>1\Rightarrow x+1\in D$.

<u>הוכחת הטענה</u>: נגדיר את הקבוצה $E=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\left\{x\in\mathbb{N}\middle|n<x<n+1\right\}=\varnothing\right\}$.

מהגדרת הקבוצה E נובע כי $E\subseteq\mathbb{N}$. נוכיח ש- E קבוצה אינדוקטיבית בעצמה, ומהמינימליות של $\mathbb{N}$ ינבע $E=\mathbb{N}$. מכאן נסיק כי $\left\{x\in\mathbb{N}\middle|n<x<n+1\right\}=\varnothing$, כמבוקש.

נוודא ש- E אינדוקטיבית:

1. מההגדרה נובע כי $0\in E$.
2. נרצה להוכיח כי $n\in E\Rightarrow n+1\in E$.
   נשים לב שמהגדרת הקבוצה E עולה כי הגרירה $n\in E\Rightarrow n+1\in E$ שקולה לגרירה הבאה:
   $$\underbrace{\left\{x\in\mathbb{N}\middle|n<x<n+1\right\}}_{a}=\varnothing\Rightarrow\underbrace{\left\{x\in\mathbb{N}\middle|n+1<x+1<n+2\right\}}_{b}=\varnothing.$$
   לכן נוכיח את הגרירה השנייה באותו אופן בו הוכחנו את טענת העזר:
   נתון כי $a=\varnothing$, ולכן מהגדרת הקבוצה נובע כי מתקיים $x>n+1$ או $x<n$. נסיק מכאן כי גם $b=\varnothing$:

$$i\qquad x>n+1\Rightarrow x+1>n+2\Rightarrow x\notin b$$

$$ii\qquad x<n\Rightarrow x+1<n+1\Rightarrow x\notin b$$

נסיק כי E אינדוקטיבית כמבוקש.

- **<u>טענה</u>**

כל $n \geq 1$ ניתן לבטא את n כסכום $n = \underbrace{1+1+...+1}_{n}$.

- <u>הוכחה</u>: נגדיר את הקבוצה הבאה - $G = \{0\} \cup \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| n = \underbrace{1+1+...+1}_{n} \right\}$

מהגדרת הקבוצה G נובע כי $G \subseteq \mathbb{N}$ (כי גם $0 \in \mathbb{N}$). נוכיח ש- G קבוצה אינדוקטיבית בעצמה, ומהמינימליות של $\mathbb{N}$ ינבע $G = \mathbb{N}$.

נוודא ש- G אינדוקטיבית:

1. ההגדרה קובעת כי $0 \in G$
2. נרצה להוכיח כי $n \in G \Rightarrow n+1 \in G$.

נדון בשני מקרים: אם $n = 0$, אזי $n+1 \in G$ כי ניתן לבטא אותו $n+1 = 0+1 = 1$.
אם $n = 1+1+...+1$, אזי גם $n+1 \in G$ כי ניתן לבטא אותו $n+1 = (1+1+...+1)+1$.

- **<u>המספרים השלמים</u> $\mathbb{Z}$**

ניתן לבטא את קבוצת המספרים השלמים כך - $\mathbb{Z} = \{\pm n | n \in \mathbb{N}\}$

או באופן מפורט יותר $\mathbb{Z} = \{[n,m] | n,m \in \mathbb{N}\}$, $[n,m] \underset{def}{=} \begin{cases} n \geq m & n-m \\ n < m & -(m-n) \end{cases}$

- **<u>פעולות בשלמים</u>**

- חיבור וחיסור:

$$[n_1,m_1]+[n_2,m_2] \underset{def}{=} [n_1+n_2, m_1+m_2]$$

$$[n_1,m_1]-[n_2,m_2] \underset{def}{=} [n_1,n_2]+[m_2,m_1] = [n_1+m_2, n_2+m_1]$$

- כפל: $[n_1,m_1]\cdot[n_2,m_2] \underset{def}{=} [n_1n_2+m_1m_2, n_1m_2+m_1n_2]$

- **<u>המספרים הרציונליים</u> $\mathbb{Q}$**

נבטא את קבוצת המספרים הרציונליים כך - $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

שוויון בקבוצה זו מוגדר כך - $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2$

- **<u>פעולות ברציונליים</u>**

i. חיבור: $\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2} \underset{def}{=} \frac{m_1\cdot n_2+n_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}$

ii. נגדי: $-\left(\frac{m}{n}\right) \underset{def}{=} \frac{-m}{n}$

iii. איבר האפס: $0_{\mathbb{Q}} \underset{def}{=} \frac{0}{n}$

iv. כפל: $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2} \underset{def}{=} \frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}$

v. הופכי: $\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} \underset{def}{=} \frac{n}{m}$

- **<u>טענה</u>**

קבוצת הרציונליים עם הפעולות הללו מהווה שדה סדור.

את יחס הסדר נגדיר כך - $\frac{m_1}{n_1}\le\frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1\cdot n_2\le n_1\cdot m_2$

את שאר התנאים קל לבדוק.

- **<u>עקרון האינדוקציה</u>**

תהי $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של טענות. אם -

1. $p(0)$
2. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\; p(n)\Rightarrow p(n+1)$

אזי $p(n)$ לכל n.

- <u>הוכחה</u>: נגדיר את הקבוצה הבאה - $B=\{n\in\mathbb{N} \mid p(n)\}$.

נוכיח ש- B קבוצה אינדוקטיבית.

מהגדרת הקבוצה B נובע כי $B\subseteq\mathbb{N}$. נוכיח ש- B קבוצה אינדוקטיבית בעצמה,
ומהמינימליות של $\mathbb{N}$ ינבע $B=\mathbb{N}$.

1. מדרישה 1 נובע כי $0 \in B$, כי $p(0)$ נכונה.
2. מדרישה 2 נובע כי אם $n \in B \Rightarrow n+1 \in B$.

נסיק כי אם שני התנאים מתקיימים ב-$\mathbb{N}$, אזי $n \in \mathbb{N}$ נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$.

- **<u>עקרון המינימום (או: עקרון הסדר הטוב)</u>**

לכל קבוצה לא ריקה של טבעיים קיים מינימום.

- <u>הוכחה</u>: תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ קבוצה לא ריקה, ונניח בשלילה כי ל-A אין מינימום.

נגדיר את הקבוצה הבאה - $C = \left\{ k \in \mathbb{N} \middle| \forall_{a \in A}\, k \le a \right\}$.

מהגדרת הקבוצה C נובע כי $C \subseteq \mathbb{N}$.

נוכיח ש-C קבוצה אינדוקטיבית בעצמה, ומהמינימליות של $\mathbb{N}$ ינבע $C = \mathbb{N}$.

1. מהגדרת הקבוצה C נובע כי $0 \in C$, כי תמיד מתקיים $0 \le n$.
2. נניח כי $k \in C$, מהגדרת הקבוצה C נובע כי $k \le a$. מההנחה של-A אין מינימום נובע כי k אינו שייך ל-A, אחרת הוא היה מינימום שלה, לכן נסיק $k < a \Rightarrow k+1 \le a \Rightarrow k+1 \in C$.

מהגדרת הקבוצה A נובע כי $A \subseteq \mathbb{N} - C$, ומהמסקנה כי $\mathbb{N} = C$ נובע $A = \varnothing$, בסתירה להנחה כי A קבוצה לא ריקה.

- **<u>אינדוקציה מלאה</u>**

תהי $\left\{ p(n) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת טענות.

אם הטענה "$p(k)$ נכונה לכל $k < n \in \mathbb{N}$" $\Leftarrow$ $p(n)$, אזי $p(n)$ נכונה לכל n.

- **<u>משפט</u>**

עקרון האינדוקציה $\Leftrightarrow$ אינדוקציה מלאה

- <u>הוכחה</u>: (עקרון האינדוקציה $\Leftarrow$ אינדוקציה מלאה)

נגדיר את הקבוצה הבאה - $D = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \forall_{k<n}\, p(k) \right\}$

מהגדרת הקבוצה D נובע כי $D \subseteq \mathbb{N}$.

נוכיח כי D קבוצה אינדוקטיבית בעצמה, ומהמינימליות של $\mathbb{N}$ ינבע $D = \mathbb{N}$.

1. $0 \in D$, כי עבור $n=0$ טענת האינדוקציה המלאה "נכונה באופן ריק", כי $k<n \Rightarrow k<0$, ולא קיים $k<0$ טבעי.
2. נניח כי $n \in D$. לפי הגדרת הקבוצה D נובע כי $p(k)$ נכונה לכל $k<n$.
לפי עקרון האינדוקציה אם $p(k)$ נכונה אזי $p(k+1)$ נכונה, ולכן נסיק כי $n+1 \in D$.

מסקנה: עקרון האינדוקציה המלאה נכון עבור הקבוצה D, ומכיוון ש- $D=\mathbb{N}$, אם האינדוקציה המלאה נכונה עבור D היא נכונה עבור $\mathbb{N}$.

- <u>הוכחה</u>: (אינדוקציה מלאה $\Leftarrow$ עקרון האינדוקציה)

נגדיר את הקבוצה הבאה - $B=\left\{n \in \mathbb{N} \middle| \neg p(n)\right\}$

מעקרון המינימום נובע כי לכל קבוצה שמוכלת בטבעיים שאינה ריקה יש מינימום. נסמן את המינימום של הקבוצה B ב- n_0.

$n_0 \neq 0$ כי מהאינדוקציה המלאה נובע ש-$p(0)$ "נכונה באופן ריק".

מהגדרת הקבוצה B נובע כי לכל $k<n_0$, $p(k)$ נכונה, ולכן ניתן להסיק לפי עקרון האינדוציה המלאה כי גם $p(n_0)$ נכונה, בסתירה לטענה $n_0 \in B$.

- **<u>קבוצות סופיות</u>**

סימון: $A=\{x_1,\ldots,x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\quad i \neq j \Rightarrow k_i \neq x_j$

מספר האיברים בקבוצה יסומן $|x|=n$

- **<u>טענה</u>**

לכל קבוצה סופית ולא ריקה של מספרים טבעיים קיימים מקסימום ומינימום.

- <u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על n, ונסמן $n=k+1$.

1. עבור $k=0$, זו קבוצה שמכילה איבר יחיד, והוא המינימום והמקסימום.
2. נניח כי הטענה נכונה עבור קבוצה בעלת k איברים, ונתבונן בקבוצה בעלת n איברים - $A=\{x_1,\ldots,x_n\}=\underbrace{\{x_1,\ldots,x_k\}}_{a}\cup\underbrace{\{x_n\}}_{b}$
לקבוצה שסימנו ב-b יש מקסימום ומינימום כי היא מכילה איבר יחיד. לפי הנחת האינדוקציה לקבוצה שסימנו ב-a יש מקסימום ומינימום כי היא מכילה k איברים.
נגדיר: $\min A=\min(\min a,\min b)$ $\max A=\max(\max a,\max b)$

- **<u>חזקות</u>**

חזקה היא פעולה מהצורה של $f(n)=g\left(f(1),...,f(n)\right)$.

כלומר, האיבר ה- n מוגדר על ידי אוסף האיברים הקודמים לו, ומספרם.

<u>הגדרה</u>: $a^0 \underset{def}{=} 1$, $a^{n+1} \underset{def}{=} a^n \cdot a$, $a \neq 0$

- **<u>תכונות של חזקות</u>**

עבור $m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים -

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$

- <u>הוכחה</u>: (1)

באינדוקציה

1. עבור $m=0$ הטענה מתקיימת - $a^n \cdot a^0 = a^n \cdot 1 = a^n = a^{n+0}$
2. נניח כי הטענה נכונה עבור m כלשהו, ניתן להסיק כי -

$$a^n a^{m+1} = a^n\left(a^m a^1\right) = \left(a^n a^m\right)a^1 = \left(a^{n+m}\right)a^1 = a^{n+m+1}$$

- <u>הוכחה</u>: (2)

באינדוקציה

1. עבור $m=0$ הטענה מתקיימת - $\left(a^n\right)^0 = 1 = a^0 = a^{n\cdot 0}$
3. נניח כי הטענה נכונה עבור m כלשהו, ניתן להסיק כי –

$$\left(a^n\right)^{m+1} = \left(a^n\right)^m\left(a^n\right)^1 = a^{nm}a^n = a^{nm+n} = a^{n(m+1)}$$

- **<u>אי-שוויון ברנולי</u>**

$$\forall_{x\geq -1} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

- <u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על n.

1. אם $n=0$ אי השוויון מתקיים - $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0\cdot x = 1$.
2. נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו, ניתן להסיק כי -

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x$$

המעבר הרביעי מבוסס על כך שבשדה סדור תמיד $nx^2 \geq 0$, $n\in\mathbb{N}$.

- **<u>שדות סדורים</u>** (המשך)

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

הגדרנו את הערך המוחלט להיות - $|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

- **<u>טענה</u>**

יהיו $x,r\in\mathbb{F}$, ונניח כי $|x|<r$, אזי $-r<x<r$.

- <u>הוכחה</u>: על-פי הגדרת הערך המוחלט מתקיים $|x| = \max(x,-x)$. נתון גם כי $|x|<r$ ולכן ניתן להסיק $x,-x \leq |x| < r$. נחשב את שני צדדי אי השוויון ונקבל -

$$x,-x\leq |x| < r \Rightarrow x<r$$
$$x,-x\leq |x| < r \Rightarrow x,-x<r \Rightarrow -x<r \Rightarrow x>-r$$

- **<u>אי-שוויון המשולש</u>**

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור ויהיו $x,y\in\mathbb{F}$, אזי $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$

- <u>הוכחה</u>: (צד ימין של אי השוויון) מהגדרת הערך המוחלט מתקיים -

$$|x+y| = \max\big((x+y),-(x+y)\big)$$

נוכיח כי גם $(x+y)$ וגם $-(x+y)$ אינם גדולים מ-$|x|+|y|$ -

- מהגדרת הערך המוחלט נובע $x \le |x|$, $y \le |y|$, ולכן ניתן להסיק - $x+y \le |x|+|y|$
- מהגדרת הערך המוחלט נובע $-x \le |x|$, $-y \le |y|$, ולכן ניתן להסיק - $-(x+y) = (-x+(-y)) \le |x|+|y|$

- <u>הוכחה</u>: (צד שמאל של אי השוויון)
$$|x| = |(x+y)+(-y)| \le |x+y|+|-y| = |x+y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \le |x+y|$$

המעבר השני מבוסס על הוכחת צד ימין של אי-השוויון.

באותו האופן ניתן גם לקבל כי $|y|-|x| \le |x+y|$.

נסיק - $||x|-|y|| = \max((|x|-|y|), -(|x|-|y|)) \le |x+y|$

- **<u>חסמים</u>**

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור, $u \in \mathbb{F}$, ותהי $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה לא ריקה.

A. <u>חסם מלעיל</u>: u הוא חסם מלעיל של A , אם $\forall_{a\in A}\ a \le u$
B. <u>חסם עליון</u>: u הוא חסם עליון של A אם –
   i. u חסם מלעיל
   ii. אם u^* חסם מלעיל, $u^* \ne u$, אזי $u \le u^*$
   נסמן את החסם העליון $\sup A$
C. <u>חסם מלרע</u>: u הוא חסם מלרע של A , אם $\forall_{a\in A}\ a \ge u$
D. <u>חסם תחתון</u>: u הוא חסם תחתון של A אם –
   i. u חסם מלרע
   ii. אם u^* חסם מלרע, $u^* \ne u$, אזי $u \ge u^*$
   נסמן את החסם התחתון $\inf A$

- **<u>טענה</u>**

אם ל- A יש חסם עליון, אזי הוא יחיד.

- <u>הוכחה</u>: נניח כי u_1, u_2 חסמים עליונים של A , ונניח בשלילה כי $u_1 \ne u_2$.

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $u_1 < u_2$. מהגדרת החסם העליון נובע כי הוא בפרט גם חסם מלעיל, ולכן u_2, u_1 חסמים מלעיל. נתון כי u_2 חסם עליון, ולכן מהגדרת חסם עליון נובע כי כל חסם מלעיל אחר גדול ממנו, ובפרט גם עבור החסם מלעיל u_1 מתקיים $u_1 > u_2$, בסתירה להנחה.

- **<u>אקסיומת השלמות</u>**

תהיינה U,L קבוצות לא ריקות, בשדה סדור $\mathbb{R}$. נגדיר $L\le U$ - $\forall_{l\in L}\forall_{u\in U}\, l\le u$

קיים $c\in\mathbb{R}$, כך ש - $\forall_{l\in L}\forall_{u\in U}\, l\le c\le u$

- **<u>אקסיומת החסם העליון (והתחתון)</u>**

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל (או מלרע) קיים חסם עליון (או תחתון, בהתאמה) ב- $\mathbb{R}$.

- **<u>שקילות אקסיומת השלמות ואקסיומת החסם העליון</u>**

טענה: אקסיומת השלמות $\Leftrightarrow$ תכונת החסם העליון

- <u>הוכחה</u>: (אקסיומת החסם העליון $\Rightarrow$ אקסיומת השלמות)

תהיינה U,L קבוצות לא ריקות, בשדה סדור $\mathbb{R}$, ונבחר $L\le U$.

מהנתון $L\le U$ נובע כי כל איברי הקבוצה U הם חסמים מלעיל של הקבוצה L.

נחלק לשני מקרים –

א. אם קיים חסם עליון של L שמקיים $s<u$, קיבלנו כי $l\le s\le u$, כנדרש באקסיומת השלמות.

ב. אם לא קיים חסם עליון שמקיים $s<u$, נקבל כי אם כל איברי הקבוצה U הם חסמים מלעיל של הקבוצה L, הרי מתכונת החסם העליון נובע כי יש ל- L חסם עליון, כך ש- $s\in U$.

מהגדרת s כחסם עליון נובע שהוא חסם מלעיל מינימלי, כלומר הוא המינימום של קבוצת החסמים המלעיליים, ומתקיים $\forall_{u\in U}\, s\le u$.

קיבלנו כי $l\le s\le u$, כנדרש באקסיומת השלמות.

- <u>הוכחה</u>: (אקסיומת השלמות $\Rightarrow$ אקסיומת החסם העליון)

תהי A קבוצה חסומה מלעיל, המקיימת את אקסיומת השלמות. נרצה להראות כי ל- A יש חסם עליון.

נגדיר את קבוצת החסמים מלעיל של A - $U=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\forall_{a\in A}\, a\le u\right\}$

מהנתון של- A יש חסם מלעיל נובע כי U אינה ריקה.

מאקסיומת השלמות נובע כי קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $\forall_{a\in A} \forall_{u\in U}\ a \le c \le u$.

מאי השוויון השמאלי נובע כי c חסם מלעיל של A , ומאי השוויון הימני נובע כי c הוא חסם מלרע של U.

נשים לב כי החסם מלרע של U הוא למעשה החסם מלרע של קבוצת החסמים מלעיל של A . חסם מלרע של קבוצת החסמים העליונים הוא לפי ההגדרה חסם עליון.

- **<u>קטע</u>**

"קטע חסום":

- קטע חסום <u>סגור</u> הוא קבוצת האיברים שמקיימים $a \le x \le b$, ומסומן $[a,b]$.
- קטע חסום <u>פתוח</u> הוא קבוצת האיברים שמקיימים $a < x < b$, ומסומן (a,b).

"קטע לא חסום":

- קטע לא חסום עם <u>קרן סגורה</u> הוא קבוצת האיברים שמקיימים $a \le x$, ומסומן $[a,\infty)$.
- קטע לא חסום עם <u>קרן פתוחה</u> הוא קבוצת האיברים שמקיימים $a < x$, ומסומן (a,∞).

- **<u>מרווח</u>**

תהי A קבוצה לא ריקה, כך ש- $A \subseteq \mathbb{R}$.

A היא מרווח ב- $\mathbb{R}$ אם לכל $x, y \in A$, $x \ne y$, מתקיים $\{z \in \mathbb{R} | x < z < y\} \subseteq A$

- **<u>משפט</u>**

קבוצה היא קטע $\Leftrightarrow$ קבוצה היא מרווח

- <u>הוכחה</u>: (קבוצה היא קטע $\Leftarrow$ קבוצה היא מרווח)

נוכיח עבור קטע חסום למחצה $I = (a,b]$, אך ההוכחה תקפה לכל סוגי הקטעים.

נניח כי $x, y \in I$, $x < y$.

נרצה להראות שכל איבר ששייך למרווח שייך גם לקטע, ולכן קטע הוא מרווח.

ובאופן פורמלי נרצה להראות כי $I=(a,b]$ $z\in\left\{z\in\mathbb{R}\middle|x<z<y\right\}\Rightarrow z\in(a,b]=I$:

$$(x,y\in I)\wedge(x<y)\wedge(x<z<y)\Rightarrow(a<x\le b)\wedge(a<y\le b)\wedge(x<y)\wedge(x<z<y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a<x<z<y\le b\Rightarrow a<z\le b\Rightarrow z\in(a,b]$$

- <u>הוכחה</u>: (קבוצה היא מרווח $\Leftarrow$ קבוצה היא קטע)

נוכיח עבור מרווח חסום מלעיל ומלרע, אך ההוכחה תקפה לכל סוגי המרווחים.

תהי A מרווח, קבוצה לא ריקה וחסומה. נסמן $a=\inf A$, $b=\sup A$.

נרצה להראות שכל איבר ששייך לקטע שייך גם למרווח, ולכן מרווח הוא קטע.

ובאופן פורמלי נרצה להראות כי $z\in\left\{z\in\mathbb{R}\middle|a<z<b\right\}\Rightarrow z\in A$:

נניח כי $t\in A$. כלומר $a<t<b$, כי $a=\inf A$, $b=\sup A$.

- נתון כי $a<t$ וגם כי $a=\inf A$. ניתן להסיק שקיים $a\le x<t$.

[כי אם לא היה x כזה, t היה האינפימום של A , בסתירה להנחה $a<t$.]

- נתון כי $t<b$ וגם כי $b=\sup A$. ניתן להסיק שקיים $t<y\le b$.

[כי אם לא היה y כזה, t היה הסופרימום של A , בסתירה להנחה $t<b$.]

קיבלנו שמתקיים $a\le x<t<y\le b$, כלומר $t\in\left\{z\in\mathbb{R}\middle|x<z<y\right\}$, בהתאם להגדרת המרווח.

- **<u>הארכימדיות של הממשיים</u>**

קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל ב- $\mathbb{R}$.

- <u>הוכחה</u>:

נניח בשלילה שקבוצת המספרים הטבעיים חסומה מלעיל ב- $\mathbb{R}$.

מאקסיומת החסם העליון נובע שאם $\mathbb{N}$ חסומה מלעיל, יש לה חסם עליון. נסמן $s=\sup\mathbb{N}$.

אם s הוא החסם העליון, הרי שבהכרח קיים $n\in\mathbb{N}$, כך ש- $n>s-1$.

[אם לא קיים n כזה, הרי ש- $s-1$ הוא חסם מלעיל קטן יותר מ- s , בסתירה להנחה כי s חסם עליון.]

נסיק כי $n>s-1\Rightarrow n+1>s$, בסתירה להנחה $s=\sup\mathbb{N}$.

[מכיוון ש- $\mathbb{N}$ קבוצה אינדוקטיבית, הרי שמתקיים $n+1\in\mathbb{N}$.]

<u>מסקנה מתכונת הארכימדיות של הממשיים:</u>

לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $n\in\mathbb{N}$, כך שמתקיים $0<n^{-1}<\varepsilon$.

- <u>הוכחה:</u>

מהנתון $0<\varepsilon$ נובע כי $0<\varepsilon^{-1}$. (הטענה הזו הוכחה בתכונות השדה הסדור).

מהארכימדיות של הממשיים נובע שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$\varepsilon^{-1}<n$.

נסיק - $\varepsilon^{-1}<n\Rightarrow\varepsilon^{-1}\left(\varepsilon n^{-1}\right)<n\left(\varepsilon n^{-1}\right)\Rightarrow n^{-1}<\varepsilon$

- **<u>משפט</u>**

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, ונניח כי מתקיים $a+1<b$.

אזי קיים מספר שלם, $z\in\mathbb{Z}$, כך שמתקיים $z\in\left(a,b\right)$.

- <u>הוכחה:</u>

נתבונן בקבוצת השלמים הבאה – $m=\left\{z\in\mathbb{Z}\middle|z\le a\right\}$

קבוצה זו חסומה מלעיל על ידי a.

קבוצה זו אינה ריקה, כי אם $a>0$ אזי $1\in m$, ואם $a<0$, נקבל כי $z\le a\Rightarrow -z\ge -a$, ומהארכימדיות של הממשיים נובע כי קיים מספר טבעי שגדול מכל מספר ממשי שנבחר, ובפרט גם מהמספר הממשי החיובי $-a$.

מכיוון ש-m חסומה מלעיל ולא ריקה קיים לה חסם עליון. נסמן $s=\sup m$.

נוכיח כי החסם העליון $s\in m$.

נדון בשני מקרים:

א. אם $s\ge 0$, אזי m אזי מכילה מספר סופי של טבעיים, ולכן המקסימום של קבוצת הטבעיים הזו הוא החסם העליון של m.

ב. אם $s<0$, אזי היא מכילה מספרים שלמים (שליליים) בלבד. לקבוצה זו יש מקסימום שלם, שהוא החסם העליון של m.

[נימוק: הוכחנו שלכל קבוצה לא ריקה של טבעיים קיים מינימום. נובע מכך שלכל קבוצה לא ריקה של שלמים שליליים קיים מקסימום.]

אם כך נוכל להסיק כי החסם העליון שייך ל-m. נסמן $\sup m=z_0$.

הגדרנו את הקבוצה m כך ש-$z\le a$, ובפרט גם עבור החסם העליון מתקיים $z_0\le a$.

[למה: $z_0+1>a$.

נימוק: נניח בשלילה $z_0+1<a$. נקבל כי $z_0 \le z_0+1 \le a$.

מהגדרת הקבוצה m נובע $z_0+1 \le a \Rightarrow z_0+1 \in m$ בסתירה לטענה כי z_0 חסם עליון.]

נסיק - $z_0 \le a < z_0+1 \le a+1 < b \Rightarrow a < z_0+1 < b$, כנדרש.

- **<u>ערך שלם וערך שברי</u>**

יהי $x \in \mathbb{R}$, ונגדיר את הקבוצה הבאה - $\sup\{z \in \mathbb{Z} | z \le x\} \in \mathbb{Z}$.

החסם העליון של הקבוצה הזו הוא המקסימום שלה.

נקרא לחסם העליון הזה "הערך השלם" של x. נסמן אותו כך - $[x]$.

"הערך השברי" של x מוגדר כך - $\{x\} = [x] - x$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל.

החסם מלעיל s של A הוא חסם עליון אמ"מ - $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a\in A}\ s-\varepsilon < a < s$

- <u>הוכחה</u>: (s חסם עליון $\Leftarrow$ $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a\in A}\ s-\varepsilon < a < s$)

יהי $\varepsilon>0$. אם לא קיים $a \in A$ כך ש- $s-\varepsilon < a < s$, אזי אם נבחר $t = s-\frac{\varepsilon}{2}$ נקבל כי מתקיים $s-\varepsilon < t < s$. ידוע כי לא קיים $s-\varepsilon < a$, ולכן $s-\varepsilon$ מהווה חסם מלעיל שקטן מ- s , בסתירה להנחה ש- s חסם עליון.

- <u>הוכחה</u>: ($\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a\in A}\ s-\varepsilon < a < s$ $\Leftarrow$ s חסם עליון)

נתון כי s חסם מלעיל. נוכיח כי הוא חסם מלעיל מינימלי.

נניח בשלילה שקיים $u<s$, כך ש- u חסם מלעיל של A .

נבחר $\varepsilon = s-u > 0$. מהתנאי $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a\in A}\ s-\varepsilon < a < s$ נובע שקיים $a \in A$ כך ש- $u = s-\varepsilon < a < s$, בסתירה לטענה ש- u חסם מלעיל.

- **<u>תכונות של חסמים</u>**

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל, כך שמתקיים $a\le s$ ו- $b\le t$.

1. $s+t$ הוא חסם מלעיל של $A+B$.
   כמו כן אם כל איברי A,B אי-שליליים, אזי $s\cdot t$ הוא חסם מלעיל של $A\cdot B$.

   - <u>הוכחה</u>:

   הוכחה עבור חיבור: $(a\le s)\wedge(b\le t)\Rightarrow a+b\le s+t$

   הוכחה עבור כפל: $(0<a\le s)\wedge(0<b\le t)\Rightarrow a\cdot b\le a\cdot t\le s\cdot t$

2. $\inf(-A)=-\sup A$

   - <u>הוכחה</u>:

   נגדיר ש- s חסם עליון של A, ומכאן נובע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$, כך ש- $s\ge a\ge s-\varepsilon$.

   נכפיל ב- (-1) ונקבל כי $-s\le -a\le -s+\varepsilon$.

   מאי השוויון הזה נובע כי $-s$ חסם תחתון של $-A$. כלומר $\inf(-A)=-\sup A$.

3. $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

   - <u>הוכחה</u>:

   נגדיר $s=\sup A$, $t=\sup B$.

   s,t חסמים עליונים, ובפרט גם חסמים מלעיל. מטענה 1 נובע כי $s+t$ חסם מלעיל של $A+B$.

   נוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיימים $a\in A$, $b\in B$, כך ש- $s+t-\varepsilon\le a+b\le s+t$.

   ידוע כי $s=\sup A$, ולכן לכל $\frac{\varepsilon}{2}>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $s-\frac{\varepsilon}{2}\le a\le s$.

   ידוע כי $t=\sup B$, ולכן לכל $\frac{\varepsilon}{2}>0$ קיים $b\in B$ כך ש- $t-\frac{\varepsilon}{2}\le b\le t$.

   משני הנתונים נובע - $s-\frac{\varepsilon}{2}+t-\frac{\varepsilon}{2}\le a+b\le s+t\Rightarrow s+t-\varepsilon\le a+b\le s+t$

4. אם $a,b>0$, אז $\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$

   - <u>הוכחה</u>: באופן דומה להוכחה הקודמת.

- **משפט**

יהיו $A,B\in\mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות, ונניח כי $\forall_{a\in A}\forall_{b\in B}\, a\le b$. אזי $\inf A\le \inf B$.

- הוכחה:

מהנתון $a\le b$ נובע שכל איבר ב- B הוא חסם מלעיל של הקבוצה A.

$\sup A$ הוא חסם מלעיל מינימלי של A. נסיק כי $\forall_{b\in B}\sup A\le b$. כלומר, $\sup A$ הוא חסם מלרע של B.

$\inf B$ הוא חסם מלרע מקסימלי של B, ולכן $\sup A\le \inf B$.

ברור כי $\inf A\le \sup A$, ולכן $\inf A\le \inf B$.

- **משפט**

יהיו $A,B\in\mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות, ונניח כי $\forall_{a\in A}\forall_{b\in B}\, a\le b$.

מתקיימת שקילות בין שלושת התנאים הבאים –

i. $\sup A=\inf B$

ii. $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{a\in A}\exists_{b\in B}\, 0\le b-a<\varepsilon$

iii. קיים בדיוק $c\in\mathbb{R}$ אחד, כך ש- $\forall_{a\in A}\forall_{b\in B}\, a\le c\le b$

- הוכחה:

כדי להוכיח את השקילות נוכיח את סדרת הגרירות הבאה - **i** $\Leftarrow$ **ii** $\Leftarrow$ **iii** $\Leftarrow$ **i**.

1. (i $\Leftarrow$ ii)

נתון $\sup A=\inf B$.

$s=\sup A$. מטענה קודמת נובע שקיים $a\in A$, כך שמתקיים $s-\frac{\varepsilon}{2}<a\le s$.

$s=\inf B$. מטענה קודמת נובע שקיים $b\in B$, כך שמתקיים $s\le b<s+\frac{\varepsilon}{2}$.

נשתמש בשני אי השוויונים: נתון $b<s+\frac{\varepsilon}{2}$, וגם $s-\frac{\varepsilon}{2}<a\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}-s>-a$.

נסיק כי $b+(-a)<\left(s+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{2}-s\right)=\varepsilon\Rightarrow b-a<\varepsilon$.

2. (ii $\Leftarrow$ iii)

נתון $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a\in A}\ \exists_{b\in B}\ 0\le b-a<\varepsilon$.

מאקסיומת השלמות נובע שקיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $\forall_{a\in A}\ \forall_{b\in B}\ a\le c\le b$.

נרצה להוכיח ש- c יחיד.

נניח בשלילה שקיימים $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $c_1\ne c_2$, ובלי הגבלת הכלליות נקבע $c_1<c_2$, כך שמתקיים $\forall_{a\in A}\ \forall_{b\in B}\ a\le c_1<c_2\le b$.

נבחר $\varepsilon=c_2-c_1$, ולכן $a\le c_1<c_2\le b\Rightarrow 0<c_2-c_1\le b-c_1\Rightarrow 0<\varepsilon\le b-c_1$.

ידוע גם כי $a\le c_1\Rightarrow -a\ge -c_1$, ולכן נקבל $b-a\ge\varepsilon$, בסתירה לטענה ii.

3. (iii $\Leftarrow$ i)

נתון כי קיים בדיוק $c\in\mathbb{R}$ אחד, כך ש- $\forall_{a\in A}\ \forall_{b\in B}\ a\le c\le b$.

נניח בשלילה כי $\sup A<\inf B$. אזי נקבל כי מתקיים –

$$\forall_{a\in A}\ \forall_{b\in B}\ a\le\sup A<\inf B\le b$$

מצאנו שני איברים שונים שמקיימים את אי השוויון, בסתירה לנתון.

- <u>**משפט**</u>

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך שמתקיים $a<q<b$

- <u>הוכחה</u>:

$a<b\Rightarrow b-a>0$.

מהארכימדיות של הממשיים נובע שקיים $n\in\mathbb{N}$, כך ש- $n>\max\left((b-a),(b-a)^{-1}\right)$.

נסמן $b^*=nb$, $a^*=na$, ונקבל כי - $b^*-a^*=n(b-a)>(b-a)^{-1}(b-a)=1$.

נסיק כי $b^*<a^*+1$.

מטענה קודמת נובע שקיים $na=a^*<z<b^*=nb$, ולכן $a<\frac{z}{n}<b$.

- **<u>צפיפות</u>**

תהי $A\subseteq[a,b]$. נאמר כי A צפופה ב-$[a,b]$, אם לכל $a<x<y<b$ מתקיים $A\cap(x,y)\neq\varnothing$. (מהטענה הקודמת, למשל, עולה כי $\mathbb{Q}$ צפופה בישר הממשי.)

- **<u>משפט</u>**

לא קיים $y\in\mathbb{Q}$, כך ש-$y^2=2$.

- <u>הוכחה</u>:

נניח בשלילה שלשתיים יש שורש רציונלי. נסיק כי ניתן להציג את שתיים כשבר $\frac{p}{q}$ <u>מצומצם</u>:

$$y^2=2\Rightarrow\left(\frac{p}{q}\right)^2=2\Rightarrow\frac{p^2}{q^2}=2\Rightarrow p^2=2q^2.$$

נסיק כי $2\,|\,p^2$, ולכן p^2 זוגי וניתן להציג אותו כך - $p=2p^*$.

נציב את התוצאות במשוואה $p^2=2q^2$ –

$$p^2=2q^2\Rightarrow\left(2p^*\right)^2=2q^2\Rightarrow 2\cdot 2p^{*2}=2q^2\Rightarrow 2p^{*2}=q^2$$

נסיק כי $2\,|\,q^2$.

שתי המסקנות $2\,|\,p^2$, $2\,|\,q^2$ מהוות סתירה להנחה כי השבר $\frac{p}{q}$ מצומצם.

- **<u>משפט</u>**

לכל $0<a\in\mathbb{R}$ קיים $x\in\mathbb{R}$, כך ש-$x^2=a$.

- <u>הוכחה</u>:

[הערה: אם $a=1$ אז $\sqrt{a}=1$. אם $a<1$, הרי שמציאת שורש שקולה למציאת השורש של $\frac{1}{a}>1$, ולכן נתמקד בהוכחה ב-$a>1$.]

יהי $a>1$. נגדיר את הקבוצה הבאה - $B=\left\{y\in\mathbb{R}\,\middle|\,y>0,\,y^2<a\right\}$.

B חסומה ולא ריקה, ולכן יש לה חסם עליון. נסמן $\sup B=x$.

[נימוק: חסומה למשל ע"י a. אם נניח כי $a<y$, נקבל $a^2<y^2$, בסתירה לתנאי $y^2<a$.]

נוכיח כי $x^2=a$, כלומר $\sup B=\sqrt{a}$, ומההיגד הקודם שקיים חסם עליון ל- B נסיק שלכל מספר ממשי a יש שורש ממשי.

לצורך ההוכחה ש- $x=\sup B=\sqrt{a}$ נפסול את שתי האפשרויות $x^2<a$, $x^2>a$:

א. נניח בשלילה $x^2<a$, נגדיר $\varepsilon=a-x^2$, נתבונן בביטוי הבא – $y=x+\dfrac{\varepsilon}{4a}$.

ביטוי זה גדול מאפס כי הוא סכום של שני ביטויים חיוביים, ומיד נוכיח שביטוי זה גם מקיים $y^2=\left(x+\dfrac{\varepsilon}{4a}\right)^2<a$. שני תנאים אלה הם התנאים להשתייכות לקבוצה B, ולכן נסיק כי $x+\dfrac{\varepsilon}{4a}\in B$, בסתירה להנחה $\sup B=x$.

נוכיח כי $y^2=\left(x+\dfrac{\varepsilon}{4a}\right)^2<a$:

$$y=x+\frac{\varepsilon}{4a}\Rightarrow y^2=\left(x+\frac{\varepsilon}{4a}\right)^2\Rightarrow y^2=x^2+\frac{\varepsilon}{2a}x+\frac{\varepsilon^2}{16a^2}$$

נדון בביטוי $\dfrac{\varepsilon^2}{16a^2}$: $\varepsilon=a-x^2\Rightarrow\varepsilon<a\Rightarrow\varepsilon<a^2\Rightarrow\dfrac{\varepsilon}{a^2}<1$.

לכן נסיק כי - $\dfrac{\varepsilon^2}{16a^2}=\dfrac{\varepsilon}{16}\cdot\dfrac{\varepsilon}{a^2}<\dfrac{\varepsilon}{16}\cdot1=\dfrac{\varepsilon}{16}\Rightarrow\dfrac{\varepsilon^2}{16a^2}<\dfrac{\varepsilon}{16}$

נדון בביטוי $\dfrac{\varepsilon}{2a}x$: כזכור הנחנו בשלילה שמתקיים $x<x^2<a$, ולכן $\dfrac{x}{a}<1$.

לכן נסיק כי - $\dfrac{\varepsilon}{2a}x=\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{x}{a}<\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot1=\dfrac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\dfrac{\varepsilon}{2a}x<\dfrac{\varepsilon}{2}$

נצרף את שתי המסקנות ונקבל שמתקיים $\dfrac{\varepsilon}{2a}x+\dfrac{\varepsilon^2}{16a^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{16}<\varepsilon$.

ולכן –

$$y=x+\frac{\varepsilon}{4a}\Rightarrow y^2<x^2+\frac{\varepsilon}{2a}x+\frac{\varepsilon^2}{16a^2}\Rightarrow y^2<x^2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{16}\Rightarrow y^2<x^2+\varepsilon$$

הגדרנו $\varepsilon=a-x^2>0\Rightarrow x^2+\varepsilon=a$, ולכן נסיק כי $y^2<x^2+\varepsilon\Rightarrow y^2<a$.

ב. באופן דומה ניתן להוכיח כי ההנחה $x^2>a$ מובילה לסתירה.

יחידה 2 – סדרות

- **סדרה**

סדרה היא העתקה מהמספרים הטבעיים למספרים הממשיים, $a:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$.

כלומר, לכל מספר טבעי (אינדקס) מותאם מספר ממשי.

- **גבול של סדרה**

הסדרה $\left(a_n\right)$ מתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$, אם $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ \left|a_n-L\right|<\varepsilon$.

נסמן: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=L$ או $\left(a_n\right)\underset{n\to\infty}{\rightarrow}L$. אם סדרה אינה מתכנסת נאמר שהיא מתבדרת.

- **יחידות הגבול**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה מתכנסת. אם $L_2\,,L_1$ הם גבולות של $\left(a_n\right)$, אזי $L_1=L_2$.

- הוכחה:

נניח בשלילה כי קיימים $L_2\,,L_1$, $L_1\neq L_2$, כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=L_2$.

נניח בלי הגבלת הכלליות $L_1<L_2$, ונסמן $\varepsilon=L_2-L_1>0$.

מכאן נובע שהקטעים הבאים זרים - $\left|a_n-L_1\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$, $\left|a_n-L_2\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$.

מהנתון $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=L_1$ נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_1}\ \forall_{n>n_1}\ \left|a_n-L\right|<\varepsilon$.

מהנתון $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=L_2$ נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_2}\ \forall_{n>n_2}\ \left|a_n-L\right|<\varepsilon$.

נבחר $n_0=\max\left(n_1,n_2\right)$ ונקבל $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ \left|a_n-L_1\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}\wedge\left|a_n-L_2\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$.

וזו סתירה -

$$\left|L_2-L_1\right|=\varepsilon\Rightarrow\left|L_2-a_n+a_n-L_1\right|=\varepsilon\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left|L_2-a_n+a_n-L_1\right|\le\left|L_2-a_n\right|+\left|a_n-L_1\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\varepsilon<\frac{\varepsilon}{2}$$

- **משפט**

יהיו (a_n), (b_n) סדרות.

נניח כי קיים $k \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $a_n = b_n$.

אזי –

1. (a_n) מתכנסת אמ"מ (b_n) מתכנסת.
2. אם (a_n) ו-(b_n) מתכנסות, הן מתכנסות לאותו גבול L.

- הוכחה:

אם $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$, מההגדרה נובע $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ |a_n - L| < \varepsilon$.

נראה כי הגדרת הגבול מתקיימת גם עבור (b_n).

1. מהתכנסות (a_n) נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
2. ידוע גם שקיים $k \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $a_n = b_n$.
3. נבחר $n_1 = \max(n_0, k)$, ונקבל כי עבור n_1 מתקיימים 1 ו-2.
4. נקבל את הגדרת הגבול עבור (b_n) -

$$\forall_{\varepsilon>0}\quad \exists_{n_1}\quad \forall_{n>n_1}\quad |a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \forall_{\varepsilon>0}\quad \exists_{n_1}\quad \forall_{n>n_1}\quad |b_n - L| < \varepsilon$$

משמע $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = L$.

- **משפט**

יהיו (a_n), (b_n) סדרות.

נניח כי קיים $k \in \mathbb{N}$, כך שלכל n מתקיים $a_n = b_{n+k}$.

אזי –

1. (a_n) מתכנסת אמ"מ (b_n) מתכנסת.
2. אם (a_n) ו-(b_n) מתכנסות, הן מתכנסות לאותו גבול L.

- <u>הוכחה:</u>

אם $\lim_{n\to\infty}(a_n)=L$, מההגדרה נובע $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}\left|a_n-L\right|<\varepsilon$.

נראה כי הגדרת הגבול מתקיימת גם עבור (b_n).

1. נתון כי לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left|a_n-L\right|<\varepsilon$.
2. נגדיר $n_1=n_0-k$, ונקבל $n>n_0 \Leftrightarrow n>n_1+k \Leftrightarrow n-k>n_1$.
3. נכתוב מחדש את הגדרת הגבול עבור (a_n) -

   לכל $\varepsilon>0$ קיים n_1 כל שלכל $n-k>n_1$ מתקיים $\left|a_{n-k}-L\right|<\varepsilon$.
4. ידוע גם שקיים $k\in\mathbb{N}$, כך שלכל n מתקיים $a_n=b_{n+k}$, ומכיוון שהגדרנו $n_0=n_1+k$, נקבל כי $a_n=b_{n+k}\Rightarrow a_{n-k}=b_n$.
5. נציב בהגדרת הגבול שבסעיף 3 את השוויון שקיבלנו בסעיף 4, ונקבל –

   לכל $\varepsilon>0$ קיים n_1 כל שלכל $n-k>n_1$ מתקיים $\left|b_n-L\right|<\varepsilon$, שזו הגדרת הגבול עבור (b_n).

- **<u>משפט</u>**

כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה. (חסומה מלרע ומלעיל).

- <u>הוכחה:</u>

תהי (a_n) סדרה מתכנסת. נוכיח שקיימים m_1, m_2, כך שלכל n מתקיים $m_1\le a_n\le m_2$.

לשם כך נחלק את הסדרה לשתי קבוצות – קבוצת איברי הסדרה שמחוץ לאינטרוול $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ וקבוצת איברי הסדרה שבתוך האינטרוול $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$.

הגדרת הגבול קובעת שלכל $\varepsilon>0$ קיים מספר סופי של איברים (או אפס) מחוץ לאינטרוול $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$, (האיברים שהאינדקס שלהם $0\le n\le n_0$). ושכל שאר האיברים נמצאים בתוך האינטרוול $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$. (האיברים שהאינדקס שלהם $n_0<n\le\infty$).

נגדיר - $m_1=\min\left(a_1,...,a_{n_0},L-\varepsilon\right)$, $m_2=\max\left(a_1,...,a_{n_0},L+\varepsilon\right)$, ונקבל כי לכל n מתקיים $m_1\le a_n\le m_2$.

- **משפט**

יהיו $\left(a_n\right)$ סדרה, ונניח m $\forall_n\, a_n \le m$.

אם $\left(a_n\right)$ מתכנסת אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right) \le m$.

- הוכחה:

נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right) = L$.

מהתכנסות $\left(a_n\right)$ נובע שקיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים ε $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$. כלומר, $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$.

נניח בשלילה $L > m$, ונבחר $\varepsilon = L - m > 0$. נקבל –

$$L-\varepsilon < a_n \Rightarrow L-\left(L-m\right) < a_n \Rightarrow m < a_n.$$

בסתירה להנחה כי $\forall_n\, a_n \le m$.

- **משפט**

יהיו $\left(a_n\right)$, $\left(b_n\right)$ סדרות, כך שלכל n מתקיים $b_n < a_n$.

אם $\left(a_n\right)\underset{n\to\infty}{\to} a$, $\left(b_n\right)\underset{n\to\infty}{\to} b$, אזי $b < a$.

- הוכחה:

מהנתון ש-$\left(a_n\right)$ מתכנסת נובע כי קיים n_1, כל שלכל $n > n_1$ מתקיים $\left|a_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

מהנתון ש-$\left(b_n\right)$ מתכנסת נובע כי קיים n_2, כל שלכל $n > n_2$ מתקיים $\left|b_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

נבחר $n_0 = \max\left(n_1, n_2\right)$.

נניח בשלילה $b > a$, ונוכל לבחור $\varepsilon = b - a > 0$, ונקבל –

$$\forall_{n>n_0} \quad \left|a_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{4} \wedge \left|b_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow a_n < \underbrace{a + \frac{\varepsilon}{4} < b - \frac{\varepsilon}{4}}_{because \quad \varepsilon=b-a} < b_n$$

בסתירה לנתון $b_n < a_n$.

- <u>**משפט הסנדוויץ'**</u>

יהיו $(a_n),(b_n),(c_n)$ סדרות, כך שלכל n מתקיים $(a_n)\le(b_n)\le(c_n)$.

אם $(a_n),(c_n)$ מתכנסות לאותו גבול, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_n)=L$, אזי גם (b_n) מתכנסת לאותו גבול, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=L$.

- <u>הוכחה:</u>

מהנתון ש-(a_n) מתכנסת נובע כי קיים n_1, כל שלכל $n>n_1$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

מהנתון ש-(c_n) מתכנסת נובע כי קיים n_2, כל שלכל $n>n_2$ מתקיים $|c_n-L|<\varepsilon$.

נבחר $n_0=\max(n_1,n_2)$, ולכן נוכל להסיק כי –

$$\begin{aligned}
&\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{n>n_0}\left(|a_n-L|<\varepsilon\right)\wedge\left(|c_n-L|<\varepsilon\right)\wedge\left((a_n)\le(b_n)\le(c_n)\right)\Rightarrow\\
&\Rightarrow\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{n>n_0}\,L-\varepsilon<a_n<b_n<c_n<L+\varepsilon\Rightarrow\\
&\Rightarrow\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{n>n_0}\,L-\varepsilon<b_n<L+\varepsilon\Rightarrow\\
&\Rightarrow\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{n>n_0}\,|b_n-L|<\varepsilon
\end{aligned}$$

קיבלנו את הגדרת הגבול L עבור (b_n).

- <u>**אריתמטיקה של גבולות**</u>

יהיו (a_n), (b_n) סדרות.

א. התנאים הבאים שקולים –

a. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a|=0$

  - <u>הוכחה:</u>

a⇐b: $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{n>n_0}\,|a_n-a|<\varepsilon\Rightarrow|(a_n-a)-0|<\varepsilon$

$c \Leftarrow b$: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ \left|(a_n-a)-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \left||a_n-a|-0\right|<\varepsilon$

$a \Leftarrow c$: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ \left||a_n-a|-0\right|<\varepsilon \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ [הערה: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a| \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$]

- <u>הוכחה:</u>

  מהתכנסות (a_n), נובע כי $|a_n-a|<\varepsilon \quad \forall_{n>n_0} \quad \exists_{n_0} \quad \forall_{\varepsilon>0}$.

  מאי-שוויון המשולש נובע כי $\left||a_n|-|a|\right|<|a_n-a|$, ולכן ניתן להסיק –

  $\left||a_n|-|a|\right|<|a_n-a|<\varepsilon \Rightarrow \left||a_n|-|a|\right|<\varepsilon$.

  קיבלנו את הגדרת הגבול $|a|$ עבור $(|a_n|)$.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

- <u>הוכחה:</u>

  מהתכנסות (a_n), נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_1}\ \forall_{n>n_1}\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

  מהתכנסות (b_n), נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_2}\ \forall_{n>n_2}\ |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$.

  נבחר $n_0=\max(n_1,n_2)$.

  נקבל שמתקיים - $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$

  מאי-שוויון המשולש נובע $\left|a_n+b_n-(a+b)\right| \le |a_n-a|+|b_n-b| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

  קיבלנו את הגדרת הגבול $a+b$ עבור (a_n+b_n).

ד. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)=-a$.

- <u>הוכחה:</u>

מהתכנסות (a_n), נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_1}\,\forall_{n>n_1}\,|a_n-a|<\varepsilon$.

נסיק - $|a_n-a|<\varepsilon \Rightarrow |-(a_n-a)|<\varepsilon \Rightarrow |-a_n-(-a)|<\varepsilon$.

קיבלנו את הגדרת הגבול $-a$ עבור $(-a_n)$.

<u>מסקנה</u>: מטענות ג' ו-ד' נובע $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b$.

ה. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- (b_n) חסומה (מלעיל ומלרע), אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$.

- <u>הוכחה:</u>

(b_n) חסומה ולכן קיים $m>0$, כך ש- $\forall_n\, b_n \le m \Leftarrow \forall_n\, |b_n|\le m$.

מהתכנסות (a_n), נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_1}\,\forall_{n>n_1}\,|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{m}$.

נסיק שמתקיים - $|a_n\cdot b_n-0|=|a_n\cdot b_n|=|a_n|\cdot|b_n|<\dfrac{\varepsilon}{m}\cdot m=\varepsilon$.

קיבלנו את הגדרת הגבול 0 עבור $(a_n\cdot b_n)$.

ו. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$.

- <u>הוכחה:</u>

מהתכנסות (a_n), נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_1}\,\forall_{n>n_1}\,|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2|b|}$.

עוד נובע מהתכנסות (a_n) כי היא חסומה. כלומר, $\forall_n\,\exists_m\, a_n\le m$.

מהתכנסות (b_n), נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_2}\,\forall_{n>n_2}\,|b_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2m}$.

נבחר $n_0=\max(n_1,n_2)$.

נעריך את הביטוי $|a_n\cdot b_n-ab|$ -

$$\left|a_n \cdot b_n - ab\right| = \left|a_n \cdot b_n - a_n \cdot b + a_n \cdot b - ab\right| = \left|\left(a_n \cdot b_n - a_n \cdot b\right) + \left(a_n \cdot b - ab\right)\right| \le$$

$$\le \left|a_n \cdot b_n - a_n \cdot b\right| + \left|a_n \cdot b - ab\right| = \left|a_n\right| \cdot \left|b_n - b\right| + \left|b\right| \cdot \left|a_n - a\right| < m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} + \left|b\right| \frac{\varepsilon}{2\left|b\right|} = \varepsilon$$

קיבלנו את הגדרת הגבול ab עבור $\left(a_n \cdot b_n\right)$.

<u>מסקנה</u>: לכל $c \in \mathbb{R}$ קבוע מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot c\right) = ac$.

ז. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ וגם $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $b \ne 0$, אזי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

הערה: מספיק להראות $\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b}$, ומכלל ו' נוכל להסיק כי

מתקיים - $\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

- <u>הוכחה</u>:

i. מהתכנסות $\left(b_n\right)$ נובע כי $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_1} \forall_{n>n_1} \left|b_n - b\right| < \frac{\left|b\right|}{2}$.

(בחרנו $\varepsilon = \frac{\left|b\right|}{2}$.)

ii. נשים לב כי מתקיים

$$\left|b_n - b\right| < \frac{\left|b\right|}{2} \Rightarrow b - \frac{\left|b\right|}{2} < b_n < b + \frac{\left|b\right|}{2} \Rightarrow \frac{\left|b\right|}{2} < b_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left|b\right|}{2} \cdot \left|b\right| < b_n \cdot \left|b\right| \Rightarrow \frac{\left|b\right|^2}{2} < \left|b_n \cdot b\right|$$

iii. מהתכנסות $\left(b_n\right)$ נובע כי $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_2} \forall_{n>n_2} \left|b_n - b\right| < \varepsilon \frac{\left|b\right|^2}{2}$

(בחרנו $\varepsilon = \varepsilon \frac{\left|b\right|^2}{2}$.)

iv. נבחר $n_0 = \max\left(n_1, n_2\right)$, ונקבל שעבור n_0 מתקיים –

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \left|b_n - b\right| < \varepsilon \cdot \frac{\left|b\right|^2}{2} \wedge \frac{\left|b\right|^2}{2} < b_n \cdot b$$

ט. צריך להראות כי $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0} \left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|<\varepsilon$.

לשם כך נשים לב כי מתקיים

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b-b_n}{b_n\cdot b}\right|=\left|b-b_n\right|\cdot\frac{1}{\left|b_n\right|}\cdot\frac{1}{\left|b\right|}<\varepsilon\cdot\frac{\left|b\right|^2}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\left|b\right|^2}{2}}=\varepsilon.$$

קיבלנו את הגדרת הגבול $\frac{1}{b}$ עבור $\left(\frac{1}{b_n}\right)$.

ח. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$, $a_n>0$, אזי לכל $r\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(a_n{}^r\right)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^r$

- <u>הוכחה</u>:

1) עבור $r\in\mathbb{N}$, נסיק על סמך טענה ו' שמתקיים -

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\right)^r=\lim_{n\to\infty}\underbrace{a_n\cdot a_n\cdot\ldots\cdot a_n}_{r}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}a_n}_{r}=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^r$$

2) עבור $r\in\mathbb{Z}$, אם $r=0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(a_n\right)^r=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\right)^0=\lim_{n\to\infty}1=1=1^r$

ואם $r<0$, נסיק על סמך טענה ז' שמתקיים -

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\right)^r=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n{}^{-r}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{a_n\cdot a_n\cdot\ldots\cdot a_n}_{-r}}=$$

$$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}}_{-r}=\underbrace{\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}a_n}\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}a_n}\cdot\ldots\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}a_n}}_{-r}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\lim_{n\to\infty}a_n}\cdot\frac{1}{\lim_{n\to\infty}a_n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\lim_{n\to\infty}a_n}}_{-r}=\left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty}a_n}\right)^{-r}=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^r$$

3) עבור $r\in\mathbb{Q}$, $r=\frac{1}{m}$, $m\in\mathbb{N}$, צריך להראות כי -

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{a_n}=\sqrt[m]{\lim_{n\to\infty}a_n}$$

נניח בשלילה שהסדרה $\sqrt[m]{a_n}$ אינה מתכנסת ל- $\sqrt[m]{\lim_{n\to\infty}a_n}$.

כלומר -

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall_{n_0} \ \exists_{n > n_0} \left| \sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} \right| > \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{a_n} > \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} + \varepsilon \Rightarrow a_n > \left(\sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} + \varepsilon \right)^m > \lim_{n\to\infty} a_n + \varepsilon^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n - \lim_{n\to\infty} a_n > \varepsilon^m \Rightarrow a_n - \lim_{n\to\infty} a_n > \varepsilon$$

בסתירה לנתון כי (a_n) מתכנסת לגבול שלה.

4) עבור $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, נסיק מהסעיפים הקודמים שמתקיים –

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^{\frac{p}{q}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(a_n^{\frac{1}{q}} \right)^p \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \left(a_n^{\frac{1}{q}} \right) \right)^p = \left(\left(\lim_{n\to\infty} a_n \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n \right)^{\frac{p}{q}}$$

- **<u>התכנסות צזארו</u>**

א. תהי (a_n) סדרה מתכנסת.

נגדיר סדרה נוספת - $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ (סדרת הממוצעים החשבוניים).

אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} b_n$.

ב. תהי (a_n) סדרה מתכנסת, $a_n > 0$.

נגדיר סדרה נוספת - $c_k = \sqrt[k]{\prod_{n=1}^{k} a_n}$ (סדרת הממוצעים הגאומטריים).

אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} c_k$.

ג. תהי (a_n) סדרה.

נגדיר סדרה נוספת - $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

אם $\lim_{n\to\infty} q_n = L$, אזי $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$.

- <u>הוכחה</u>: (א')

נוכיח תחילה עבור המקרה $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

מהגדרת הגבול עבור (a_n) נובע כי $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0} |a_n| < \varepsilon$.

נגדיר $m = a_1 + a_2 + ... + a_{n_0}$, ונקבל כי –

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n}{n} = \frac{m}{n} + \frac{a_{n_0+1} + ... + a_n}{n}$$

מאריתמטיקה של גבולות עולה $\lim_{n\to\infty} b_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}}_{=0} + \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n_0+1} + ... + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n_0+1} + ... + a_n}{n}$.

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n_1+1} + ... + a_n}{n} = 0$ -

$$\left|\frac{a_{n_1+1} + ... + a_n}{n}\right| \le \frac{|a_{n_1+1}| + ... + |a_n|}{n} < \underbrace{\varepsilon + ... + \varepsilon}_{\frac{n-n_1}{n}} = \frac{n-n_1}{n}\cdot\varepsilon < \varepsilon$$

נוכיח עבור המקרה הכללי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

נגדיר סדרה חדשה - $c_n = a_n - a$. ברור מהנתון כי $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$.

נגדיר את סדרת הממוצעים $d_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$.

נשים לב כי מהחלק הראשון של ההוכחה הראינו כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז גם עבור סדרת הממוצעים שלה מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.

נסיק כי אם $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ אז גם $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k = 0$.

כלומר –

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a\right] = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a\right] = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$$

- <u>הוכחה</u>: (ב')

נשתמש באי-שוויון הממוצעים: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \le \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$

נתון כי $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}=a$. כמו כן מאריתמטיקה של גבולות נובע כי מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}$, ולכן אם נציב במקום הביטוי $a_1+\ldots+a_n$ את הביטוי $\dfrac{1}{a_1}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}$, נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{a}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}=\frac{1}{a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1}=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\right)=a\ .$$

ממשפט הסנדוויץ' נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}=a$.

- <u>הוכחה</u>: (ג')

תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$. צריך להראות כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.

נשים לב כי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cancel{a_1}\cdot\frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_{n-2}}}\cdot\frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}}}\ .$$

מהמסקנה האחרונה כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}=a$, נוכל להסיק גם כי –

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

- **<u>סדרות מונוטוניות</u>**

סדרה נקראת מונוטונית עולה אם מתקיים $\forall_n\ a_n \le a_{n+1}$.

סדרה נקראת מונוטונית עולה ממש אם מתקיים $\forall_n\ a_n < a_{n+1}$.

סדרה נקראת מונוטונית יורדת אם מתקיים $\forall_n\ a_n \ge a_{n+1}$.

סדרה נקראת מונוטונית יורדת ממש אם מתקיים $\forall_n\ a_n > a_{n+1}$.

- **<u>משפט</u>**

סדרה מונוטונית וחסומה היא סדרה מתכנסת.

- <u>הוכחה</u>:

נתון כי (a_n) מונוטונית עולה וחסומה, ולכן קיים חסם עליון L. נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

יש להראות שמתקיים $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ |a_n - L| < \varepsilon$.

L הוא חסם עליון של (a_n) ולכן מתקיים $\exists_{n_0}\ L-\varepsilon < a_n$. (כי אם $L-\varepsilon \ge a_{n_0}$ אז $L-\varepsilon$ חסם עליון ולא L).

נתון ש-(a_n) מונוטונית עולה, ולכן נסיק כי -

$$\forall_{n>n_0}\ L-\varepsilon < a_{n_0} < a_n \le L < L+\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall_{n>n_0}\ L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall_{n>n_0}\ |a_n - L| < \varepsilon$$

- **<u>הלמה של קנטור</u>**

תהי $I_n = [a_n, b_n]$ סדרה של קטעים סגורים, המקיימת $\forall_n\ I_{n+1} \subseteq I_n$.

נניח גם כי $\lim_{x\to\infty} |I_n| = 0$ (נשים לב - $\lim_{x\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$).

אזי קיימת נקודה יחידה $c \in \mathbb{R}$, כך ש- $c \in \bigcap I_n$.

- <u>הוכחה:</u>

חלק א': נוכיח קיום של $c \in \mathbb{R}$, כך ש- $c \in \bigcap I_n$.

נשים לב היטב לנתון $\forall_n \; I_{n+1} \subseteq I_n$.

משמעותו היא $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. כלומר - $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$, ואי-שוויון זה מגדיר את הסדרה (a_n) כסדרה מונוטונית עולה, ואת הסדרה (b_n) כסדרה מונוטונית יורדת.

מאי-שוויון זה נובע גם כי הסדרה (a_n) חסומה מלעיל על ידי איבר כלשהו מהקבוצה (b_n), כלומר - $a_n \le a_{n+1} < b^*$, וכי הסדרה (b_n) חסומה מלרע על ידי איבר כלשהו מהקבוצה (a_n), כלומר - $a^* < b_{n+1} \le b_n$.

הוכחנו שכל סדרה מונוטונית וחסומה היא סדרה שמתכנסת לחסם העליון (אם היא מונוטונית עולה) או התחתון (אם היא מונוטונית יורדת) שלה, ולכן $(a_n),(b_n)$ סדרות מתכנסות.

נסמן: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c_2$.

כלומר - $a_n \le a_{n+1} \le c_1$, $c_2 \le b_{n+1} \le b_n$.

[למה: מתקיים $c_1 \le b_n$, $a_n \le c_2$

נימוק: נניח בשלילה כי קיים אינדקס n', כך ש- $c_1 > b_{n'}$, $b_{n'} \in (b_n)$, אזי מהנתון $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ נובע ש-c_1 אינו חסם עליון של (a_n), כי $b_{n'}$ קטן ממנו ועדיין חוסם את כל איברי (a_n), זאת בסתירה לנתון ש-c_1 חסם עליון של (a_n).]

נסיק כי מתקיים - $a_n \le a_{n+1} \le c_1, c_2 \le b_n \le b_{n+1} \Rightarrow c_1, c_2 \in \bigcap [a_n, b_n] = \bigcap I_n$

חלק ב': נוכיח יחידות של $c \in \mathbb{R}$, כך ש- $c \in \bigcap I_n$. כלומר, נוכיח $c_1 = c_2$.

נניח בשלילה בלי הגבלת הכלליות כי $c_1 < c_2$.

מאי השוויון שהראינו נובע כי - $a_n \le a_{n+1} \le c_1 < c_2 \le b_n \le b_{n+1}$.

נתון במשפט כי $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, ולכן נסיק לפי משפט הסנדוויץ' כי –

$$0 \le \lim_{n\to\infty}(c_1 - c_2) \le \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty}(c_1 - c_2) \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

- **<u>המספר</u>** e

א. הסדרה $\left(a_n\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$, מתכנסת, והגבול שלה מסומן "e".

ב. הסדרה $\left(a_n\right)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $x\in\mathbb{R}$, מתכנסת, והגבול שלה הוא e^x.

- <u>הוכחה</u>: (של א')

נוכיח שזו סדרה מונוטונית עולה ממש וחסומה, ולכן מתכנסת.

ראשית נחשב את ערך הביטוי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ באמצעות הבינום של ניוטון:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\underset{*}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\cdot(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k}}$$

$$* \quad \frac{n!}{(n-k)!}=\frac{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-k)}=(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n$$

.

נסמן: $C_{n.k}=\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{n-k+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}$

- למה 1: $C_{n.k}\le 1$

נימוק: המונה תמיד קטן או שווה למכנה ולכן כל האיברים קטנים או שווים ל-1.

- למה 2: $C_{n+1.k}\ge C_{n,k}$ (סדרה עולה)

נימוק: נשים לב שככלל מתקיים $\frac{n-i}{n}\le\frac{(n+1)-i}{(n+1)}$. (אפשר להוכיח באינדוקציה).

לכן בפרט עבור $C_{n,k}$ מתקיים כי –

$$\underbrace{\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{n-k+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}}_{=C_{n,k}}\le\underbrace{\frac{(n+1)-k+1}{(n+1)}\cdot\frac{(n+1)-k+2}{(n+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)}{(n+1)}}_{=C_{n+1,k}}$$

- למה 3: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\quad\forall_{n,k\in\mathbb{N}}$

נימוק: הראינו בתחילת ההוכחה שמתקיים $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot C_{n.k}$.

נתבסס על למה 1 ונסיק כי - $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot C_{n.k}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

- למה 4: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ סדרה חסומה.

נימוק:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}\le$$
$$\le1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}\underset{*}{=}1+1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\underset{**}{=}1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\le3$$

$$*\quad\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{k-(k-1)}{(k-1)k}=\frac{1}{(k-1)k}$$

$$**\quad\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=1+\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}_{0}+\ldots+\underbrace{\left(-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-2}\right)}_{0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)}_{0}-\frac{1}{n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

- למה 5: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

נימוק: מלמה 2 נובע כי $C_{n+1.k}\ge C_{n,k}$. נסיק –

$$C_{n+1.k}\ge C_{n,k}\Rightarrow\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\cdot C_{n+1.k}\ge\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot C_{n,k}\underset{*}{\Rightarrow}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

* בתחילת ההוכחה חישבנו ומצאנו - $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot C_{n,k}$

מסקנה כללית: מלמה 3 ו-4 יחד ניתן להסיק כי $(a_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא סדרה חסומה. בלמה 5 הסקנו כי $(a_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא סדרה עולה.

לכן נוכל להסיק כי $(a_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת לגבול.

נגדיר: $e \underset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

- <u>הוכחה</u>: (של ב')

  - למה 1: לכל סדרה (c_n) חיובית, עולה ולא חסומה, מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n}=e$.

נימוק: נשים לב כי - $\left(1+\frac{1}{\lfloor c_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor c_n\rfloor} \le \left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor c_n\rfloor}\right)^{\lfloor c_n\rfloor+1}$

נשתמש במשפט הסנדוויץ'.

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor c_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor c_n\rfloor}=\frac{\left(1+\frac{1}{\lfloor c_n\rfloor}\right)^{\lfloor c_n\rfloor+1}}{\left(1+\frac{1}{c_n}\right)}\Rightarrow$$

מצד אחד מתקיים

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor c_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor c_n\rfloor}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor c_n\rfloor}\right)^{\lfloor c_n\rfloor+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_n}\right)}=\frac{e}{1}=e$$

באותו אופן אפשר להסיק כי $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor c_n\rfloor}\right)^{\lfloor c_n\rfloor+1}=e$.

נסיק לפי משפט הסנדוויץ' כי $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n}=e$.

  - למה 2: עבור $x>0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

נימוק: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$

[נשים לב כי בביטוי $\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}$, מופיעה הסדרה $\frac{n}{x}$, שהיא סדרה עולה ולא חסומה, והראינו בלמה 1 שהיא מתכנסת ל- e.]

- למה 3: תהי (ε_n) סדרה של איברים חיוביים, כך ש- $\lim_{n\to\infty} n\cdot\varepsilon_n = 0$, אזי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\varepsilon_n\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\varepsilon_n\right)^n = 1$$

נימוק: נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_n}\right)^{\varepsilon_n} = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\varepsilon_n\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$.

נשתמש במשפט הסנדוויץ', ונסיק -

$$1<\left(1+\varepsilon_n\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}<3$$
$$\Downarrow$$
$$1^{n\varepsilon_n}<\left(\left(1+\varepsilon_n\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right)^{n\varepsilon_n}=\left(1+\varepsilon_n\right)^n<3^{n\varepsilon_n}$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}1^{n\varepsilon_n}<\lim_{n\to\infty}\left(1+\varepsilon_n\right)^n<\lim_{n\to\infty}3^{n\varepsilon_n}$$
$$\Downarrow$$
$$1<\lim_{n\to\infty}\left(1+\varepsilon_n\right)^n<1$$

הוכחנו כי $\lim_{n\to\infty}\left(1+\varepsilon_n\right)^n = 1$, נוכיח כעת כי $\lim_{n\to\infty}\left(1+\varepsilon_n\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\varepsilon_n\right)^n = 1$.

נשים לב לזהות הבאה - $1-y = \frac{1}{1+\frac{y}{y-1}}$. לכן מתקיים $1-\varepsilon_n = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n-1}}$.

נשתמש שוב במשפט הסנדוויץ' –

$$\left(\frac{1}{1+2\varepsilon_n}\right)^n \le \left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}}\right)^n = \left(1-\varepsilon_n\right)^n \le 1$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+2\varepsilon_n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1-\varepsilon_n\right)^n \le 1$$

נשים לב כי - $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+2\varepsilon_n}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+2\varepsilon_n\right)^n} = 1$

- למה 4: עבור $x<0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

נימוק: נשים לב לזהות הבאה - $\frac{1-b^2}{1-b} = \frac{(1+b)(1-b)}{(1-b)} = 1+b$, ולכן מתקיים –

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^{-x}} = e^x$$

נסביר למה מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$ -

נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{nx^2}{n^2}\right) = 0$, ולכן מלמה 3 נובע $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$.

נסביר למה מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$ -

מלמה 2 נובע כי עבור $x>0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

לכן אם $x<0 \Rightarrow -x>0$, נוכל להסיק –

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-x)}{n}\right)^n = e^{-x}$, ולכן $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(e^{-x}\right)^{-1} = e^x$.

- **<u>תתי-סדרות</u>**

תהי (a_n) סדרה, ותהי (n_k) סדרה עולה ממש של אינדקסים.

הסדרה (a_{n_k}) נקראת תת-סדרה של (a_n).

הסבר קצר: נבחר קבוצה אינסופית כלשהי שמוכלת ב-(a_n). נסמן את סדרת האינדקסים שלה (n_k). אם (n_k) סדרה עולה ממש, אז הקבוצה האינסופית היא תת-קבוצה של (a_n).

- **<u>התכנסות במובן הרחב</u>**

הסדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב, אם מתקיים $\forall_{m\in\mathbb{R}} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ a_n > m$ (נסמן זאת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), או אם מתקיים - $\forall_{m\in\mathbb{R}} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ a_n < m$ (נסמן זאת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), או אם היא מתכנסת במובן המוכר לנו.

- **<u>גבול חלקי</u>**

תהי (a_n) סדרה, ותהי (a_{n_k}) תת-סדרה שלה.

אם (a_{n_k}) מתכנסת לגבול (במובן הרחב), אזי הגבול שלה נקרא "גבול חלקי" (במובן הרחב) של (a_n).

- **<u>משפט</u>**

תהי (a_n) היא סדרה מתכנסת לגבול (במובן הרחב), אזי כל תת-סדרה (a_{n_k}) מתכנסת לאותו גבול (במובן הרחב).

- <u>הוכחה</u>:

אם (a_n) מתכנסת במובן הצר, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, מהגדרת התכנסות נובע כי –

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \left|a_n - L\right| < \varepsilon$$

לפי ההגדרה של תת סדרה מתקיים כי $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$, ולכן בפרט גם מתקיים –

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_{k_0}} \forall_{n_k>n_{k_0}} \left|a_{n_k} - L\right| < \varepsilon$$

קיבלנו את הגדרת הגבול L עבור כל סדרה $\left(a_{n_k}\right)$.

אם $\left(a_n\right)$ מתכנסת במובן הרחב, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, מהגדרת התכנסות במובן הרחב נובע כי –

$$\forall_{m\in\mathbb{R}} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ a_n > m$$

לפי ההגדרה של תת סדרה מתקיים כי $\left(a_{n_k}\right) \subseteq \left(a_n\right)$, ולכן בפרט גם מתקיים –

$$\forall_{m\in\mathbb{R}} \exists_{n_{k_0}} \forall_{n_k>n_{k_0}}\ a_{n_k} > m\ .$$

קיבלנו את הגדרת הגבול ∞ עבור כל סדרה $\left(a_{n_k}\right)$.

- <u>מסקנה</u>:

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה. אם יש ל-$\left(a_n\right)$ גבולות חלקיים (במובן הרחב) שונים, אזי היא מתבדרת.

- **<u>משפט</u>**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה.

התנאים הבאים שקולים –

א. $L\in\mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של $\left(a_n\right)$.

ב. כל סביבת ε של L מכילה אינסוף איברים כלשהם של $\left(a_n\right)$.

- <u>הוכחה</u>: (א $\Leftarrow$ ב)

אם L הוא גבול חלקי של $\left(a_n\right)$, משמע קיימת תת-סדרה $\left(a_{n_k}\right)$ שמתכנסת ל-L.

מהגדרת התכנסות נובע כי $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \left|a_{n_k} - L\right| < \varepsilon$, כלומר קיימים אינסוף איברים של $\left(a_{n_k}\right)$ (כל אלה שהאינדקס n שלהם מקיים $n > n_0$) שנמצאים בכל סביבת ε שנבחר.

$\left(a_{n_k}\right) \subseteq \left(a_n\right)$, ולכן קיימים אינסוף איברים של $\left(a_n\right)$ בכל סביבת ε שנבחר.

- <u>הוכחה</u>: (ב $\Leftarrow$ א)

נתון שכל סביבת ε של L מכילה אינסוף איברים כלשהם של (a_n).

נראה כיצד אפשר לבנות תת-סדרה של (a_n) שמתכנסת ל-L, כלומר L גבול חלקי.

זה נכון לכל סביבת ε ובפרט גם עבור $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. ($\varepsilon_n$ הוא סדרה של סביבות).

- עבור $n=1$ מתקיים שהסביבה $\varepsilon_1 = \frac{1}{1} = 1$ מכילה אינסוף איברים של (a_n).
- עבור $n=2$ מתקיים שהסביבה $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ מכילה אינסוף איברים של (a_n).
- $\vdots$

נבנה סדרה חדשה (a_{n_k}) באופן הבא:

- נבחר את האיבר הראשון להיות $a_{n_1} \in \varepsilon_1$, כך ש-$a_{n_1}$ הוא בעל אינדקס מינימלי בקבוצה האינסופית של האיברים שבסביבה ε_1.
- נבחר את האיבר השני להיות $a_{n_2} \in \varepsilon_2$, כך ש-$a_{n_2}$ הוא בעל אינדקס מינימלי בקבוצה האינסופית של האיברים שבסביבה ε_2, וגם $n_2 > n_1$.
- נבחר את האיבר השלישי להיות $a_{n_3} \in \varepsilon_3$, כך ש-$a_{n_3}$ הוא בעל אינדקס מינימלי בקבוצה האינסופית של האיברים שבסביבה ε_3, וגם $n_3 > n_2$.
- $\vdots$

נשים לב שבחרנו את האינדקסים של (a_{n_k}) כך שסדרת האינדקסים n_k היא סדרה עולה ממש, ולכן (a_{n_k}) היא תת-סדרה של (a_n).

תת הסדרה (a_{n_k}) מתכנסת, כי לפי בחירת איבריה מתקיים שלכל a_{n_k} בסביבת ε_n, כל האיברים שהם בעלי אינדקס גבוה ממנו נמצאים גם הם בתוך סביבה זו, כי $\varepsilon_{n+1} \subset \varepsilon_n$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה.

התנאים הבאים שקולים –

א. ∞ הוא גבול חלקי של $\left(a_n\right)$.

ב. $\left(a_n\right)$ לא חסומה מלעיל.

- <u>הוכחה</u>: (א $\Leftarrow$ ב)

נתון כי ∞ הוא גבול חלקי של $\left(a_n\right)$. כלומר, קיימת תת-סדרה $\left(a_{n_k}\right)$ שמתכנסת ל-∞, בגלל ש-$a_{n_k} \subseteq a_n$ נסיק כי $\left(a_n\right)$ לא חסומה.

- <u>הוכחה</u>: (ב $\Leftarrow$ א)

נתון כי $\left(a_n\right)$ לא חסומה מלעיל. כלומר, לכל $s \in \mathbb{R}$ קיים n_0, כך ש-$\forall_{n>n_0}\, a_n > s$.

נראה כיצד אפשר לבנות תת-סדרה של $\left(a_n\right)$ שמתכנסת ל-∞, כלומר ∞ גבול חלקי.

- נבחר את האיבר הראשון להיות $a_{n_1} > 1$.
- נבחר את האיבר השני להיות $a_{n_2} > 2$.
- $\vdots$

קיבלנו תת-סדרה של $\left(a_n\right)$, שמתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

- **<u>משפט בולצאנו-ויירשטראס</u>**

לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת.

- <u>הוכחה</u>:

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה חסומה. נראה כיצד אפשר לבנות תת-סדרה של $\left(a_n\right)$ שמתכנסת.

1. אם $\left(a_n\right)$ חסומה, משמע קיימים מספרים ממשיים c_0, b_0, כך ש-$\forall_n\, c_0 < a_n < b_0$

- נחצה את הקטע $\left[c_0,b_0\right]$ לשני קטעים $\left[\frac{c_0+b_0}{2},b_0\right]$, $\left[c_0,\frac{c_0+b_0}{2}\right]$.

  מכיוון שהסדרה $\left(a_n\right)$ מכילה אינסוף איברים, נסיק שלפחות אחד מהקטעים הללו מכיל אינסוף איברים.

  נבחר את הקטע שמכיל אינסוף איברים, ונסמן אותו $\left[c_1,b_1\right]$.

- נחצה את הקטע $\left[c_1,b_1\right]$ לשני קטעים $\left[\frac{c_1+b_1}{2},b_1\right]$, $\left[c_1,\frac{c_1+b_1}{2}\right]$.

  מכיוון שהסדרה $\left(a_n\right)$ מכילה אינסוף איברים, נסיק שלפחות אחד מהקטעים הללו מכיל אינסוף איברים.

  נבחר את הקטע שמכיל אינסוף איברים, ונסמן אותו $\left[c_2,b_2\right]$.

- $\vdots$

2. עבור כל אחד מהקטעים הללו מתקיים כי –
   a. כל קטע הוא סגור (כך הגדרנו)
   b. כל קטע מוכל בכל הקודמים לו (כך הגדרנו)
   c. כל קטע מכיל אינסוף איברים (כך הגדרנו)
   d. סדרת אורכי הקטעים מתכנסת לאפס (אורכי הקטעים מתקצרים בחצי בכל פעם. כלומר, סדרת אורכי הקטעים היא $\frac{1}{2^n}$. קל להוכיח שזו סדרה מתכנסת לאפס).
3. מהתנאים שבסעיף 2 נובע שסדרת הקטעים הללו מקיימת את תנאי הלמה של קנטור, ולכן נסיק שקיימת נקודה יחידה $L\in\mathbb{R}$, כך ש-$L\in\bigcap\left[c_n,b_n\right]$.
4. נבנה תת-סדרה $\left(a_{n_k}\right)$ שמתכנסת לנקודה היחידה L -

   נבחר את האיברים באופן הבא – $a_{n_1}\in\left[c_1,b_1\right]$, $a_{n_2}\in\left[c_2,b_2\right],\ldots$.

   נבחר אותם כך ש- $n_k<n_{k+1}$. (ידוע שיש אינסוף אינדקסים ולכן זה אפשרי).
5. למה: $\left(a_{n_k}\right)$ סדרה מתכנסת.

   נימוק: מסעיף b2 עולה שכל קטע $\left[c_k,b_k\right]$ מכיל את כל הקטעים שאחריו.

המרחק בין כל שני איברים ששייכים לקטע $\left[c_k, b_k\right]$ כלשהו קטן מאורך הקטע עצמו. כלומר, קטן מ- $\frac{c_k + b_k}{2^k}$.

לכן בפרט גם המרחק בין L (ששייך לכל הקטעים) לבין כל איבר אחר בכל קטע $\left[c_k, b_k\right]$ כלשהו תמיד קטן מ- $\frac{c_k + b_k}{2^k}$.

נבטא זאת פורמלית: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_0} \forall_{k>k_0} \left|a_{n_k} - L\right| < \frac{c_k + b_k}{2^k} < \frac{c_k + b_k}{2^{k_0}}$.

[נימוק: האי-שוויון השני נובע מכך ש- $k > k_0$.]

אם כך מצאנו קבוע חיובי קטן כרצוננו, $\frac{c_k + b_k}{2^{k_0}}$, שמקיים את הגדרת הגבול. נקרא לו ε.

- <u>מסקנה</u>: (מיידית) ממשפט בולצאנו-ויירשטראס ומהמשפט הקודם נובע שלכל סדרה קיימת תת-סדרה שמתכנסת במובן הרחב.

- **<u>משפט</u>**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה חסומה ומתבדרת, אזי יש לה לפחות שני גבולות חלקיים.

- <u>הוכחה</u>:

$\left(a_n\right)$ חסומה, ולכן לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס קיים גבול חלקי אחד שנסמן ב- a.

נבנה תת-סדרה של $\left(a_n\right)$ שגם היא חסומה ומתבדרת, ולכן נוכל להפעיל פעם שנייה את משפט בולצאנו-ויירשטראס ולהראות שגם לה יש גבול חלקי a^*.

נתון כי $\left(a_n\right)$ מתבדרת, ובפרט גם אינה מתכנסת לגבול החלקי a, ולכן משלילת הגדרת הגבול נובע ש- $\exists_{\varepsilon>0} \forall_{n_0} \exists_{n>n_0} \left|a_n - a\right| > \varepsilon$.

כלומר, קיימים אינסוף אינדקסים שעבורם $\left|a_n - a\right| > \varepsilon$.

נגדיר תת-סדרה של $\left(a_n\right)$ כך - $\left\{a_n \middle| \left|a_n - a\right| \geq \varepsilon\right\}$.

קבוצה זו היא אינסופית, כי כאמור קיימים אינסוף אינדקסים כאלה. לכן קיימת סדרת אינדקסים $\left(n_k\right)$ שעוברת על איברי הקבוצה הזו.

נסמן $\left(a_{n_k}\right) = \left\{a_n \middle| \left|a_n - a\right| \geq \varepsilon\right\}$.

$\left(a_{n_k}\right)$ חסומה כי היא תת-סדרה של הסדרה החסומה $\left(a_n\right)$.

ממשפט בולצאנו-ויירשטראס נובע שגם עבור הסדרה $\left(a_{n_k}\right)$ קיימת תת-סדרה $\left(a_{n_{k_l}}\right)$ שמתכנסת לגבול a^*.

למה: $a \neq a^*$.

נימוק: בחרנו את איברי הסדרה $\left(a_{n_k}\right)$ כך שמתקיים תמיד $\left|a_{n_k} - a\right| \geq \varepsilon$, ולכן בפרט גם מתקיים כי $\left|a_{n_{k_l}} - a\right| \geq \varepsilon$.

נניח בשלילה $a = a^*$, אזי נקבל סתירה להנחה ש-$\left(a_{n_{k_l}}\right)$ מתכנסת ל-a^*.

- <u>מסקנה</u>: אם $\left(a_n\right)$ סדרה חסומה, הטענות הבאות שקולות –

א. $\left(a_n\right)$ מתכנסת

ב. ל-$\left(a_n\right)$ קיים גבול חלקי יחיד

(א $\Leftarrow$ ב) ממשפט שהוכחנו קודם שקובע שכל הגבולות החלקיים של סדרה מתכנסת שווים.

(ב $\Leftarrow$ א) מהמשפט שהוכחנו כעת.

הערה: אם $\left(a_n\right)$ אינה חסומה ייתכן שיש לה גבול חלקי יחיד ועדיין היא לא מתכנסת. למשל הסדרה $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots$

- **<u>משפט</u>**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה, ותהי $\left(b_n\right)$ סדרה של גבולות חלקיים של $\left(a_n\right)$.

אם $\left(b_n\right)$ מתכנסת ל-b, אזי b היא גבול חלקי של $\left(a_n\right)$.

- <u>הוכחה</u>:

ממשפט קודם נובע שכדי להראות ש-b גבול חלקי של $\left(a_n\right)$ מספיק להראות שבכל סביבה של b קיימים אינסוף איברים של $\left(a_n\right)$.

מהנתון ש-$\left(b_n\right)$ מתכנסת ל-b נובע $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n>n_0} \left|b_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

בפרט, למשל, עבור $n_1 > n_0$ מתקיים $\left|b_{n_1} - b\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$b_{n_1} \in (b_n)$ ולכן הוא עצמו גבול חלקי כלשהו של הסדרה (a_n). כלומר, קיימת תת-סדרה של (a_n) שאם נבחר למשל את הסביבה $\frac{\varepsilon}{4}$, כל האיברים שלה נמצאים בתוך האינטרוול $\left(b_{n_1} - \frac{\varepsilon}{4}, b_{n_1} + \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

נשים לב כי $\left(b_{n_1} - \frac{\varepsilon}{4}, b_{n_1} + \frac{\varepsilon}{4}\right) \subset (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, ולכן גם האינטרוול $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ מכיל אינסוף איברים של התת-סדרה של (a_n), ולכן הוא מכיל אינסוף איברים של (a_n) עצמה.

- <u>**גבול עליון ותחתון**</u>

תהי (a_n) סדרה חסומה.

"גבול עליון": נגדיר את הסדרה (b_m) להיות סדרת החסמים העליונים של ה"זנבות" –

$$\begin{aligned} &b_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\} \\ &b_2 = \sup\{a_2, a_3, a_4, ...\} \\ &\vdots \\ &b_m = \sup\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ...\} \end{aligned}$$

הגבול של הסדרה (b_m) מוגדר להיות "גבול עליון" של (a_n).

"גבול תחתון": נגדיר את הסדרה (b_m) להיות סדרת החסמים התחתונים של ה"זנבות" -

$$\begin{aligned} &b_1 = \inf\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\} \\ &b_2 = \inf\{a_2, a_3, a_4, ...\} \\ &\vdots \\ &b_m = \inf\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ...\} \end{aligned}$$

הגבול של הסדרה (b_m) מוגדר להיות "גבול תחתון" של (a_n).

<u>הסבר</u>: (נתייחס להגדרת גבול עליון)

הסדרה (b_m) מונוטונית יורדת (לא בהכרח יורדת ממש).

לפי ההגדרה מתקיים $b_m = b_{m+1} + a_m$ ולכן $b_{m+1} \subset b_m$. נסיק כי החסם העליון של b_m גדול או שווה לחסם העליון של b_{m+1}.

הסדרה $\left(b_m\right)$ היא גם סדרה חסומה, כי הנחנו ש-$\left(a_n\right)$ סדרה חסומה.

אם כך $\left(b_m\right)$ מונוטונית יורדת וחסומה, ולכן יש לה גבול ששווה לחסם התחתון שלה.

- <u>סימון:</u>

גבול עליון נסמן - $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right) = \inf\left(\sup\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right)$

גבול תחתון נסמן - $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right) = \sup\left(\inf\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right)$

- **<u>משפט</u>**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה חסומה. אזי - $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

- <u>הוכחה:</u>

הגדרנו גבול עליון ותחתון באופן הבא –

$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right)$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right)$.

נשים לב שמהגדרת חסם עליון ותחתון נובע כי $\sup\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty} \geq \inf\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}$, וממשפט שהוכחנו לגבי גבולות נסיק כי גם $\lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\inf\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right)$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה חסומה, ויהי $s = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

אם $s < t$, אזי מתקיים $a_n < t$ תמיד, פרט למספר סופי של אינדקסים.

- <u>הוכחה:</u>

נסמן $b_m = \sup\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}$. לפי הגדרת גבול עליון מתקיים $s = \lim_{m\to\infty} b_m$.

מהגדרת הגבול נובע שקיים אינדקס m_0, כך ש-$\left|b_{m_0} - s\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. נסיק מכך - $b_{m_0} < s + \frac{\varepsilon}{2}$.

נשים לב שהגדרנו $b_m = \sup\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$, ולכן $a_n \le b_{m_0} < s+\frac{\varepsilon}{2}$.

הטענה נכונה לכל ε ולכן בפרט גם עבור $\varepsilon = t-s$ (ניתן לבחור כך כי $s<t$)

נסיק כי - $a_n \le b_{m_0} < s+\frac{\varepsilon}{2} < s+\varepsilon = t$

נשים לב שטענה זו נכונה תמיד החל מ- m_0, ולכן היא נכונה תמיד פרט למספר מקרים סופי.

- **<u>משפט</u>**

תהי (a_n) סדרה חסומה.

הגבול העליון הוא הגבול החלקי המקסימלי.

הגבול התחתון הוא הגבול החלקי המינימלי.

- <u>הוכחה</u>:

נסמן $s = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

ראשית נראה כי כל t שמקיים $t>s$ הוא לא גבול חלקי של (a_n).

שנית נראה כי s הוא גבול חלקי של (a_n).

  - נניח כי $t>s$. נסמן $\varepsilon = t-s$.

  מהמשפט הקודם נובע כי מתקיים תמיד $a_n < t$, פרט למספר סופי של אינדקסים שעבורם מתקיים $a_n > t > t-\frac{\varepsilon}{2} > t-\varepsilon = s$.

  מכאן נובע שהסביבה $\left(t-\frac{\varepsilon}{2}, t+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ מכילה רק מספר סופי של איברים, ולכן בהכרח t אינו גבול חלקי של (a_n).

  - נראה כי s הוא גבול חלקי של (a_n), באמצעות הטענה השקולה שכל סביבה של s מכילה אינסוף איברים ששייכים ל-(a_n).

  כלומר, נרצה להוכיח שבכל סביבת ε קיימים אינסוף איברים המקיימים –

$$|a_n - s| < \varepsilon \Leftrightarrow s-\varepsilon < a_n < s+\varepsilon$$

- צד ראשון של אי השוויון נובע מכך שהגדרנו $s=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, ולכן ממשפט קודם נובע שמתקיים תמיד $a_n<s+\varepsilon$ פרט למספר סופי של מקרים.
- צד שני של אי השוויון נוכיח על דרך השלילה: נניח בשלילה שהסביבה $\left(s-\varepsilon,s+\varepsilon\right)$, מכילה רק מספר סופי של איברים.

כלומר, קיים אינדקס n_1 שהוא האינדקס המקסימלי של מספר סופי של איברים $n<n_1$, ועד אליו מתקיים $a_n>s-\varepsilon$, ולאינסוף האיברים $n>n_1$ מתקיים $a_n\le s-\varepsilon$.

אם לאינסוף איברים מתקיים $a_n\le s-\varepsilon$, אז בפרט גם עבור m כלשהו, $m>n_1$, מתקיים $a_m\le s-\varepsilon$.

אם עבור m כלשהו, $m>n_1$, מתקיים $a_m\le s-\varepsilon$, משמע עבור הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}$ מתקיים $\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\le s-\varepsilon$.

בסתירה למה שהגדרנו -

$$s=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow s-\varepsilon<\left\{a_n\right\}_{n=m}^{\infty}<s+\varepsilon$$

- **<u>משפט</u>**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה חסומה.

הטענות הבאות שקולות –

א. $\left(a_n\right)$ סדרה מתכנסת

ב. $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$

- <u>הוכחה:</u>

ממשפט קודם נובע ש-$\left(a_n\right)$ מתכנסת אמ"מ כל הגבולות החלקיים שלה שווים. גבול עליון וגבול תחתון הם גבולות חלקיים, ולכן בפרט גם מתקיים $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$.

- **<u>משפט</u>**

יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות חסומות, ומתקיים $a_n \le b_n$.

אזי –

א. $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$

ב. $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n$

- <u>הוכחה</u>:

ממשפט קודם עולה כי $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ הוא גבול חלקי מקסימלי של (a_n). כלומר, קיימת תת-סדרה (a_{n_k}) שמתכנסת ל- $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

נבחר תת-סדרה של (b_n) כך שהאינדקסים יהיו האינדקסים של (a_{n_k}). כלומר, (b_{n_k}).

נשים לב כי $\forall_n\ a_n \le b_n$ ולכם בפרט גם $a_{n_k} \le b_{n_k}$.

הסדרה (b_{n_k}) חסומה, כי היא תת-סדרה של הסדרה החסומה (b_n).

ממשפט בולצאנו-ויירשטראס עולה כי קיימת עבור (b_{n_k}) תת-סדרה מתכנסת, $(b_{n_{k_l}})$. נסמן את הגבול של $(b_{n_{k_l}})$ ב- b.

נבחר תת-סדרה של (a_{n_k}) כך שהאינדקסים יהיו האינדקסים של $(b_{n_{k_l}})$. כלומר, $(a_{n_{k_l}})$.

נשים לב כי אם $\forall_n\ a_{n_k} \le b_{n_k}$, מתקיים בפרט כי $a_{n_{k_l}} \le b_{n_{k_l}}$.

ממשפט שהוכחנו על גבולות נובע כי אם $a_{n_{k_l}} \le b_{n_{k_l}}$ אז $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} \le \lim_{l\to\infty} b_{n_{k_l}}$.

נשים לב כי מתקיים $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}}$, כי $(a_{n_{k_l}})$ תת-סדרה של הסדרה (a_{n_k}).

וכמו כן נשים לב כי מתקיים $\lim_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} = b \le \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$, כי b הוא גבול חלקי, ו- $\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$ הוא גבול חלקי מקסימלי.

נסיק כי - $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \le b \le \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$

- **<u>אריתמטיקה של גבולות עליונים ותחתונים</u>**

יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות חסומות. אזי –

א. $\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n)=-\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$

ב. $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\ge\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}b_n$

ג. אם שתי הסדרות אי-שליליות אזי גם –

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n\cdot b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n\quad,\quad\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n\cdot b_n)\ge\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}b_n$$

- <u>הוכחה</u>: (של ב')

נתון כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$ הוא גבול חלקי של הסדרה $(a_n)+(b_n)$, ולכן קיימת תת-סדרה $(a_{n_k})+(b_{n_k})$, שמתכנסת ל- $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$.

(a_{n_k}) היא סדרה חסומה כי היא תת-סדרה של הסדרה החסומה (a_n), ולכן ממשפט בולצאנו ויירשטראס נובע שיש לה תת-סדרה $(a_{n_{k_l}})$ שמתכנסת ל- a כלשהו.

נבחר תת-סדרה של (b_{n_k}) להיות סדרה עם האינדקסים (n_{k_l}).

$(b_{n_{k_l}})$ היא סדרה חסומה כי היא תת-סדרה של הסדרה החסומה (b_n), ולכן יש לה תת-סדרה $(b_{n_{k_{l_m}}})$ שמתכנסת ל- b כלשהו.

נבחר תת-סדרה של $(a_{n_{k_l}})$ להיות סדרה עם האינדקסים $(n_{k_{l_m}})$. נשים לב כי $(a_{n_{k_{l_m}}})$ היא תת-סדרה של $(a_{n_{k_l}})$, ולכן גם היא מתכנסת ל- a.

הוכחנו במשפט קודם שגבול של סכום של סדרות מתכנסות הוא סכום הגבולות, ולכן מתקיים $\lim_{l\to\infty}\left(a_{n_{k_{l_m}}}+b_{n_{k_{l_m}}}\right)=a+b$.

נשים לב כי מתקיים $a+b\le\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$, בגלל ש- a,b הם גבולות חלקיים, ו- $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n,\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ הם גבולות חלקיים מקסימליים.

נשים לב שמצד שני מתקיים $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)=\lim_{l\to\infty}\left(a_{n_{k_{l_m}}}+b_{n_{k_{l_m}}}\right)$, כי $\left(a_{n_{k_{l_m}}}\right)+\left(b_{n_{k_{l_m}}}\right)$ היא תת-סדרה של הסדרה $\left(a_{n_k}\right)+\left(b_{n_k}\right)$ שמתכנסת ל-$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)$.

ולכן נסיק כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)=\lim_{l\to\infty}\left(a_{n_{k_{l_m}}}+b_{n_{k_{l_m}}}\right)=a+b\le\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $\left(a_n\right)$ סדרה מתכנסת ל- a כלשהו, ותהי $\left(b_n\right)$ סדרה חסומה.

אזי - $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n=a+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$

אם בנוסף הסדרות אי-שליליות, מתקיים גם - $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n\cdot b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n=a\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

- <u>הוכחה:</u>

מאריתמטיקה של גבולות עליונים עולה כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n=a+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

[$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=a$ כי זה גבול חלקי של סדרה מתכנסת.]

אם נוכיח שהביטוי $a+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ הוא גבול חלקי של $\left(a_n\right)+\left(b_n\right)$, נוכל להסיק שמתקיים $a+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)$, ומשני אי השוויונים החלשים נקבל שוויון.

ידוע כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ הוא גבול חלקי של $\left(b_n\right)$, ולכן קיימת תת-סדרה $\left(b_{n_k}\right)$ שמתכנסת ל- $\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

נבחר תת-סדרה של $\left(a_n\right)$ כך שסדרת האינדקסים שלה תהיה אותה סדרה אינדקסים של $\left(b_{n_k}\right)$. כלומר $\left(a_{n_k}\right)$.

מהנתון ש-$\left(a_n\right)$ מתכנסת ל- a נובע כי גם תת הסדרה $\left(a_{n_k}\right)$ מתכנסת ל- a.

ולכן נוכל להסיק $\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}a_{n_k}+\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=a+\overline{\lim_{k\to\infty}}b_{n_k}$

אם כך מצאנו כי תת-סדרה של $\left(a_n\right)+\left(b_n\right)$ מתכנסת ל- $a+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$, ולכן $a+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ גבול חלקי של $\left(a_n\right)+\left(b_n\right)$, כמבוקש.

- **<u>סדרת קושי</u>**

הדיון בשאלת גבול של סדרה עד עתה נגע לשאלת זיהוי הגבול של סדרה כלשהי, והוכחה שזהו אכן הגבול. תנאי קושי מאפשר לדון בשאלת ההתכנסות של סדרה במנותק מהזיהוי של הגבול המסוים שלה.

נוכיח כי קיימת שקילות בין התכנסות של סדרה לבין היותה מקיימת את תנאי קושי.

- <u>הגדרה</u>:

תהי (a_n) סדרה.

(a_n) נקראת "סדרת קושי" אם - $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{m,n>n_0}\,|a_m-a_n|<\varepsilon$.

- **<u>משפט</u>**

הטענות הבאות שקולות –

א. (a_n) סדרה מתכנסת

ב. (a_n) סדרת קושי

- <u>הוכחה</u>: (א $\Leftarrow$ ב)

נתון ש-(a_n) מתכנסת ל- a. כלומר $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{n>n_0}\,|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

נבחר m,n כלשהם כך ש-$m,n>n_0$, עבור שניהם מתקיים $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $|a_m-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

לכן נסיק - $|a_m-a_n|=|a_m-a+a-a_n|\le|a_m-a|+|a-a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

- <u>הוכחה</u>: (ב $\Leftarrow$ א)

1. <u>למה</u>: אם (a_n) סדרת קושי אז היא סדרה חסומה.

<u>נימוק</u>: מההגדרה של (a_n) כסדרת קושי נובע $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{m,n>n_0}\,|a_m-a_n|<\varepsilon$.

הטענה נכונה לכל ε, ולכן לצורך הפשטות נבחר $\varepsilon=1$. כלומר עבור $\varepsilon=1$ קיים n_0, כך שלכל $m,n>n_0$ מתקיים $|a_m-a_n|<1$.

הטענה נכונה לכל $m,n>n_0$, אז נבחר $m=n_0+1$ ונקבל –

$$\left|a_m - a_n\right| < 1 \Leftrightarrow \left|a_{n_0+1} - a_n\right| < 1 \Leftrightarrow a_{n_0+1} - 1 < a_n < a_{n_0+1} + 1$$

הביטוי $a_{n_0+1} \pm 1$ הוא קבוע כלשהו, ולכן הסדרה $\left(a_n\right)$ חסומה על ידי $a_{n_0+1} \pm 1$ החל מהאיבר עם האינדקס n_0.

מספר האיברים שהאינדקס שלהם נמוך מ- n_0 הוא סופי, ולכן חסום ע"י t כלשהו.

נסיק כי הסדרה כולה חסומה על-ידי המקסימום שבין $a_{n_0+1} \pm 1$ ובין t.

2. הראינו שאם $\left(a_n\right)$ סדרת קושי אז היא סדרה חסומה, ולכן ממשפט בולצאנו-ויירשטראס נובע שיש ל- $\left(a_n\right)$ תת-סדרה מתכנסת $\left(a_{n_k}\right)$. נסמן $\left(a_{n_k}\right) \to a$.

3. <u>למה</u>: גם $\left(a_n\right)$ עצמה מתכנסת ל- a.

<u>נימוק</u>: נתון כי $\left(a_n\right)$ סדרת קושי, ולכן $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{m,n>n_0} \left|a_m - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

תת הסדרה $\left(a_{n_k}\right)$ מתכנסת ל- a, ולכן $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_{k_0}} \forall_{n_k > n_{k_0}} \left|a_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

הטענה נכונה לכל $n_k > n_{k_0}$, אז נבחר $n_k = n_{k_0+1}$.

נבחר $m_0 = \max\left(n_{k_0+1}, n_0\right)$, ולכן לכל $m,n > m_0$ מתקיימות שתי המסקנות.

נקבל שלכל $n,m > m_0$ מתקיים -

$$\left|a_n - a\right| = \left|a_n - a_{n_{k_0+1}} + a_{n_{k_0+1}} - a\right| \le \left|a_n - a_{n_{k_0+1}}\right| + \left|a_{n_{k_0+1}} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- **<u>התכנסות במובן הרחב</u>**

הסדרה $\left(a_n\right)$ מתכנסת במובן הרחב, אם מתקיים - $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n > m$ (נסמן זאת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), או אם מתקיים - $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n < m$ (נסמן זאת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), או אם היא מתכנסת.

- **<u>יחידות הגבול במובן הרחב</u>**

אם סדרה מתכנסת במובן הרחב, אזי הגבול שלה במובן הרחב יחיד.

- <u>הוכחה</u>:

  - עבור $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, הוכחנו שכל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה, ולכן לפי ההגדרה של חסם מלעיל נובע כי $\exists_{m\in\mathbb{R}}\ \forall_n\ a_n < m$, ולכן היא בהכרח לא מתכנסת במובן הרחב לגבול אחר.
  - עבור $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, מההגדרה נובע כי $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n > m$, ולכן נוכל להסיק כי אין לסדרה חסם מלעיל. הוכחנו שכל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה, ולכן סדרה שאינה חסומה אינה מתכנסת.

- **<u>אריתמטיקה של גבולות אינסופיים</u>**

1. תהי $\left(a_n\right)$ סדרה מתכנסת במובן הרחב ל-∞, ותהי $\left(b_n\right)$ סדרה חסומה מלרע.
אזי מתקיים כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \infty$.

<u>הוכחה</u>:

מהנתון ש-$\left(b_n\right)$ חסומה מלרע נובע כי $\exists_{c\in\mathbb{R}}\ \forall_n\ b_n \ge c$.

מהגדרת התכנסות במובן הרחב עבור $\left(a_n\right)$ נובע כי $\forall_{k\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n > k$.

נרצה להוכיח שמתקיימת התכנסות במובן הרחב - $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ a_n + b_n > m$.

נגדיר $k = m - c$, ונסיק שמתקיים – $\forall_{k\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ a_n + b_n > k + c = m$

2. תהי $\left(a_n\right)$ סדרה מתכנסת ל-∞, ותהי $\left(b_n\right)$ סדרה, וגם $\exists_{k>0}\ \forall_n\ b_n > k$.
אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \infty$.

<u>הוכחה:</u>

צריך להראות $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n\cdot b_n>m$.

מהנתון ש-(a_n) מתכנסת במובן הרחב נובע $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n>\frac{\max(m,0)}{k}$.

נסיק שמתקיים -

$$\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n\cdot b_n>a_n\cdot k>\frac{\max(m,0)}{k}\cdot k=\max(m,0).$$

- **<u>משפט</u>**

יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות, ונניח כי $\forall_n\ b_n<a_n$. אזי –

א. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$

- <u>הוכחה:</u>

$$\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ b_n>m\wedge a_n>b_n\Rightarrow\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n>m$$

- **<u>משפט</u>**

תהי (a_n) סדרה, ונניח כי $\forall_n\ a_n\neq 0$. אזי –

א. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\pm\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=\infty$

- <u>הוכחה:</u>

צריך להראות שמתקיים $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\left|\frac{1}{a_n}-0\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}<|a_n|$.

מהנתון ש-(a_n) מתכנסת במובן הרחב לאינסוף נובע $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ a_n>m$.

ההגדרה קובעת כי הדבר מתקיים לכל m. נבחר $m=\frac{1}{\varepsilon}$ ונקבל - $|a_n|>\frac{1}{\varepsilon}=m$.

- **<u>משפט</u>**

כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

- <u>הוכחה</u>:

אם $\left(a_n\right)$ מונוטונית וחסומה אז היא מתכנסת, ולכן מתכנסת במובן הרחב.

אם $\left(a_n\right)$ מונוטונית ואינה חסומה, נסיק כי - $\neg\left(\exists_{m\in\mathbb{R}}\ \forall_n\ a_n \le m\right) \Rightarrow \forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ a_{n_0} > m$.

ומכיוון שהסדרה מונוטונית, ניתן לקבוע שמתקיים לכל $n > n_0$ כי $a_n > m$.

קיבלנו את ההגדרה של התכנסות במובן הרחב לאינסוף.

- **<u>הכללה של משפט בולצאנו-ויירשטראס</u>**

לכל סדרה $\left(a_n\right)$ יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.

- <u>הוכחה</u>:

אם $\left(a_n\right)$ חסומה, משפט בולצאנו-ויירשטראס קובע שיש תת-סדרה מתכנסת במובן הצר.

אם $\left(a_n\right)$ לא חסומה, נבנה תת-סדרה שמתכנסת לאינסוף באופן הבא -

קיים אינדקס n_1 כך ש- $1 < a_{n_1}$

קיים אינדקס n_2 כך ש- $2 < a_{n_2}$

$\vdots$

קיים אינדקס n_k כך ש- $k < a_{n_k}$

$\vdots$

הסדרה $\left(a_{n_k}\right)$ שבנינו היא תת-סדרה של $\left(a_n\right)$, וכמו-כן, מאופן בניית תת הסדרה נובע שמתקיים $\forall_{n_k}\ a_{n_k} > k$. זו ההגדרה של התכנסות לאינסוף.

יחידה 3 – גבולות ורציפות

- **מונחים מתורת הקבוצות**

  - פונקציה (או העתקה) היא פעולה המתאימה לכל איבר בקבוצה אחת, איבר יחיד בקבוצה אחרת.

    סימון: אם למשל הפונקציה f מתאימה לכל איבר בקבוצה A איבר יחיד בקבוצה B, נסמן זאת $f: A \to B$.

    או: $f(a)=b$ $\forall_{a\in A}\exists_{b\in B}$ (b יחיד)

  - פונקציה חד-חד ערכית היא פונקציה $f: A \to B$ שמקיימת את הפסוק הבא –

$$\forall_{a_1,a_2\in A}\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

  - פונקציה על היא פונקציה $f: A \to B$ שמקיימת את הפסוק הבא –

$$\forall_{b\in B}\exists_{a\in A}\ f(a)=b$$

  - תחום של הפונקציה $f: A \to B$ הוא הקבוצה A.

  - טווח של הפונקציה $f: A \to B$ הוא הקבוצה B.

  - תמונה של הפונקציה $f: A \to B$ היא הקבוצה $\left\{b\in B \middle| \exists_{a\in A}\ f(a)=b\right\}$

  - צמצום של הפונקציה $f: A \to B$ לקבוצה $C \subseteq A$ היא הקבוצה

$$\left\{b\in B \middle| \exists_{c\in C}\ f(c)=b\right\}$$

    סימון: הצמצום של $f: A \to B$ ל-$C \subseteq A$ מסומן $f\big|_C : C \to B$.

  - מקור של הקבוצה $D \subseteq B$, בפונקציה $f: A \to B$ הוא הקבוצה

$$\left\{a\in A \middle| \exists_{d\in D}\ f(x)=d\right\}$$

  - פונקציית הזהות (id_x) היא פונקציה $f: A \to A$, כך שמתקיים $\forall_{a\in A}\ f(a)=a$

  - מכפלה קרטזית של הקבוצות A,B היא הקבוצה $A\times B=\left\{(a,b) \middle| a\in A, b\in B\right\}$

- <u>**פונקציות ממשיות**</u>

  - <u>פונקציה ממשית</u> היא פעולה המתאימה לכל איבר בקבוצה ממשית אחת, איבר יחיד בקבוצה ממשית אחרת.

    כלומר, אם $X \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}$, אז הפונקציה $f : X \to Y$ נקראת פונקציה ממשית.

  - <u>גרף של פונקציה ממשית</u> $f : X \to Y$ הוא הקבוצה $\{(x, f(x)) | x \in X\}$

    הגרף של כל פונקציה $f : X \to Y$ מוכל במכפלה הקרטזית $X \times Y$.

  - <u>פונקציה זוגית</u> $f : X \to Y$, היא פונקציה ממשית המקיימת את התנאי –

$$\forall_{x \in X} \; -x \in X \wedge f(-x) = f(x)$$

  - <u>פונקציה אי-זוגית</u> $f : X \to Y$, היא פונקציה ממשית המקיימת את התנאי –

$$\forall_{x \in X} \; -x \in X \wedge f(-x) = -f(x)$$

  - <u>פונקציה מחזורית</u> $f : X \to Y$, היא פונקציה ממשית המקיימת את התנאי –

$$\exists_{r \in \mathbb{R}} \left(x \in X \wedge x + r \in X \right) \Rightarrow f(x) = f(x + r)$$

- <u>דוגמאות למשפחות של פונקציות ממשיות:</u>

1. הפונקציות הפולינומיאליות - $\forall_{f:X \to Y} \; f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$.
2. הפונקציות הרציונליות - $\forall_{f:X \to Y} \; u(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x)$, $q(x)$ פולינומים.
3. פונקציות החזקה - $\forall_{f:X \to Y} \; f(x) = a^x$, $a > 0$.
4. הפונקציות הטריגונומטיות - $\sin, \cos, \tan \ldots$

- **<u>גבול של פונקציה בנקודה</u>**

- <u>סביבה מנוקבת</u>: תהי $x_0 \in \mathbb{R}$, ויהי $0 < r \in \mathbb{R}$.

הקבוצה $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| 0 < |x - x_0| < r\right\}$ מוגדרת כסביבה מנוקבת של x_0.

כלומר, זו קבוצת כל הנקודות שמרוחקות עד-כדי רדיוס r מהנקודה x_0, ללא x_0 עצמה.

- <u>גבול של פונקציה בנקודה</u>: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

נאמר ש-L הוא הגבול של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0, אם –

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_x \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

במילים: L הוא הגבול של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0, אם לכל סביבת ε מלאה של L, קיימת סביבת δ מנוקבת של x_0, כך שלכל x ששייך לסביבה δ מתקיים כי $f(x)$ שייך לסביבה המלאה ε.

נסמן את הגבול בנקודה x_0 כך: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

- **<u>יחידות הגבול</u>**

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

אם $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ וגם $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = M$ אזי $L = M$.

- <u>הוכחה</u>:

נניח בשלילה כי $L \neq M$, ולכן נוכל להגדיר $\varepsilon = |M - L|$.

מהנתון $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ נובע כי קיים δ_1 עבורו $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

מהנתון $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = M$ נובע כי קיים δ_2 עבורו $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$.

נגדיר $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, ונקבל סתירה –

$$\varepsilon = |M - L| = |M - f(x) + f(x) - L| \leq |M - f(x)| + |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$$

- **<u>שלילת הגבול</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

נאמר ש- L הוא <u>לא</u> הגבול של הפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה x_0, אם –

$$\exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \exists_x\ 0<\left|x-x_0\right|<\delta\wedge\left|f\left(x\right)-L\right|\geq\varepsilon$$

במילים: L הוא <u>לא</u> הגבול של הפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה x_0, אם קיימת סביבת ε מלאה של L, כך שלכל סביבת δ מנוקבת של x_0, קיים x שגם שייך לסביבה δ וגם מתקיים עבורו כי $f\left(x\right)$ אינה שייכת לסביבת ε מלאה של L.

- **<u>משפט</u>**

יהיו $f\left(x\right), g\left(x\right)$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0.

נניח כי קיימת סביבה מנוקבת של x_0, שנסמן ב- V_{x_0}, כך ש- $f\left(x\right)\Big|_{V_{x_0}}=g\left(x\right)\Big|_{V_{x_0}}$, אזי L הוא גבול של $f\left(x\right)$ בנקודה x_0, אם ורק אם הוא גם גבול של $g\left(x\right)$ בנקודה x_0.

- <u>הוכחה:</u>

נניח כי $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=L$. לכן קיימת סביבה δ_0 כך ש- $0<\left|x-x_0\right|<\delta_0\Rightarrow\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$

ידוע כי קיימת סביבה V_{x_0}, כך ש- $f\left(x\right)\Big|_{V_{x_0}}=g\left(x\right)\Big|_{V_{x_0}}$.

נבחר $\delta=\min\left(\delta_1,V_{x_0}\right)$, ונקבל כי עבורה מתקיימים שני התנאים –

$0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$ וגם $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

נסיק כי קיימת סביבת δ עבורה $0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|g\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$, וזו הגדרת הגבול עבור $g\left(x\right)$ בנקודה x_0.

- **<u>סביבות חד-צדדיות</u>**

- סביבה מנוקבת של x_0 היא קבוצת הנקודות $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, ללא x_0 עצמה.

  או באופן שקול: קבוצת הנקודות $0<\left|x-x_0\right|<\delta_1$.

- סביבה ימנית מנוקבת של x_0 היא קבוצת הנקודות $x_0<x<x_0+\delta$.

  או באופן שקול: $0<x-x_0<\delta$

- סביבה שמאלית מנוקבת של x_0 היא קבוצת הנקודות $x_0-\delta<x<x_0$.

  או באופן שקול: $0<x_0-x<\delta$

- **<u>גבולות חד-צדדיים</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

נאמר ש-L הוא <u>גבול מימין</u> של הפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה x_0, אם –

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_x\; 0<x-x_0<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$$

נאמר ש-L הוא <u>גבול משמאל</u> של הפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה x_0, אם –

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_x\; 0<x_0-x<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$$

גבול מימין נסמן $\lim\limits_{x\to\boxed{x_0^+}} f\left(x\right)=L$

גבול משמאל נסמן $\lim\limits_{x\to\boxed{x_0^-}} f\left(x\right)=L$

- **<u>משפט</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

אזי $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to x_0^{\boxed{-}}} f\left(x\right)=L$ $\lim\limits_{x\to x_o^{\boxed{+}}} f\left(x\right)=$.

- <u>הוכחה</u>: (א' $\Leftarrow$ ב')

נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$. כלומר, $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

נשים לב כי - $\{0<|x-x_0|<\delta\}=\{0<x-x_0<\delta \wedge 0<x_0-x<\delta\}$, כמבוקש.

- <u>הוכחה</u>: (ב' $\Leftarrow$ א')

נניח כי $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_o^+} f(x)$.

מהגדרת גבול ימני נובע כי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת ימנית של x_0, ומהגדרת גבול שמאלי נובע כי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת שמאלית של x_0, ולכן היא מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

מהגדרת גבול ימני נובע כי קיימת δ_r, כך ש- $0<x-x_0<\delta_r \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

מהגדרת גבול שמאלי נובע כי קיימת δ_l, כך ש- $0<x-x_0<\delta_l \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

נבחר $\delta=\min(\delta_r,\delta_l)$, ונקבל שעבור סביבה זו מתקיימים שני התנאים יחד -

$$0<x-x_0<\delta \wedge 0<x_0-x<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

כלומר - $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

- **<u>רציפות</u>**

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה <u>מלאה</u> של x_0.

נאמר כי $f(x)$ רציפה בנקודה x_0, אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

- **<u>משפט</u>**

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של x_0.

נניח כי קיימת סביבה מלאה של x_0, שנסמן ב- V_{x_0}, כך ש- $f(x)\big|_{V_{x_0}}=g(x)\big|_{V_{x_0}}$,

אזי $f(x)$ רציפה בנקודה x_0, אם ורק אם $g(x)$ רציפה בנקודה x_0.

- <u>הוכחה</u>:

משפט זה נובע ממשפט קודם, שקבע כי בתנאים אלו הגבולות של שתיהן קיימים ושווים, ובפרט גם הגבולות שמגדירים רציפות קיימים ושווים עבור שתיהן.

- **<u>רציפות חד-צדדית</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה <u>מלאה</u> של x_0.

נאמר כי $f\left(x\right)$ רציפה מימין בנקודה x_0, אם $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, וכי $f\left(x\right)$ רציפה משמאל בנקודה x_0, אם $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של x_0.

אזי $f\left(x\right)$ רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם $\lim\limits_{x\to x_o^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

(מסקנה מיידית מהמשפטים הקודמים).

- **<u>מיון נקודות אי-רציפות</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של x_0.

נחלק בין שלושה סוגים של נקודות אי-רציפות:

  - מקרה ראשון: <u>הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים</u>, ולכן קיים גבול כללי ב- x_0 אולם $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$.

    זו נקראת נקודת **אי-רציפות סליקה**.

  - מקרה שני: <u>הגבולות החד-צדדיים קיימים ושונים</u>, ולכן אין גבול ב- x_0.

    זו נקראת נקודת **אי-רציפות מסוג ראשון**.

  - מקרה שלישי: לפחות <u>אחד משני הגבולות החד-צדדיים לא קיים במובן הצר</u> ב- x_0.

    זו נקראת נקודת **אי-רציפות מסוג שני**.

- <u>**קריטריון היינה לקיום גבול**</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, שנסמן ב- V_{x_0}.

אזי הטענות הבאות שקולות –

א. $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$

ב. $\forall_{(x_n)\in V_{x_0}} \lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$

[כלומר, לכל סדרה (x_n), בסביבה מנוקבת V_{x_0}, אם $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0$, אז $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.]

נשים לב שהמשפט קושר בין הגדרת גבול של סדרה לבין הגדרת גבול של פונקציה, ומגדיר גבול של פונקציה באמצעות מונחי גבולות של סדרה בלבד.

- <u>הוכחה</u>: (א' $\Leftarrow$ ב')

נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

תהי (x_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0$. נרצה להראות כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

יהי $0<\varepsilon$.

נתון כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, ולכן קיים $0<\delta$, כך ש- $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

נתון גם כי $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0$, ולכן קיים n_0, כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $0<|x_n-x_0|<\delta$.

(נזכור כי (x_n) שייכת לסביבה מנוקבת, ולכן $0<|x_n-x_0|$.)

[נשים לב כי בהגדרת גבול של פונקציה, ε תוחם את האינטרוול ב<u>תמונה</u>, ואילו δ תוחם את האינטרוול ב<u>טווח</u>, ולכן מכיוון שכאן מדובר בסדרה של איברים מהטווח, נשתמש באינטרוול שמסומן ב- δ.]

מכיוון שנתון $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$, ומכיוון שהחל מאינדקס n_0 מתקיים כי $0<|x_n-x_0|<\delta$, נוכל להסיק כי $0<|x_n-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-L|<\varepsilon$.

כלומר, לפי הגדרת גבול של סדרה, החל מאינדקס מסוים מתקיים $|f(x_n)-L|<\varepsilon$, משמע מתקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

- <u>הוכחה</u>: (ב' $\Leftarrow$ א')

נניח כי $\forall_{(x_n)\in V_{x_0}} \lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

נניח בשלילה כי $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq L$.

מהגדרת שלילת הגבול עולה כי - $\exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \exists_x\ 0<|x-x_0|<\delta \wedge |f(x)-L|\geq\varepsilon$

1. ידוע שקיים $0<\varepsilon$, שעבורו לכל $0<\delta$ מתקיימת שלילת הגבול.

   השלילה מתקיימת לכל $0<\delta$, ולכן נוכל לבחור את δ להיות $\delta_n=\dfrac{1}{n}$.

2. נבחר סדרה (x_n) באופן הבא –

   i. $(x_n)\in V_{x_0}$

   ii. $(x_n)\in(x_0-\delta_n, x_0+\delta_n)$

   iii. $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$

3. נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0$, כי הרי בחרנו $\delta_n=\dfrac{1}{n}$, ולכן $0<|x_n-x_0|<\delta=\dfrac{1}{n}$
   ממשפט הסנדוויץ נובע כי $\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0$.

   ממשפט שהוכחנו בסדרות עולה כי $\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0$.

4. עבור ה- ε שידוע שקיים מהגדרת שלילת הגבול, ידוע שתמיד קיים x בסביבה כך ש- $|f(x)-L|\geq\varepsilon$, ובפרט גם $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$, ולכן בהכרח $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq L$.

   [נימוק: מהגדרת גבול של סדרה נובע שלכל $0<\varepsilon$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|f(x_n)-L|<\varepsilon$. אולם עבור ε^* מתקיים $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon^*$.]

   בסתירה להנחה ש- $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

- **<u>קריטריון היינה לרציפות</u>**

מקריטריון היינה לקיום גבול נובע מיידית כי הגדרת הרציפות, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,
מתקיימת אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0 \ \forall_{(x_n)\in V_{x_0}}$.

- **<u>משפט</u>**

מקריטריון היינה לקיום גבול נובע כי אם $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 שנסמן V_{x_0}, אזי יש לה גבול כלשהו בנקודה x_0, אם ורק אם לכל סדרה $(x_n)\in V_{x_0}$, שמתכנסת ל-x_0, הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת <u>לגבול כלשהו</u>.

- <u>הוכחה</u>: (חלק א')

נניח כי קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

מקריטריון היינה נובע שלכל סדרה $(x_n)\in V_{x_0}$, שמתכנסת ל-x_0, הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת ל-L.

- <u>הוכחה</u>: (חלק ב')

נניח כי לכל סדרה $(x_n)\in V_{x_0}$ שמתכנסת ל-x_0, הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת לגבול כלשהו.

נוכיח שמתקיים כי כל הסדרות $f(x_n)$ מתכנסות לגבול אחד שנסמן ב-L, ולכן מקריטריון היינה לקיום גבול ינבע שלפונקציה $f(x)$ קיים גבול ב-x_0.

נניח שקיימות שתי סדרות, $(x_n),(y_n)$, כך ששתיהן מתכנסות ל-x_0, ונניח בשלילה כי מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} f(y_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

נבנה סדרה חדשה - $(z_n)=x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,\ldots$. קל לראות שסדרה זו מתכנסת ל-x_0.

לעומת זאת הסדרה $f(z_n)=f(x_1),f(y_1),f(x_2),f(y_2),f(x_3),f(y_3),\ldots$ אינה מתכנסת, כי לפי מה שהנחנו בשלילה ש-$\lim_{n\to\infty} f(y_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, נובע כי יש לה שתי תתי-סדרות שמתכנסות לגבולות שונים.

מצאנו שעבור (z_n) שמתכנסת ל-x_0, <u>לא</u> קיים $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$, בסתירה לנתון שקיים גבול לכל סדרה כנ"ל.

- **<u>קריטריון קושי לקיום גבול</u>** (של פונקציה)

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, שנסמן ב- V_{x_0}.

ל-$f\left(x\right)$ קיים גבול בנקודה x_0, אם ורק אם מתקיים התנאי הבא –

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \begin{matrix} 0<\left|x-x_0\right|<\delta \\ 0<\left|y-x_0\right|<\delta \end{matrix} \Rightarrow \left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$$

- <u>הוכחה</u>: (חלק א')

נניח שקיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$.

מההגדרה נובע שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך ש- $0<\left|x-x_0\right|<\delta \Rightarrow \left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.

יהיו x,y נקודות שעבור שתיהן מתקיים $0<\left|x-x_0\right|<\delta$, $0<\left|y-x_0\right|<\delta$.

נסיק מכך כי $\left|f\left(x\right)-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\left|f\left(y\right)-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. ולכן –

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|=\left|f\left(x\right)-L+L-f\left(y\right)\right|\le\left|f\left(x\right)-L\right|+\left|L-f\left(y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

- <u>הוכחה</u>: (חלק ב')

נניח כי $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \begin{matrix} 0<\left|x-x_0\right|<\delta \\ 0<\left|y-x_0\right|<\delta \end{matrix} \Rightarrow \left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

תהי $\left(x_n\right)\subseteq V_{x_0}$ סדרה שמקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=x_0$, ולכן - $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ 0<\left|x_n-x_0\right|<\varepsilon$.

ולכן לכל $m,n>n_0$ מתקיים $0<\left|x_n-x_0\right|<\delta$ וגם $0<\left|x_m-x_0\right|<\delta$.

נתון התנאי $\begin{matrix} 0<\left|x-x_0\right|<\delta \\ 0<\left|y-x_0\right|<\delta \end{matrix} \Rightarrow \left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$ ולכן נובע מזה מידית כי עבור הערכים שבחרנו מתקיים - $\begin{matrix} 0<\left|x_n-x_0\right|<\delta \\ 0<\left|x_m-x_0\right|<\delta \end{matrix} \Rightarrow \left|f\left(x_n\right)-f\left(x_m\right)\right|<\varepsilon$ (בשינוי סימון).

מקריטריון קושי <u>לסדרות</u> נובע כי אם $\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_m\right)\right|<\varepsilon$ הרי ש-$f\left(x_n\right)$ סדרה מתכנסת, ומקריטריון היינה נובע כי ל-$f\left(x\right)$ קיים גבול בנקודה x_0.

- **<u>פונקציה חסומה</u>**

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$.

נאמר כי $f(x)$ חסומה מלעיל ב- A, אם $\exists_{m\in\mathbb{R}} \forall_{x\in A}\ f(x) \le m$

נאמר כי $f(x)$ חסומה מלרע ב- A, אם $\exists_{c\in\mathbb{R}} \forall_{x\in A}\ f(x) \ge c$

נאמר כי $f(x)$ חסומה ב- A, אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, שנסמן ב- V_{x_0}.

אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אזי קיימת סביבה מנוקבת של x_0, שנסמן ב- U_{x_0}, שבה $f(x)$ חסומה. כלומר, $\exists_{m\in\mathbb{R}} \forall_{x\in U_{x_0}} |f(x)| \le m$.

- <u>הוכחה</u>:

נתון כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, ולכן $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

הטענה נכונה לכל ε, ולכן נבחר $\varepsilon=1$ ונקבל כי $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<1$.

כלומר, $L-1<f(x)<L+1$.

נבחר את הסביבה $U_{x_0} = \{x\in\mathbb{R} \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$, ונקבל כי בסביבה זו מתקיים שלכל $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ מתקיים $L-1<f(x)<L+1$ שזו סביבה חסומה, כמבוקש.

- <u>מסקנה</u>:

אם $f(x)$ רציפה בנקודה x_0, אז קיימת סביבה <u>מלאה</u> של x_0, שבה $f(x)$ חסומה.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 שנסמן V_{x_0}.

אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \ne 0$ אזי קיימת סביבה של x_0 שנסמן U_{x_0}, וקיים $c>0$, כך ש- $\forall_{x\in U_{x_0}} |f(x)| > c$.

- <u>הוכחה:</u>

נבחר $\varepsilon=\frac{L}{2}$, ומהגדרת הגבול ינבע כי -

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\frac{L}{2}\Rightarrow L-\frac{L}{2}<f(x)<L+\frac{L}{2}\Rightarrow\frac{L}{2}<f(x)<\frac{3L}{2}$$

נתון כי $L\neq 0$ ולכן גם $\frac{L}{2},\frac{3L}{2}>0$, ולכן נסיק כי קיימת סביבה שבה ערכי $|f(x)|$ חיוביים.

- <u>מסקנה:</u> אם $f(x)$ רציפה ב-x_0, וגם $f(x_0)>0$, אזי קיימת סביבה מלאה של x_0 שבה כל ערכי $f(x)$ חיוביים.

- **<u>משפט הסנדוויץ' לפונקציות</u>**

יהיו $f(x),h(x),g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0 שנסמן U_{x_0}.

אם $\forall_{x\in U_{x_0}}\ f(x)\le h(x)\le g(x)$ וכן הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ קיימים ושווים ל-L, אזי גם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)$ ושווה ל-L.

- <u>הוכחה:</u>

נוכיח את קיום הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=L$ באמצעות קריטריון היינה.

תהי הסדרה (x_n), $(x_n)\in U_{x_0}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)=x_0$, נרצה להוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}h(x_n)=L$.

מקריטריון היינה עבור הפונקציה $f(x)$ נובע כי $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$, ועבור הפונקציה $g(x)$ נובע כי $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)$.

נתון כי $\forall_{x\in U_{x_0}}\ f(x)\le h(x)\le g(x)$, ולכן בפרט גם $\forall_{x_n\in U_{x_0}}\ f(x_n)\le h(x_n)\le g(x_n)$.

ממשפט הסנדוויץ' לסדרות נסיק שאם $\forall_{x_n\in U_{x_0}}\ \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)}_{=L}\le\lim\limits_{n\to\infty}h(x_n)\le\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)}_{=L}$, אז מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}h(x_n)=L$, ולכן $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=L$, לפי קריטריון היינה.

- <u>מסקנה:</u>

יהיו $f(x),h(x),g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של x_0 שנסמן V_{x_0}. אם $\forall_{x\in U_{x_0}}\ f(x)\le h(x)\le g(x)$, וכן ידוע כי $f(x),g(x)$ רציפות ב-x_0, וגם $f(x_0)=g(x_0)$, אזי גם $h(x)$ רציפה ב-x_0.

- **<u>אריתמטיקה של גבולות של פונקציות</u>**

1. יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, שנסמן V_{x_0}.

אם מתקיים $\forall_{x\in V_{x_0}}\ g(x)<f(x)$, וכן קיימים הגבולות $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=M$, אזי $M<L$.

- <u>הוכחה:</u>

מקריטריון היינה לקיום גבול נובע כי לכל סדרה (x_n), שמקיימת $(x_n)\in V_{x_0}$, $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0$, מתקיים עבור הפונקציה $f(x)$ כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x)$, ועבור הפונקציה $g(x)$ כי $\lim_{n\to\infty} g(x_n)=\lim_{x\to x_0} g(x)$.

ממשפט שהוכחנו לגבי סדרות נובע כי מהנתון שבסביבה V_{x_0} מתקיים $g(x)<f(x)$ ניתן להסיק כי $\lim_{n\to\infty} g(x_n)<\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. כלומר $\lim_{x\to x_0} g(x)<\lim_{x\to x_0} f(x)$.

2. יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, שנסמן V_{x_0}.

אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ וכן $g(x)$ חסומה ב- V_{x_0}, אזי $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$.

- <u>הוכחה:</u>

נשתמש בקריטריון היינה - תהי הסדרה (x_n), שמקיימת $(x_n)\in V_{x_0}$, $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0$, נרצה להוכיח כי $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$.

מהנתון כי $g(x)$ חסומה ב- V_{x_0} נובע בפרט גם כי $g(x_n)$ חסומה ב- V_{x_0}. כלומר, $\exists_{m\in\mathbb{R}}\ \forall_{x_n}\ |g(x_n)|<m$.

ממשפט שהוכחנו לסדרות נובע כי $\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)\cdot g(x_n)\right)=0$, ולכן מקריטריון היינה נסיק כי $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$.

3. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, אזי הטענות הבאות שקולות –

א. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

ב. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - L \right) = 0$

ג. $\lim\limits_{x \to x_0} \left| f(x) - L \right| = 0$

[קל להוכיח באמצעות קריטריון היינה והסתמכות על הטענה המקבילה בסדרות.]

4. יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, ונניח כי שתיהן מתכנסות בנקודה זו, ונסמן $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. אזי –

א. $\lim\limits_{x \to x_0} \left| f(x) \right| = |L|$

ב. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot L$, $c \in \mathbb{R}$

ג. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = L + M$

ד. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = L \cdot M$

ה. אם $m \neq 0$, אז $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M}$. [בטענה זו יש להשתמש גם בטענה קודמת ממנה נובע כי אם קיים גבול M של הפונקציה $g(x)$ כך ש-$m \neq 0$, אז קיימת סביבה U_{x_0} שבה $\forall_{x \in U_{x_0}} \left| g(x) \right| > c$.]

- <u>מסקנה כללית</u>: יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות ב-x_0, אזי גם הפונקציות הבאות רציפות ב-x_0 -

$\left| f(x) \right|$, $c \cdot f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, ואם $g(x_0) \neq 0$ אז גם $\frac{f(x)}{g(x)}$.

- **<u>הרכבה של פונקציות</u>**

יהיו הקבוצות X,Y,Z, ויהיו הפונקציות $g:Y\to Z$, $f:X\to Y$.

נסמן $f\left(x\right)=y$, $g\left(y\right)=z$.

נגדיר הרכבה של הפונקציה g על הפונקציה f, כפונקציה הבאה –

$g\circ f:X\to Y\to Z$, ומתקיים כי $g\circ f\left(x\right)\underset{def}{\equiv} g\left(f\left(x\right)\right)=g\left(y\right)=z$.

- **<u>גבול של פונקציה מורכבת</u>**

יהיו $f\left(x\right)$, $g\left(y\right)$ פונקציות ממשיות, כך שמתקיים -

- $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=y_0$
- $g\left(y\right)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של y_0 ומתקיים $\lim\limits_{y\to y_0} g\left(y\right)=L$

אזי לפונקציה המורכבת $g\circ f$ קיים גבול ב-x_0 ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f\left(x\right)=L$, אם מתקיים לפחות אחד משני התנאים הבאים –

א. $\lim\limits_{y\to y_0} g\left(y\right)=g\left(y_0\right)$. כלומר, $g\left(y\right)$ רציפה ב-y_0 .

ב. קיימת סביבה מנוקבת של x_0 שנסמן U_{x_0}, כך ש-$\forall_{x\in U_{x_0}} f\left(x\right)\neq y_0$.

- <u>הוכחה</u>: (חלק ראשון)

כדי לטעון שקיים גבול לפונקציה כלשהי בנקודה, ראשית יש להראות כי היא מוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה זו. נראה כי פונקציית ההרכבה מוגדרת בסביבת x_0 .

1. נוכיח כי אם $g\left(y\right)$ רציפה ב-y_0 , אז פונקציית ההרכבה מוגדרת בסביבת x_0 .

נתון כי $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 , ושקיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=y_0$, ולכן $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ 0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-y_0\right|<\varepsilon$.

נניח כי מתקיים התנאי הראשון ש-$g(y)$ רציפה ב-y_0, משמע $g(y)$ מוגדרת בסביבה <u>מלאה</u> של y_0, ולכן $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,|y-y_0|<\varepsilon \Rightarrow |g(y)-L|<\delta$.

נשים לב כי האינטרוול $0<|x-x_0|<\delta$ שייך <u>לתחום</u> של $f(x)$, והאינטרוול $|y-y_0|<\varepsilon$ שייך <u>לתחום</u> של $g(y)$. לכן עבור ההרכבה $g\circ f$ נסיק כי –

$$\underbrace{0<|x-x_0|<\delta}_{\in x} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-y_0|<\varepsilon}_{\in f(x)} \Rightarrow \underbrace{|y-y_0|<\varepsilon}_{\in y} \Rightarrow \underbrace{|g(y)-L|<\delta}_{g(y)} \Rightarrow \underbrace{|g(f(x))-L|<\varepsilon}_{\in g\circ f(x)}$$

[נימוק: הגרירה הראשונה נובעת מהנתון שקיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$.

הגרירה השנייה נובעת מהסימון $f(x)=y$.

הגרירה השלישית נובעת מהנתון ש-$g(y)$ רציפה ב-y_0, ולכן $|f(x)-y_0|<\varepsilon$ היא סביבה מלאה.]

2. נוכיח כי אם קיימת סביבה מנוקבת של x_0 כך ש-$f(x)\neq y_0$ $\forall_{x\in U_{x_0}}$, אז פונקציית ההרכבה מוגדרת בסביבת x_0.

נתון כי $g(y)$ מוגדרת בסביבה <u>מנוקבת</u> של y_0, $0<|y-y_0|<\delta^*$. (לא נתונה רציפות)

נתון כי קיימת סביבה מנוקבת U_{x_0} כך ש-$0<|x-x_0|<\delta^{**} \Rightarrow y=f(x)\neq y_0$.

נבחר $\delta=\min(\delta^*,\delta^{**})$, ונקבל כי מתקיימים שני התנאים -

$$\left[0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-y_0|<\varepsilon\right]\wedge f(x)\neq y_0 \Rightarrow \left[0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow 0<|f(x)-y_0|<\varepsilon\right]$$

נתון גם כי $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=L$, ולכן $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,0<|y-y_0|<\delta \Rightarrow |g(y)-L|<\varepsilon$.

נקבל באופן כללי כי -

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow 0<|f(x)-y_0|<\varepsilon \Rightarrow 0<|y-y_0|<\delta \Rightarrow |g(y)-L|<\varepsilon$$

[נימוק: הגרירה הראשונה נובעת מכך ש-$g(y)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת, $\delta=\min(\delta^*,\delta^{**})$ כי עבורה מתקיים $f(x)\neq y_0$.

הגרירה השלישית נובעת מהנתון $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=L$.]

- <u>הוכחה</u>: (חלק שני)

נוכיח כעת את הטענה $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f\left(x\right)=L$ באמצעות קריטריון היינה לקיום גבול.

מקריטריון זה נובע כי קיום הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=y_0$ שקול לטענה כי לכל סדרה $\left(x_n\right)$, המקיימת $\left(x_n\right)\in V_{x_0}$, כאשר V_{x_0} היא סביבה מנוקבת של x_0, אם $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=x_0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=y_0$.

1. נניח כי $g\left(y\right)$ רציפה ב-y_0, כלומר $\lim\limits_{y\to y_0} g\left(y\right)=g\left(y_0\right)=L$.

נתון כי $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=y_0$ ולכן מקריטריון היינה נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=y_0$.

נסמן $f\left(x_n\right)=y_n$ ונקבל $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n\right)=y_0$.

מהרציפות של $g\left(y\right)$ נובע כי $\lim\limits_{y\to y_0} g\left(y\right)=g\left(y_0\right)=L$, ולכן מקריטריון היינה <u>לרציפות</u> נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(y_n\right)=g\left(y_0\right)=L$.

נשים לב שמתקיים $g\left(y_n\right)=g\left(f\left(x_n\right)\right)=g\circ f\left(x_n\right)$, ולכן –

$$\lim_{n\to\infty} g\left(y_n\right)=g\left(y_0\right)=L\Rightarrow\lim_{n\to\infty} g\circ f\left(x_n\right)=g\left(y_0\right)=L$$

מקריטריון היינה לקיום גבול נסיק כי $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f\left(x\right)=g\left(y_0\right)=L$.

2. נניח שקיימת סביבה מנוקבת של x_0 שנסמן U_{x_0}, כך ש-$\forall_{x\in U_{x_0}}\ f\left(x\right)\neq y_0$.

נתון כי $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=y_0$ ולכן מקריטריון היינה נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=y_0$.

נסמן $f\left(x_n\right)=y_n$ ונקבל $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n\right)=y_0$.

נתון כי $\lim\limits_{y\to y_0} g\left(y\right)=L$ ולכן מקריטריון היינה נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(y_n\right)=L$.

ידוע גם כי $\forall_{x\in U_{x_0}}\ f\left(x\right)\neq y_0$ ולכן בפרט גם $\forall_{x_n\in U_{x_0}}\ f\left(x_n\right)=\left(y_n\right)\neq y_0$.

משמע, ערכי $\left(y_n\right)$ שייכים לסביבה מנוקבת של y_0, שנסמן V_{y_0}.

לכן מתקיימים תנאי קריטריון היינה לקיום גבול - לכל סדרה $\left(y_n\right)$ ששייכת לסביבה המנוקבת V_{y_0}, מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(y_n\right)=L$.

נשים לב שמתקיים $g\left(y_n\right)=g\left(f\left(x_n\right)\right)=g\circ f\left(x_n\right)$, ולכן –

$$\lim_{n\to\infty} g\left(y_n\right)=L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g\circ f\left(x_n\right)=L$$

מקריטריון היינה לקיום גבול נסיק כי $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f\left(x\right)=L$.

- <u>מסקנה</u>:

תהי $f\left(x\right)$ רציפה ב-x_0 ותהי $g\left(y\right)$ רציפה ב-y_0, ונניח כי $f\left(x_0\right)=y_0$.

אזי מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f\left(x\right)=g\circ f\left(x_0\right)$. כלומר $g\circ f\left(x\right)$ רציפה ב-x_0.

<u>נימוק</u>:

נתון כי $g\left(y\right)$ רציפה ב-y_0, ולכן התנאי הראשון של המשפט על גבול של פונקציה מורכבת מתקיים, ולכן נסיק כי - $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f\left(x\right)=\lim\limits_{y\to y_0} g\left(y\right)=g\left(y_0\right)=g\left(f\left(x_0\right)\right)$, כמבוקש.

- **<u>רציפות בקטע</u>**

יהי I קטע ב-$\mathbb{R}$, ותהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע I.

נאמר כי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע I, אם היא רציפה בכל נקודה פנימית, ואם I הוא קטע סגור, נדרוש ש-$f\left(x\right)$ תהיה רציפה משמאל בנקודה הימנית ומימין בנקודה השמאלית.

- <u>הערה</u>: מקריטריון היינה נובע כי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע I, אם ורק אם לכל סדרה $\left(x_n\right)\in I$ מתקיים כי - אם $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=x_0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=f\left(x_0\right)$.

- **<u>תנאי ערך הביניים</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע I. נאמר כי $f\left(x\right)$ מקיימת את תנאי ערך הביניים בקטע I, אם לכל $x_1,x_2\in I$ ולכל $y\in\left[f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right]$, קיים $x_1\le x\le x_2$ כך ש-$f\left(x\right)=y$.

- **<u>משפט ערך הביניים</u>**

פונקציה רציפה בקטע מקיימת את תכונת ערך הביניים בקטע.

- <u>הוכחה</u>:

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע $I=[a,b]$, יהיו $x_1,x_2\in[a,b]$ ונניח $y\in[f(x_1),f(x_2)]$.

1. אם $f(x_1)=f(x_2)$, מסקנת המשפט נכונה מידית, כי אז אם $y\in[f(x_1),f(x_2)]$ הרי ש-$y=f(x_1)=f(x_2)$, ולכן גם $f(x_1)=y$ וגם $f(x_2)=y$, ומתקיים תנאי ערך הביניים.

2. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $f(x_1)<f(x_2)$ כך ש-$f(x_1)<y<f(x_2)$.

נגדיר את הקבוצה הבאה - $B=\{x\in[x_1,x_2] \mid f(x)\le y\}$.

קבוצה זו אינה ריקה, כי $x_1\in B$, וכן היא חסומה מלעיל על-ידי x_2, ולכן יש לה חסם עליון שנסמן $\sup B=x_0$. נשים לב שמתקיים $x_1\le x_0\le x_2$.

3. נוכיח כי $f(x_0)=y$, ומכך ינבע משפט ערך הביניים.

4. כדי להוכיח את הטענה $f(x_0)=y$, נפריך את הטענות $f(x_0)<y$, $f(x_0)>y$.

א. נניח בשלילה כי $f(x_0)<y$.

מההנחה $f(x_0)<y$ עולה שנוכל לבחור $\varepsilon=y-f(x_0)$, ומהנתון כי $f(x)$ רציפה בקטע, נקבל כי קיימת סביבה ימנית $[x_0,x_0+\delta]$ כך שלכל x בסביבה מתקיים -
$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=y-f(x_0)\Rightarrow f(x)<y$, ובפרט גם $f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)<y$.

נשים לב כי $x_0<x_0+\frac{\delta}{2}$, ומכיוון ש- $x_0+\frac{\delta}{2}\in B$ נקבל סתירה להנחה x_0 חסם עליון.

ב. נניח בשלילה כי $f(x_0)>y$.

מההנחה $f(x_0)>y$ עולה שנוכל לבחור $\varepsilon=f(x_0)-y$, ומהנתון כי $f(x)$ רציפה בקטע, נקבל כי קיימת סביבה שמאלית $[x_0-\delta,x_0]$ כך שלכל x בסביבה מתקיים -
$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=f(x_0)-y\Rightarrow f(x)>y$, ובפרט גם $f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)>y$.

אבל נתון שהקבוצה B כוללת רק איברים x שעבורם $f\left(x\right)\le y$ ולכן $x_0-\dfrac{\delta}{2}\notin B$.

מצאנו כי $x_0-\dfrac{\delta}{2}$ הוא חסם מלעיל קטן יותר מ-x_0, בסתירה להנחה כי x_0 חסם עליון.

- **<u>מסקנות ממשפט ערך הביניים</u>**

1. תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $I=\left[a,b\right]$, ונניח כי $f\left(a\right)>0$,$f\left(b\right)<0$, (או גם להיפך), אזי קיימת נקודה x_0, $a<x_0<b$, כך ש-$f\left(x_0\right)=0$.

2. תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $I\in\mathbb{R}$, אזי $f\left(I\right)$, כלומר הקבוצה $\left\{y\middle|\exists_{x\in I}\ f\left(x\right)=y\right\}$, היא קטע ב-$\mathbb{R}$.

נימוק: תהיינה $y_1,y_2\in f\left(I\right)$. נרצה להראות כי הקבוצה $\left\{y\middle|y\in\left[y_1,y_2\right]\right\}$ גם היא שייכת ל-$f\left(I\right)$.

מהנתון $y_1,y_2\in f\left(I\right)$ נובע שקיימים $x_1,x_2\in I$, כך ש-$f\left(x_1\right)=y_1$,$f\left(x_2\right)=y_2$.

ממשפט ערך הביניים נובע שלכל $y\in\left(y_1,y_2\right)$ קיים x, $x_1\le x\le x_2$, כך ש-$f\left(x\right)=y$, ולכן $f\left(I\right)$ מקבלת כל ערך בקטע $\left[y_1,y_2\right]$, כמבוקש.

3. לכל מספר ממשי חיובי קיים שורש ממשי. כלומר, $\forall_{0<a\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{0<x\in\mathbb{R}}\ x^n=a$.

נימוק: יהי $a>0$ מספר ממשי, נרצה להראות שקיים לו שורש.

נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=x^n$. פונקציה זו רציפה כי היא מכפלה של n פונקציות רציפות.

מתקיים כי הפונקציה מקבלת ערך קטן מ-a, כי $f\left(0\right)=0<a$, וכן היא מקבלת ערך גדול מ-a, כי $f\left(1+a\right)=\left(1+a\right)^n\ge1+an>a$, ולכן ממשפט ערך הביניים נובע כי קיים $x_0\in\left[0,1+a\right]$ ממשי שעבורו הפונקציה מקבלת את a. כלומר, $f\left(x_0\right)=x_0{}^n=a$, כמבוקש.

- **<u>משפט החסימות של ויירשטראס</u>**

פונקציה ממשית ורציפה בקטע סגור, חסומה בו.

- <u>הערה</u>: חשוב לשים-לב שהמשפט מתיחס לקטעים סגורים בלבד.

הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ היא דוגמה לפונקציה רציפה בקטע החצי-פתוח $\left(0,1\right]$ אך היא לא חסומה בו.

- <u>הוכחה</u>:

נניח בשלילה ש-$f\left(x\right)$ רציפה בקטע $\left[a,b\right]$ אך לא חסומה בו, $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{x\in[a,b]}\ f\left(x\right)\geq m$.
בפרט גם מתקיים כי $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{x_n\in[a,b]}\ f\left(x_n\right)\geq n$.

נתבונן בסדרה $\left(x_n\right)$. מתקיים כי $\left(x_n\right)\subset\left[a,b\right]$, ולכן זו סדרה חסומה.

ממשפט בולצאנו ויירשטראס נובע שיש תת-סדרה $\left(x_{n_k}\right)$ שמתכנסת, נסמן $\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k}\right)=x_0$.

$\left(x_{n_k}\right)$ תת-סדרה של $\left(x_n\right)$ ולכן $\left(x_{n_k}\right)\subseteq\left(x_n\right)\subseteq\left[a,b\right]$, ולכן גם $x_0\in\left[a,b\right]$.

[הערה: בשלב זה ההוכחה לא עובדת עבור קטע פתוח, כי עבור קטעים פתוחים ייתכן שהגבול מחוץ לקטע.]

נתון כי $f\left(x\right)$ רציפה, ולכן מקריטריון היינה לרציפות נובע שבאופן כללי לכל סדרה $\left(x_n\right)$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=x_0$ מתקיים כי $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(x_0\right)$, ולכן בפרט אם $\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k}\right)=x_0$ אז הסדרה $f\left(x_{n_k}\right)$ מתכנסת ולכן חסומה.

זו סתירה, כי הנחנו בשלילה ש-$f\left(x\right)$ אינה חסומה. כלומר $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{x_n\in[a,b]}\ f\left(x_n\right)\geq n$,
אולם כאן מתקיים כי קיים n_k כך ש-$\forall_{n_k\in\mathbb{N}}\ f\left(x_{n_k}\right)\leq n_k$.

<u>מסקנה</u>: הוכחנו שפונקציה רציפה בקטע סגור גם חסומה בו, ולכן במקרה שהתמונה היא קבוצה לא ריקה, מאקסיומת החסם העליון נובע שלתמונת הפונקציה יש חסם עליון ותחתון.

- **<u>משפט המקסימום של ויירשטראס</u>**

פונקציה ממשית ורציפה בקטע סגור, מקבלת בו ערך מקסימלי וערך מינימלי.

- <u>הערה</u>: חשוב לשים-לב שהמשפט מתיחס לקטעים סגורים בלבד.

הפונקציה $f\left(x\right)=x$ בקטע $\left[0,1\right)$ היא דוגמה לפונקציה רציפה וחסומה, אך היא לא מקבלת מקסימום.

- <u>הוכחה:</u>

1. ממסקנת המשפט הקודם נובע כי לתמונה של $f\left(x\right)$ קיים חסם עליון, שנסמן $\sup\left\{f\left(x\right)\right\}=m$.

צ"ל שקיים $x_m\in\left[a,b\right]$, כך ש- $f\left(x_m\right)=m$, ומתקיים כי $\forall_{x\in[a,b]}\ f\left(x\right)\le f\left(x_m\right)=m$.

2. מתכונות החסם העליון נובע כי אם נבחר $\varepsilon=\frac{1}{n}$ אז $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{x_n\in[a,b]}\ m-\frac{1}{n}<f\left(x_n\right)<m$.

ממשפט הסנדוויץ' נובע כי אם נשאיף את n לאינסוף, נקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=m$.

3. נתבונן בסדרה $\left(x_n\right)$. מתקיים כי $\left(x_n\right)\subseteq\left[a,b\right]$ ולכן היא סדרה חסומה. ממשפט בולצאנו-ויירשטראס נובע כי יש תת-סדרה $\left(x_{n_k}\right)$ מתכנסת, ונסמן $\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k}\right)=x_m$, $x_m\in\left[a,b\right]$.

4. מקריטריון היינה לרציפות נובע כי מכיוון ש-$f\left(x\right)$ רציפה, אז לכל סדרה $\left(x_{n_k}\right)$ שעבורה $\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k}\right)=x_m$, מתקיים גם כי $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=f\left(x_m\right)$.

5. מסעיף 2 נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=m$, ומסעיף 4 נובע כי $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=f\left(x_m\right)$.

לכן $f\left(x_m\right)=m$. כלומר, קיים $x_m\in\left[a,b\right]$, כך ש-$f\left(x_m\right)=m=\sup\left\{f\left(x\right)\right\}$, כמבוקש.

- **<u>פונקציות מונוטוניות</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע I.

$f\left(x\right)$ נקראת מונוטונית עולה בקטע I, אם $\forall_{x_1,x_2\in I}\ x_1\le x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$.

$f\left(x\right)$ נקראת מונוטונית עולה ממש בקטע I, אם $\forall_{x_1,x_2\in I}\ x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$.

[ההגדרות לפונקציה מונוטונית יורדת - אנלוגיות.]

- **<u>משפט</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל בסביבה שמאלית מנוקבת של x_0.

הגבול שלה משמאל קיים, ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=\sup\limits_{x<x_0}\left\{f\left(x\right)\right\}$.

[הטענה לגבי פונקציה עולה וחסומה שמוגדרת מימין - אנלוגית.]

- <u>הוכחה:</u>

נוכיח שמתקיימת הגדרת הגבול משמאל - $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,0<x_0-x<\delta \Rightarrow \left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$. נסמן $\sup\limits_{x<x_0}\left\{f\left(x\right)\right\}=L$.

מתכונות החסם העליון נובע שקיימים ערכים של $f\left(x\right)$ ששייכים לאינטרוול $\left(L-\varepsilon,L\right)$.

כך למשל קיים $x_1\in I$, כך ש- $L-\varepsilon<f\left(x_1\right)\le L$. נסיק מכך שלכל x שמקיים $x\in\left(x_1,x_0\right)$ מתקיים $f\left(x_1\right)\le f\left(x\right)$ מכיוון ש-$f\left(x\right)$ מונוטונית עולה.

נסמן $\delta=x_0-x_1$, כך שמתקיים $0<x_0-x<\delta \Rightarrow 0<x_0-x<x_0-x_1 \Rightarrow x_1<x<x_0$.

מהמונוטוניות של $f\left(x\right)$ נובע כי $x_1<x<x_0 \Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x\right)<f\left(x_0\right)$.

נשים לב כי $L-\varepsilon<f\left(x_1\right)$ ו-$f\left(x_0\right)<L$, ולכן $L-\varepsilon<f\left(x\right)<L \Rightarrow \left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה מונוטונית עולה המוגדרת בסביבה מלאה של x_0, אזי מתקיים כי $\lim\limits_{x\to x_0^-}f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)\le\lim\limits_{x\to x_0^+}f\left(x\right)$.

- <u>הוכחה:</u>

נתון כי $f\left(x\right)$ עולה, ולכן לכל $x<x_0$ מתקיים $f\left(x\right)<f\left(x_0\right)$. כלומר, משמאל ל-$x_0$, הפונקציה חסומה על-ידי $f\left(x_0\right)$.

מטענה קודמת נובע כי לפונקציה עולה וחסומה המוגדרת משמאל, קיים גבול שמאלי, ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=\sup\limits_{x<x_0}\left\{f\left(x\right)\right\}$.

מהנתון כי $f\left(x_0\right)$ חסם מלעיל, נובע כי $\lim\limits_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=\sup\limits_{x<x_0}\left\{f\left(x\right)\right\}\le f\left(x_0\right)$.

באותו אופן אפשר להוכיח כי $f\left(x_0\right)\le\lim\limits_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=\inf\limits_{x>x_0}\left\{f\left(x\right)\right\}$.

נקבל כי $\lim\limits_{x\to x_0^-}f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)\le\lim\limits_{x\to x_0^+}f\left(x\right)$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f(x)$ מונוטונית עולה בסביבה מלאה של x_0.

$f(x)$ רציפה ב- x_0 אם ורק אם הגבולות החד-צדדיים ב- x_0 שווים.

- <u>הוכחה</u>:

אם $f(x)$ רציפה, מטענה שהוכחנו לגבי גבולות נובע שגבול קיים אם ורק אם הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים.

אם נתון כי $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, מטענה קודמת נובע כי מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_0) \le \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ולכן $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה המוגדרת בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$.

$f(x)$ רציפה אם ורק אם התמונה שלה $f(I)$ היא קטע.

- <u>הוכחה</u>: (א $\Leftarrow$ ב)

נניח כי $f(x)$ רציפה, הראינו כמסקנה (2) ממשפט ערך הביניים כי $f(I)$ היא קטע.

- <u>הוכחה</u>: (ב $\Leftarrow$ א)

נניח כי $f(I)$ היא קטע. כדי להוכיח את הטענה, נראה כי אם $f(x)$ <u>לא</u> רציפה, אז $f(I)$ היא <u>לא</u> קטע.

נתון כי $f(x)$ עולה, ונניח כי היא לא רציפה בנקודה x_0 שבקטע I.

ממשפט קודם נובע שאם $f(x)$ עולה ב- x_0 מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_0) \le \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

מהנתון כי $f(x)$ לא רציפה ב- x_0 נובע כי $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ (אי-שוויון חזק).

נבחר ערך y ששייך לאינטרוול $\left[\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right]$ כך ש- $y \ne f(x_0)$, ונשים לב כי $f(I) \supseteq \left[\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right] \ni y$ והוא לא מתקבל על-ידי אף x בקטע I, ולכן $f(I)$ אינו קטע.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f:A\to B$ פונקציה חד-חד ערכית ועל, אזי קיימת פונקציה הפוכה $f^{-1}:B\to A$ שגם היא היא חד-חד ערכית ועל.

- <u>הוכחה</u>:

  - נראה כי f^{-1} היא פונקציה על.

f^{-1} הפוכה ל- f ולכן $f^{-1}\circ f(a)=a$. מכאן נובע שמתקיימת ההגדרה לפונקציה על, כי לכל $a\in A$ קיים $f(a)\in B$ כך ש- $f^{-1}(f(a))=a$.

  - נראה כי f^{-1} היא פונקציה חח"ע.

f^{-1} הפוכה ל- f ולכן $f\circ f^{-1}(b)=b$. מכאן נובע שמתקיימת ההגדרה לפונקציה חח"ע -
$b_1\neq b_2\Rightarrow f\left(f^{-1}(b_1)\right)\neq f\left(f^{-1}(b_2)\right)\Rightarrow f^{-1}(b_1)\neq f^{-1}(b_2)$.

[נימוק: הגרירה הראשונה מבוססת על השוויון $f\circ f^{-1}(b)=b$.

הגרירה השנייה מבוססת על-כך ש- f היא פונקציה].

- **<u>משפט</u>**

תהי $f(x)$ פונקציה ממשית. אם $f(x)$ מונוטונית ממש אז היא הפיכה, וגם מתקיים כי הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(x)$ מונוטונית ממש, ובעלת אותו כיוון של מונוטוניות כמו $f(x)$.

- <u>הוכחה</u>: (נוכיח עבור $f(x)$ עולה ממש)

נוכיח כי $f(x)$ חח"ע ועל, ולכן ממשפט קודם ינבע שיש לה פונקציה הפוכה חח"ע ועל.

  - ראשית נצמצם את הטווח של $f(x)$ כך שיכיל רק את האיברים שיש להם מקור, ולכן $f(x)$ תהיה על.

  - נוכיח ש-$f(x)$ חח"ע.

יהיו $x_1 \neq x_2$, ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $x_1 < x_2$. מהמונוטוניות של $f(x)$ נובע כי $f(x_1) < f(x_2)$, ובפרט $f(x_1) \neq f(x_2)$.

קיבלנו את ההגדרה של פונקציה חח"ע - $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- נוכיח כי $f^{-1}(x)$ מונוטונית באותו כיוון של $f(x)$.

נניח כי $y_1 < y_2$, נרצה להראות כי $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

נניח בשלילה כי $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, נסיק כי –

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Rightarrow f \circ f^{-1}(y_1) \geq f \circ f^{-1}(y_2) \Rightarrow y_1 \geq y_2$$

[נימוק: הגרירה הראשונה מבוססת על-כך ש- f מונוטונית עולה.

הגרירה השנייה מבוססת על כך ש- f^{-1} הפוכה ל- f.]

- **<u>משפט</u>**

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהי הפונקציה $f : I \to f(I)$ והפונקציה ההפוכה $f^{-1} : f(I) \to I$.

אם f מונוטונית ממש ורציפה, אזי גם f^{-1} מונוטונית ממש ורציפה.

- <u>הוכחה</u>:

במשפט קודם הראינו כי פונקציה הפוכה של פונקציה מונוטונית ממש, גם היא מונוטונית ממש. נשאר להראות שהפונקציה ההפוכה רציפה.

במשפט קודם ראינו כי אם $f : I \to f(I)$ מונוטונית, אז היא רציפה אם ורק אם התמונה $f(I)$ היא קטע. לכן נסיק כי הפונקציה $f : f(I) \to I$ גם היא מקטע לקטע, ולכן רציפה.

- **<u>משפט</u>**

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהי הפונקציה $f : I \to f(I)$ רציפה והפיכה (לא ידוע אם מונוטונית).

אזי התמונה $f(I)$ היא קטע, וכן הפונקציה ההפוכה $f^{-1} : f(I) \to I$ רציפה.

- <u>הוכחה</u>:

נוכיח כי f מונוטונית ממש, וממשפט קודם ינבע מיד המשפט הנוכחי.

נתבונן ב- $x_1, x_2, x_3 \in I$, ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $x_1 < x_2 < x_3$.

נניח בשלילה כי $f(x_1)<f(x_2)>f(x_3)$ (כלומר, הפונקציה אינה מונוטונית עולה ממש).

אם $f(x_1)<f(x_3)$ אז $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$. לכן מהנתון כי $f(x)$ רציפה נובע על-פי משפט ערך הביניים שקיים $x\in[x_1,x_2]$ כך ש-$f(x)=f(x_3)$.

כלומר $f(x_3)$ מתקבלת פעמיים – פעם אחת עבור $x\in[x_1,x_2]$ ופעם אחת עבור x_3, לכן $f(x)$ אינה חד-חד ערכית, בסתירה להנחה שקיימת פונקציה הפוכה.

אם $f(x_1)>f(x_3)$ אז $f(x_2)>f(x_1)>f(x_3)$, ונקבל באותו אופן שהערך $f(x_1)$ מתקבל פעם אחת עבור $x\in[x_2,x_3]$ ופעם אחת עבור x_1.

- <u>**התכנסות של פונקציה באינסוף**</u>

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע אינסופי (a,∞).

נאמר כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, $L\in\mathbb{R}$, אם מתקיים $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{m\in\mathbb{R}}\,\forall_{x>m}\;\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$.

- <u>**קריטריון היינה להתכנסות של פונקציה באינסוף**</u>

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע אינסופי (a,∞).

אזי $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, $L\in\mathbb{R}$, אם ורק אם לכל סדרה (x_n) המוגדרת בסביבה (a,∞), שעבורה $\lim_{n\to\infty}(x_n)=\infty$, מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

- <u>**התכנסות של פונקציה לאינסוף**</u>

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

נאמר כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ אם מתקיים $\forall_{m\in\mathbb{R}}\,\exists_{\delta>0}\;0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow f(x)>m$.

- <u>**קריטריון היינה להתכנסות של פונקציה לאינסוף**</u>

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

נאמר כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ אם ורק אם לכל סדרה (x_n) המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, שעבורה $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0$, מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.

- **<u>התכנסות של פונקציה באינסוף לאינסוף</u>**

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת בקטע אינסופי $\left(a,\infty\right)$.

נאמר כי $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$ אם מתקיים $\forall_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{k\in\mathbb{R}}\ x>k \Rightarrow f\left(x\right)>m$.

- **<u>אריתמטיקה של גבולות אינסופיים</u>**

יהיו $f\left(x\right), g\left(x\right)$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, ונניח כי $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$.

1. אם קיימת סביבה מנוקבת של x_0 שבה מתקיים $g\left(x\right)\geq f\left(x\right)$, אזי $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=\infty$.
2. אם $g\left(x\right)$ חסומה מלרע בסביבה של x_0, אזי $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]=\infty$.
3. אם $g\left(x\right)$ חסומה מלרע ע"י מספר חיובי בסביבה של x_0, אזי $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right]=\infty$.

- <u>הוכחה</u>: (נוכיח את טענה 1 באמצעות קריטריון היינה, ושאר ההוכחות דומות.)

מהנתון כי $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$ נובע לפי קריטריון היינה שלכל סדרה $\left(x_n\right)$ המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, שעבורה $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=x_0$, מתקיים כי $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\infty$.

מהנתון שקיימת סביבה שבה $g\left(x\right)\geq f\left(x\right)$ נובע שקיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $g\left(x_n\right)\geq f\left(x_n\right)$, ולכן מאריתמטיקה של גבולות של סדרות נובע כי אם $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\infty$ וגם $g\left(x_n\right)\geq f\left(x_n\right)$, אזי גם $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(x_n\right)=\infty$.

נשתמש שוב בקריטריון היינה ונסיק שמכיוון שלכל סדרה $\left(x_n\right)$ שעבורה $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=x_0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(x_n\right)=\infty$, הרי ש- $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=\infty$.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0.

א. אם $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\pm\infty$ אז $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f\left(x\right)}=0$.

ב. אם $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=0$ ויש סביבה מנוקבת של x_0 שבה $f\left(x\right)>0$ אז $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f\left(x\right)}=\infty$.

יחידה 4 – רציפות במידה שווה

- **הקדמה**

הגדרנו רציפות של פונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 באופן הבא –

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

הגדרנו רציפות של פונקציה בקבוצה A באופן הבא –

$$\forall_{x_0\in A}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

נשים לב למבנה הפסוק: "לכל x_0 ולכל ε קיים δ..." משמע δ תלוי ב-x_0 וב-ε.

כלומר, ייתכן כי עבור $x_1,x_2\in A$ אם $x_1\neq x_2$ אז $\delta(\varepsilon,x_1)\neq\delta(\varepsilon,x_2)$.

- למשל: $f(x)=x^3$. פונקציה זו רציפה בכל הישר הממשי.

נבדוק איזו δ נצטרך לבחור עבור כל $x_0\in\mathbb{R}$.

כלומר, נרצה לאמוד כמה צריך להיות הגודל שמכיל את הסביבה $|x-x_0|$ (דהיינו δ) כדי שגודל אחר יכיל את הסביבה $|f(x_0+\delta)-f(x_0)|$ (דהיינו ε).

$$f(x_0+\delta)-f(x_0)=(x_0+\delta)^3-x_0^3=3x_0^2\delta+3x_0\delta^2+\delta^3$$

עבור $0<x_0,\delta$ מתקיים כי $3x_0^2\delta+3x_0\delta^2+\delta^3>3x_0^2\delta$, ולכן כדי שיתקיים $f(x_0+\delta)-f(x_0)<\varepsilon$ חייב להתקיים $3x_0^2\delta<3x_0^2\delta+3x_0\delta^2+\delta^3<\varepsilon$, כלומר $3x_0^2\delta<\varepsilon$. לכן $\delta<\dfrac{\varepsilon}{3x_0^2}$.

כלומר, לא קיים δ קבוע שעבורו ערכי הפונקציה קטנים מ-ε, אלא $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$. כלומר, δ הוא פונקציה של ε,x_0 ומשתנה לפיהם.

בהגדרה של רציפות במידה שווה נאפיין פונקציות שרציפות בקטע, שעבורן קיים δ שמתאים לכל הקבוצה, ושנקבע רק על ידי ε ולא על ידי x_0.

- **<u>רציפות במידה שווה</u>**

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת ורציפה בקבוצה A, $A\subseteq\mathbb{R}$.

נאמר כי $f\left(x\right)$ רציפה במידה שווה ב- A, אם מתקיים –

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{x_1,x_2\in A}\left|x_1-x_2\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$$

- **<u>משפט קנטור לרציפות במידה שווה</u>**

פונקציה רציפה בקטע חסום וסגור, רציפה בו במידה שווה.

- <u>הוכחה</u>:

יהי $I=\left[a,b\right]$ קטע חסום וסגור ותהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע I.

נניח בשלילה כי $f\left(x\right)$ רציפה, אך אינה רציפה במידה שווה בקטע הסגור והחסום I.

כלומר $\exists_{\varepsilon>0}\,\forall_{\delta>0}\,\exists_{x_1,x_2\in I}\left|x_1-x_2\right|<\delta\wedge\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\geq\varepsilon$.

ידוע שקיים ε כך שלכל δ מתקיים התנאי. נבחר לכל $n\in\mathbb{N}$ את $\delta=\frac{1}{n}$.

לכן קיימות סדרות $\left(x_n\right)_{(1)},\left(x_n\right)_{(2)}$ שעבורן מתקיים –

$$\left|x_{n(1)}-x_{n(2)}\right|<\frac{1}{n}\wedge\left|f\left(x_{n(1)}\right)-f\left(x_{n(2)}\right)\right|\geq\varepsilon$$

$\left(x_n\right)_{(1)}$ סדרה חסומה כי $x_{n(1)}\in I$, ולכן לפי משפט בולצאנו ויירשטראס קיימת תת-סדרה מתכנסת $\left(x_{n_k}\right)_{(1)}$. נסמן $\lim_{n\to\infty}\left(x_{n_k}\right)_{(1)}=x_0$, ונשים לב ש- $x_0\in I$, כי I קטע סגור וחסום.

<u>למה</u>: גם הסדרה $\left(x_{n_k}\right)_{(2)}$ מתכנסת ל- x_0.

<u>נימוק</u>: יהי $0<\varepsilon^*$ (להבדיל מ- ε שמתחילת ההוכחה).

קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left|x_{n_k(1)}-x_{n_k(2)}\right|<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon^*}{2}$ (נובע מתחילת ההוכחה).

וגם, מהנתון $\lim_{n\to\infty}\left(x_{n_k}\right)_{(1)}=x_0$ עולה שקיים k_0 כך שלכל $k>k_0$ מתקיים $\left|x_0-x_{n_k(1)}\right|<\frac{\varepsilon^*}{2}$

.

נבחר $k^* = \max\left(n_0, k_0\right)$, ונקבל שלכל $k > k^*$ מתקיים –

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon^*}{2} + \frac{\varepsilon^*}{2} > \left|x_{n_k(1)} - x_0\right| + \left|x_{n_k(2)} - x_{n_k(1)}\right| \geq \left|x_{n_k(2)} - x_{n_k(1)} + x_{n_k(1)} - x_0\right| = \left|x_{n_k(2)} - x_0\right|.$$

לכן נסיק כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n_k}\right)_{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n_k}\right)_{(2)} = x_0$, ונשים לב כי $x_0 \in I$.

<u>המשך ההוכחה</u>:

מהנתון כי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע I, נובע בפרט שהיא רציפה ב-x_0, ומקריטריון היינה לרציפות נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(2)}\right) = f\left(x_0\right)$.

לכן עבור ε שבתחילת ההוכחה מתקיים כי –

קיים k_1 כך שלכל $k > k_1$ מתקיים $\left|f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(1)}\right) - f\left(x_0\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

קיים k_2 כך שלכל $k > k_2$ מתקיים $\left|f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(2)}\right) - f\left(x_0\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

נבחר $k' = \max\left(k_1, k_2\right)$ ונקבל שלכל $k > k'$ מתקיים –

$$\left|f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(1)}\right) - f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(2)}\right)\right| = \left|f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(1)}\right) - f\left(x_0\right) + f\left(x_0\right) - f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(2)}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(1)}\right) - f\left(x_0\right)\right| + \left|f\left(x_0\right) - f\left(\left(x_{n_k}\right)_{(2)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

בסתירה להנחה.

- **<u>משפט</u>**

יהי I קטע חסום (גם אם פתוח) ותהי $f\left(x\right)$ רציפה במידה שווה בקטע I.

אזי $f\left(x\right)$ חסומה בקטע I.

- <u>הוכחה</u>: נבחר למשל $\varepsilon = 1$. מרציפות $f\left(x\right)$ במידה שווה נובע שקיים $0 < \delta$, כך שמתקיים $\forall_{x_1, x_2 \in I} \left|x_1 - x_2\right| < \delta \Rightarrow \left|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right| < 1$.

ניתן למצוא נקודות $x_1, ..., x_k$, פנימיות לקטע I, כך שלמשל -

$x_1 = a + \frac{\delta}{2}, ..., x_k = a + k \cdot \frac{\delta}{2}$ ולכן לכל איבר בקבוצה מתקיים $\left|x_{i+1} - x_i\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$.

וכן ניתן לבחור אותן כך ש- $\left|x_1-a\right|<\delta$ וכן $\left|b-x_k\right|<\delta$. ($a,b$ הם קצוות הקטע I).

נגדיר $m=\max\left(\left|f\left(x_1\right)\right|,\left|f\left(x_2\right)\right|,...,\left|f\left(x_k\right)\right|\right)$, ונוכיח כי $\left|f\left(x\right)\right|\le m$.

מרציפות $f\left(x\right)$ במידה שווה, ומהאופן שבחרנו את הקבוצה $x_1,...,x_k$, נובע שלכל x קיים x_i כך ש- $\left|x-x_i\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(x_i\right)\right|<\varepsilon=1\Rightarrow f\left(x_i\right)-1<f\left(x\right)<f\left(x_i\right)+1$

נשים לב כי $\left|f\left(x_i\right)\right|\le m$, ולכן ניתן להסיק כי $\left|f\left(x\right)\right|\le m+1$, כמבוקש.

- **<u>משפט</u>**

יהי $I=\left(a,b\right)$ קטע חסום ופתוח, ותהי $f\left(x\right)$ רציפה במידה שווה בקטע I.

אזי קיימים הגבולות הצדדיים $\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f\left(x\right)$.

- <u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה שלא קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right)$.

מקריטריון היינה לקיום גבול נובע שקיימת סדרה $\left(x_n\right)$ שמוגדרת בסביבה ימנית של a, כלומר $x_n>a$, ועבורה $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=a$, כך שהסדרה $f\left(x_n\right)$ אינה מתכנסת.

מהנתון $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=a$ נובע כי $\forall_{\varepsilon^*>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ \left|x_n-a\right|<\varepsilon^*$.

מהנתון ש-$f\left(x\right)$ רציפה במידה שווה בקטע, נובע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך ש– $\forall_{x_1,x_2\in I}\left|x_1-x_2\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$.

נבחר את ε^* להיות δ, ונקבל כי - $\forall_{\delta>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ \left|x_n-a\right|<\delta$, ובפרט גם מתקיים $\forall_{\delta>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n_1,n_2>n_0}\left|x_{n_1}-x_{n_2}\right|<\delta$.

מהנתון כי $f\left(x\right)$ רציפה במידה שווה נסיק כי $\left|x_{n_1}-x_{n_2}\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x_{n_1}\right)-f\left(x_{n_2}\right)\right|<\varepsilon$.

נשים לב שהביטוי $\left|x_{n_1}-x_{n_2}\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x_{n_1}\right)-f\left(x_{n_2}\right)\right|<\varepsilon$ מגדיר את $f\left(x_n\right)$ כסדרת קושי, ולכן היא מתכנסת, בסתירה להנחה.

- **<u>משפט</u>**

תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור וחסום $I=[a,b]$.

לכל $\varepsilon>0$ יש פונקציה פוליגונלית $p(x)$, כך שלכל $x\in I$ מתקיים $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

("פוליגון" בעברית הוא "מצולע".)

- <u>הוכחה:</u>

$f(x)$ רציפה בקטע סגור וחסום, ולכן לפי משפט קנטור היא רציפה במידה שווה בקטע.
לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך ש- $\forall_{x_1,x_2\in I}\ |x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

נבחר קבוצה של אברים באופן הבא - $a=x_1<x_2<\ldots<x_{l-1}<x_l=b$, ונבחר את האיברים כך שמתקיים $|x_i-x_{i+1}|<\delta$.

נגדיר לכל $x\in(x_i,x_{i+1})$ את הפונקציה הפוליגונלית הבאה -

$$p(x)=f(x_i)+\left[f(x_{i+1})-f(x_i)\right]\cdot\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)$$

נוכיח כי $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

$$|f(x)-p(x)|=|f(x)-f(x_i)+f(x_i)-p(x)|\le|f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-p(x)|.$$

נשים לב כי מהנתון ש-$f(x)$ רציפה במידה שווה נובע $|f(x)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

נשים לב גם כי מתקיים -

$$p(x_i)=f(x_i)+\left[f(x_{i+1})-f(x_i)\right]\cdot\left(\frac{x_i-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)=$$
$$=f(x_i)+\left[f(x_{i+1})-f(x_i)\right]\cdot\left(\frac{0}{x_{i+1}-x_i}\right)=f(x_i)$$

ולכן באופן כללי נסיק כי $p(x_i)=f(x_i)$, ומזה נובע כי -

$$|f(x_i)-p(x)|=|p(x_i)-p(x)|\underset{p(x_i)<p(x)<p(x_{i+1})}{\le}|p(x_{i+1})-p(x_i)|=|f(x_{i+1})-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

מאי השוויון בראשית ההוכחה נסיק כי –

$$|f(x)-p(x)|\le|f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-p(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

- **<u>תנאי ליפשיץ</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע ממשי I. נאמר כי $f\left(x\right)$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אם קיים $k \geq 0$, כך שלכל $x_1, x_2 \in I$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \leq k \cdot \left|x_1 - x_2\right|$.

- **<u>משפט</u>**

פונקציה המקיימת את תנאי ליפשיץ היא פונקציה רציפה במידה שווה (ובפרט גם רציפה).

- <u>הוכחה</u>:

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה ליפשיצית המוגדרת בקטע I.

יהי $\varepsilon > 0$, ונתון שקיים $k \geq 0$ כך ש-$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \leq k \cdot \left|x_1 - x_2\right|$.

נבחר $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, ונקבל כי אם $\left|x_1 - x_2\right| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, כלומר $k \cdot \left|x_1 - x_2\right| < \varepsilon$, אז מקיום תנאי ליפשיץ $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \leq k \cdot \left|x_1 - x_2\right|$ נובע ש-$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| < \varepsilon$, כמבוקש.

- <u>הערה</u>:

הגרירה בכיוון ההפוך אינה נכונה. כלומר, קיימות פונקציות רציפות במידה שווה שאינן מקיימות את תנאי ליפשיץ.

- <u>דוגמה</u>: הפונקציה $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בחלק האי-שלילי של הישר הממשי, אולם היא ליפשיצית רק בתחום $\left[1,\infty\right)$ ואינה ליפשיצית בתחום $\left[0,\infty\right)$.

בתחום $\left[1,\infty\right)$ מתקיים $\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right| = \left|\dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right| \leq \left|\dfrac{x_1 - x_2}{1+1}\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|x_1 - x_2\right|$, כמבוקש.

לעומת זאת בתחום $\left[0,\infty\right)$ היא לא ליפשיצית.

נימוק: נניח בשלילה שקיים $k \geq 0$ שמקיים $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \leq k \cdot \left|x_1 - x_2\right|$.

נבחר $x_2 = 0$ ונקבל שמתקיים $\left|\sqrt{x_1}\right| \leq k \cdot \left|x_1\right|$ לכל $x_1 \in \left[0,\infty\right)$.

נבחר $x_1 < \dfrac{1}{k^2}$ ונקבל סתירה.

יחידה 5 – נגזרות

- **נגזרת**

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבה (מלאה) של x_0.

אזי $f\left(x\right)$ גְזירה בנקודה x_0 והנגזרת שלה היא L, אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ וערכו הוא L.

נסמן את הנגזרת של הפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה x_0 כך - $f'\left(x_0\right)=L$.

- הערה: מטעמי נוחות לעתים מסמנים $h=x-x_0$, כך שאם $x\to x_0$ אז $h\to 0$, ולכן ניתן לסמן את הגבול שמגדיר את הנגזרת כך - $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$.

- דוגמאות:

א. נתבונן בפונקציית דיריכלה, שמוגדרת $D\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

פונקציה זו אינה רציפה באף נקודה על הישר הממשי, ולכן גם לא גזירה.

ב. נתבונן בפונקציה $x\cdot D\left(x\right)$.

פונקציה זו רציפה עבור $x_0=0$, אולם אינה גזירה בנקודה זו, כי הגבול שמגדיר את הנגזרת לא קיים –

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot D\left(x\right)-0\cdot f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot D\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}D\left(x\right).$$

ג. נתבונן בפונקציה $x^2\cdot D\left(x\right)$.

פונקציה זו גזירה בנקודה $x_0=0$, ומתקיים $f'\left(0\right)=0$, כי -

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot D\left(x\right)-0\cdot f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot D\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot D\left(x\right)=0$$

- **<u>משפט</u>**

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה של x_0.

אם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0, אז היא רציפה בנקודה זו.

- <u>הוכחה</u>:

מהנתון ש-$f(x)$ גזירה ב-x_0 נובע כי $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=L$.

נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=f(x_0+h)-f(x_0)$.

אם נוכיח כי מתקיים $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=0$, נוכל להסיק כי $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$, כמבוקש.

נוכיח זאת -

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=$$
$$=\lim_{h\to 0} h\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)}{h}=0\cdot L=0$$

- **<u>נגזרת חד-צדדית</u>**

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית של x_0.

נאמר כי $f(x)$ גזירה מימין, אם קיים הגבול מימין - $\lim_{x\to x_0^{+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ההגדרה לגזירות משמאל - אנלוגית.

<u>טענה</u>: מטענות שהראינו לגבי גבולות בנקודה, נובע כי גזירות בנקודה שקולה לקיום ושוויון בין הנגזרות החד-צדדיות.

- <u>**פונקציה אפסית**</u>

תהי $u(x)$ מוגדרת בסביבת 0.

$u(x)$ נקראת פונקציה אפסית, אם ניתן להציג אותה באופן הבא - $u(x)=x\cdot u^{*}(x)$,
כאשר $u^{*}(x)$ מוגדרת כפונקציה רציפה ב-0, ומתקיים כי $u^{*}(0)=0$.

- <u>**משפט**</u>

תהי $u(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת 0, וכן $u(0)=0$.

אזי $u(x)$ היא פונקציה אפסית אם ורק אם מתקיים $\lim\limits_{x\to0}\frac{u(x)}{x}=0$.

(כלומר, $u(x)$ מתקרבת לאפס מהר יותר מאשר x.)

- <u>הוכחה</u>: (חלק ראשון)

נניח כי $u(x)$ היא פונקציה אפסית, משמע ניתן להציג אותה $u(x)=x\cdot u^{*}(x)$, כאשר
$u^{*}(x)$ מוגדרת כפונקציה רציפה ב-0, ומתקיים כי $u^{*}(0)=0$. (כך נובע מההגדרה).

נשים לב כי $u(x)=x\cdot u^{*}(x)\Rightarrow\frac{u(x)}{x}=u^{*}(x)$, ומהנתון ש-$u^{*}(x)$ רציפה ב-0,
ומתקיים כי $u^{*}(0)=0$, נסיק כי $\lim\limits_{x\to0}\frac{u(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}u^{*}(x)=0$.

- <u>הוכחה</u>: (חלק שני)

נניח כי $\lim\limits_{x\to0}\frac{u(x)}{x}=0$.

נגדיר פונקציה חדשה - $v(x)=\begin{cases}\frac{u(x)}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$. הפונקציה מוגדרת בסביבה מלאה של 0,
ומתקיים לפי הנתון כי $\lim\limits_{x\to0}v(x)=0$.

לכן $v(x)$ רציפה ב-0 וכן $v(0)=0$, ולכן לפי ההגדרה $v(x)$ היא פונקציה אפסית.

נשים לב שקיבלנו את ההגדרה של פונקציה אפסית - $u(x)=x\cdot v(x)$, כמבוקש.

- **<u>אריתמטיקה של פונקציות אפסיות</u>**

סכום של פונקציות אפסיות, הוא פונקציה אפסית.

מכפלה של פונקציה אפסית בפונקציה חסומה, היא פונקציה אפסית.

- <u>הוכחה</u>:

- נוכיח עבור סכום:

נניח כי $u(x), v(x)$ פונקציות אפסיות. לפי ההגדרה נובע כי מתקיים - $u(x)+v(x)=x\cdot u^*(x)+x\cdot v^*(x)=x\cdot\left(u^*(x)+v^*(x)\right)$.

מאריתמטיקה של גבולות נובע כי הפונקציה $u^*(x)+v^*(x)$ רציפה ב-0, וכן ברור שערכה הוא 0, ולכן קיבלנו את ההגדרה של פונקציה אפסית.

- נוכיח עבור מכפלה:

נניח כי $r(x)$ פונקציה חסומה בסביבת 0, ונניח כי $u(x)$ פונקציה אפסית. לפי ההגדרה נובע כי מתקיים - $u(x)\cdot r(x)=x\cdot u^*(x)\cdot r(x)$.

נשים לב כי $u^*(x)\cdot r(x)$ היא פונקציה רציפה ב-0, ובנקודה זו ערכה הוא 0, ולכן קיבלנו את ההגדרה של פונקציה אפסית.

- **<u>דיפרנציאביליות</u>**

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה של x_0.

אזי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים כי $f'(x_0)=a$, אם ורק אם לכל h בסביבת x_0 ניתן להציג את ערך הפונקציה בנקודה x_0+h באופן הבא –

$$f(x_0+h)=f(x_0)+a\cdot h+u(h)$$

כאשר a הוא הנגזרת בנקודה x_0, ו-$u(h)$ פונקציה אפסית.

[נשים לב שהפונקציה $f(x_0)+a\cdot h$ היא משוואת ישר כלשהו, והפונקציה האפסית $u(h)$ מבטאת את הסטייה של ערך הפונקציה $f(x_0+h)$ מהישר $f(x_0)+a\cdot h$.]

- <u>הוכחה</u>: (חלק ראשון)

נניח כי בסביבת x_0 ניתן להציג את ערך הפונקציה בנקודה x_0+h באמצעות הביטוי

$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+a\cdot h+u\left(h\right)$, אזי $\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=a+\frac{u\left(h\right)}{h}$.

נסיק כי - $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(a+\frac{u\left(h\right)}{h}\right)=a+0=a$.

- <u>הוכחה</u>: (חלק שני)

נניח כי $f'\left(x_0\right)=a$.

נגדיר פונקציה חדשה - $u\left(h\right)=f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)-a\cdot h$.

נראה כי $u\left(h\right)$ פונקציה אפסית –

$$\lim_{h\to 0}\frac{u\left(h\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)-a\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{a\cdot h}{h}=a-a=0$$

כמו-כן נציב $h=0$ ונראה כי $u\left(0\right)=0$, ולכן נסיק ש-$u\left(h\right)$ פונקציה אפסית, כמבוקש.

- **<u>משיק</u>**

יהי l ישר כלשהו. ("ישר" משמע פונקציה מהצורה $l\left(x\right)=ax+b$.)

נאמר ש-l משיק לפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה x_0, אם $f\left(x_0+h\right)=l\left(x_0+h\right)+u\left(h\right)$,
כאשר $u\left(h\right)$ פונקציה אפסית.

- **<u>משפט</u>**

יהי הישר $l\left(x\right)=a\left(x-x_0\right)+b$, ותהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 .

אזי $l\left(x\right)$ משיק לפונקציה $f\left(x\right)$ ב-x_0, אם ורק אם $f\left(x\right)$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים
$f'\left(x_0\right)=a$ וגם $f\left(x_0\right)=b$.

- <u>הוכחה</u>: (חלק ראשון)

נניח כי הישר $l(x)=a(x-x_0)+b$ משיק לפונקציה $f(x)$ ב-x_0.

כלומר - $f(x_0+h)=l(x_0+h)+u(h)=ah+b+u(h)$.

קל לראות כי אם נציב $h=0$ נקבל $f(x_0)=b$, ואם כך $f(x)$ דיפרנציאבילית לפי הגדרה, ומתקיים כי $f'(x)=a$.

- <u>הוכחה</u>: (חלק שני)

נניח כי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים $f'(x_0)=a$ וגם $f(x_0)=b$.

נסיק כי היא דיפרנציאבילית ולכן $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+u(h)$.

נשים לב ש- $l(x_0+h)=a\cdot h+b=f'(x_0)\cdot h+f(x_0)$, כמבוקש.

- **<u>נגזרת של סכום ונגזרת של מכפלה</u>**

יהיו $g(x), f(x)$ פונקציות גזירות ב-x_0, כך שמתקיים –

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+u_1(h)$$

$$g(x_0+h)=g(x_0)+g'(x_0)\cdot h+u_2(h)$$

(המרנו את הגדרת הגזירות בהגדרה השקולה של דיפרנציאביליות).

אזי –

א. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

ב. $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$

- <u>הוכחה</u>: (א)

מהנתון ששתי הפונקציות גזירות נסיק שהן דיפרנציאביליות, ולכן -

$$\begin{aligned}(f+g)(x_0+h) &\underset{by\,def}{=} f(x_0+h)+g(x_0+h)= \\ &=\left[f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+u_1(h)\right]+\left[g(x_0)+g'(x_0)\cdot h+u_2(h)\right]= \\ &=\left[f(x_0)+g(x_0)\right]+\left[f'(x_0)+g'(x_0)\right]\cdot h+\left[u_1(h)+u_2(h)\right]\end{aligned}$$

נשים לב כי $f(x_0)+g(x_0)$ הוא ערך פונקציית הסכום בנקודה x_0, וכן כי $u_1(h)+u_2(h)$ היא פונקציה אפסית (הוכחנו בטענה קודמת שסכום של פונקציות אפסיות הוא פונקציה אפסית).

קיבלנו כי גם סכום הפונקציות הוא פונקציה דיפרנציאבילית, שהמקדם של h בביטוי הדיפרנציאבילי שלה הוא $f'(x_0)+g'(x_0)$, ולכן זוהי הנגזרת.

- <u>הוכחה</u>: (ב)

מהנתון ששתי הפונקציות גזירות נסיק שהן דיפרנציאביליות, ולכן -

$$(f\cdot g)(x_0+h)\underset{by\,def}{=} f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)=\left[f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+u_1(h)\right]\cdot\left[g(x_0)+g'(x_0)\cdot h+u_2(h)\right]$$

אם נפתח את הביטוי נקבל סכום של שלושת הביטויים הבאים –

- ביטוי ראשון: $f(x_0)\cdot g(x_0)$
- ביטוי שני: $\left[f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\right]\cdot h$
- ביטוי שלישי:

$$\left[u_1(h)\cdot\left(g(x_0)+g'(x_0)\cdot h\right)+u_2(h)\cdot\left(f(x_0)+f'(x_0)\cdot h\right)\right]+u_1(h)\cdot u_2(h)$$

נראה שקיבלנו את הגדרת הדיפרנציאביליות עבור פונקציית המכפלה -

הביטוי הראשון הוא ערך המכפלה בנקודה x_0. כלומר - $(f\cdot g)(x_0)=f(x_0)\cdot g(x_0)$.

הביטוי השני הוא מקדם כלשהו כפול h.

הביטוי השלישי הוא פונקציה אפסית, כי הוא מורכב ממכפלה של פונקציות אפסיות בפונקציות חסומות, ומסכום של פונקציות אפסיות.

קיבלנו כי גם מכפלת הפונקציות היא פונקציה דיפרנציאבילית, שהמקדם של h בביטוי הדיפרנציאבילי שלה הוא $f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$, ולכן זוהי הנגזרת.

- **<u>נגזרת של הרכבה</u>**

תהי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ונניח כי $f(x_0)=y_0$, ותהי $g(x)$ גזירה בנקודה y_0.

אזי $(g\circ f)(x)$ גזירה בנקודה x_0, ומתקיים כי - $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

<u>למה</u>: יהיו $v(h),u(h)$ פונקציות אפסיות, אזי גם פונקציה מורכבת מהצורה $u\circ(c\cdot h+v)$ (כאשר c קבוע) היא פונקציה אפסית.

<u>נימוק</u>:

[לצורך הבהירות, כשמדובר בכפל נוסיף סימן כפל • בין המקדם לבין הסוגריים, כדי להבדיל מפעולת ההרכבה שנסמן $\circ$.]

$v(h),u(h)$ אפסיות, ולכן $v(h)=h\cdot v^*(h)$, $u(h)=h\cdot u^*(h)$.

מהנתון ש-$v(h)$ אפסית נובע $c\cdot h+v(h)=c\cdot h+h\cdot v^*(h)=h\cdot(c+v^*(h))$.

נצרף את הנתון שגם $u(h)$ אפסית, ונקבל –

$$u\circ(c\cdot h+v)=(c\cdot h+v)\cdot u^*(c\cdot h+v)=(c\cdot h+h\cdot v^*)\cdot u^*(c\cdot h+h\cdot v^*)=$$
$$=h\cdot(c+v^*)\cdot u^*(c\cdot h+h\cdot v^*)$$

[נימוק: בהקשר זה הביטוי "$c\cdot h+v$" משמש בתפקיד "h", ולכן אם באופן כללי $u(h)=h\cdot u^*(h)$, במקרה הנוכחי $u\circ(c\cdot h+v)=(c\cdot h+v)\cdot u^*(c\cdot h+v)$.]

נשים לב שהפונקציה $u\circ(c\cdot h+v)$ היא מכפלה של h ב-$(c+v^*)\cdot u^*(c\cdot h+h\cdot v^*)$, ולכן כדי להוכיח ש-$u\circ(c\cdot h+v)$ אפסית נותר להראות ש-$(c+v^*)\cdot u^*(c\cdot h+h\cdot v^*)$ מקיימת את התנאים הנדרשים להגדרת פונקציה אפסית.

נתבונן בפונקציה $(c+v^*)\cdot u^*(c\cdot h+h\cdot v^*)$:

ראשית, פונקציה זו רציפה בסביבת 0, כי היא סכום, מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות.

שנית, בנקודה 0 קל לראות שערך הפונקציה הוא 0.

לכן נסיק כי הפונקציה המורכבת $u\circ(c\cdot h+v)$ ניתנת לביטוי כמכפלה של h עם פונקציה רציפה ב-0 שערכה בנקודה 0 הוא 0, ולכן היא פונקציה אפסית.

- הוכחה:

נתון כי $f(x)$ גזירה ב-x_0, ולכן באופן שקול מתקיימת דיפרנציאביליות - $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+u_1(h)$.

סימנו $f(x_0)=y_0$ והנחנו שנתון כי $g(x)$ גזירה בנקודה y_0, ולכן באותו אופן מתקיים - $g(y_0+h)=g(y_0)+g'(y_0)\cdot h^*+u_2(h^*)$.

נרשום את פונקציית ההרכבה –

$$g\circ f(x_0+h)=g\left(f(x_0+h)\right)=g\left(f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+u_1(h)\right)$$

נשים לב שלפי הגדרת הנגזרת (ובאופן שקול – דיפרנציאביליות) h קטן כרצוננו, ולכן נוכל להגדיר $h^*=f'(x_0)\cdot h+u_1(h)$, ולהמשיך את הפיתוח באופן הבא –

(נסמן $f(x_0)=y_0$)

$$g(y_0+h^*)=g(y_0)+g'(y_0)\cdot h^*+u_2(h^*)=$$
$$=g(y_0)+g'(y_0)\cdot\left[f'(x_0)\cdot h+u_1(h)\right]+u_2\left(f'(x_0)\cdot h+u_1(h)\right)$$

נשים לב שהאיבר האחרון, $u_2\left(f'(x_0)\cdot h+u_1(h)\right)$, הוא פונקציה מהצורה $u\circ(c\cdot h+v)$ שהוכחנו בלמה שהיא פונקציה אפסית.

כמו-כן $u_1(h)$ היא פונקציה אפסית (המכפלה שלה בקבוע $g'(y_0)$ לא משנה), ולכן בסוף הביטוי יש סכום של שתי פונקציות אפסיות.

לכן נסיק שהמקדם של בביטוי הדיפרנציאבילי של ההרכבה הוא $g'(y_0)\cdot f'(x_0)$, ולכן זו הנגזרת.

- **<u>נגזרת של מנה</u>**

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות מוגדרות בסביבת x_0 וגזירות ב-x_0, ונניח כי $g(x_0)\neq 0$.

אזי מתקיים - $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

- הוכחה:

1. ראשית נוכיח את הנוסחה $\left(\frac{1}{y}\right)'=\frac{-1}{y^2}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{y_0+h}-\frac{1}{y_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{y_0-y_0-h}{y_0\left(y_0+h\right)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot y_0\left(y_0+h\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{y_0\left(y_0+h\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{{y_0}^2+y_0\cdot h}=\frac{-1}{{y_0}^2}$$

2. נסיק לפי נוסחת ההרכבה שמתקיים $\left(\frac{1}{g\left(x_0\right)}\right)'=\frac{-1}{g^2\left(x_0\right)}\cdot g'\left(x_0\right)$.

3. נציב בנוסחת המכפלה –

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'=f'\cdot\frac{1}{g}+f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{f'}{g}+f\cdot\frac{-1}{g^2}\cdot g'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

- **<u>משפט</u>**

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת ורציפה בסביבת x_0 (רציפות בסביבה!) וגזירה ב-x_0, וכן $f\left(x\right)$ הפיכה בסביבה זו.

אזי $g\left(x\right)=f^{-1}\left(x\right)$ גזירה ב-$f\left(x_0\right)$, ומתקיים $g\left(f\left(x_0\right)\right)'=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$.

- <u>הוכחה</u>:

נתון ש-$f\left(x\right)$ רציפה והפיכה בסביבת x_0 ולכן היא עולה ממש או יורדת ממש בסביבה זו.

ממשפט קודם נובע שקיימת פונקציה הפוכה רציפה ומונוטונית באותו כיוון של $f\left(x\right)$.

נסמן $y_0=f\left(x_0\right)$, ונחשב את הגבול הבא –

$$\lim_{t\to 0}\frac{g\left(y_0+t\right)-g\left(y_0\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{g\left(y_0+t\right)-g\left(y_0\right)}\right)^{-1}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{f\left(g\left(y_0+t\right)\right)-f\left(g\left(y_0\right)\right)}{g\left(y_0+t\right)-g\left(y_0\right)}\right)^{-1}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{x_0+h-x_0}\right)^{-1}=\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{x_0+h-x_0}\right)\right]^{-1}=\left[f'\left(x_0\right)\right]^{-1}=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$$

[השוויון הראשון נובע מכך ש-$g\left(x\right)$ מונוטונית ממש, ולכן ניתן לחלק ב-$g\left(y_0+t\right)-g\left(y_0\right)$.

השוויון השני מבוסס על כך ש-$g\left(x\right)$ הפוכה ל-$f\left(x\right)$, ולכן אפשר לנסח את הפיתוח הבא -
$t=y_0+t-y_0=f\left(g\left(y_0+t\right)\right)-f\left(g\left(y_0\right)\right)$.

השוויון השלישי נובע מהסימון $y_0=f\left(x_0\right)$, ולכן $g\left(y_0\right)=x_0$.

- **נגזרות של פונקציות האקספוננט והלוגריתם**

א. נחשב את הנגזרת של הפונקציה $\log(x)$, תוך שימוש בחוקי הלוגריתמים.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x_0+h)-\log(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log\left(1+\frac{\frac{1}{x_0}}{\frac{1}{h}}\right)=\lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{\frac{1}{x_0}}{\frac{1}{h}}\right)^{\frac{1}{h}}=\log\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{\frac{1}{x_0}}{\frac{1}{h}}\right)^{\frac{1}{h}}=\log e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}$$

ב. ידוע כי $\ln(x)$ היא הפונקציה ההפוכה של e^x, ולכן נשתמש במשפט שהוכחנו קודם כדי לחשב את הנגזרת של e^x.

$$\left(e^x\right)'=\frac{1}{\left(\ln(y)\right)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x$$

- **נקודת קיצון מקומית**

תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בתחום D, ותהי הנקודה $a\in D$.

נאמר כי a היא נקודת מקסימום מקומית של $f(x)$, אם קיימת סביבה $U\subseteq D$ ו- $a\in U$ (הכלה ממש), כך ש- $\forall_{x\in U}\ f(x)\le f(a)$.

[ההגדרה לנקודת מינימום מקומית אנלוגית.]

- **משפט פרמה לנקודות קיצון**

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע I.

אם $f(x)$ מקבלת קיצון מקומי בנקודה a שהיא פנימית ממש ל- I, אזי $f'(a)=0$.

- <u>הוכחה:</u>

נניח כי a מקסימום מקומי.

נתון כי a פנימית ממש ל- I, ולכן קיים $\delta>0$ כך ש- $I \supseteq (a-\delta,a+\delta) \ni a$.

נתון גם כי $f(x)$ גזירה בקטע I, ולכן קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

לכל $x\in(a-\delta,a)$ מתקיים כי $x-a<0$, וכן בגלל ש- a מקסימום מקומי, מתקיים כי $f(x)-f(a)\le 0$, ולכן $f'_{-}(a)\ge 0$.

לכל $x\in(a,a+\delta)$ מתקיים כי $x-a>0$, וכן בגלל ש- a מקסימום מקומי, מתקיים כי $f(x)-f(a)\le 0$, ולכן $f'_{-}(a)\le 0$.

ממשפט שהוכחנו לגבי גבולות, נובע כי אם קיים גבול, אז הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים, ולכן $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=0$.

- **<u>משפט רול</u>**

תהי $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, וגזירה בקטע הפתוח (a,b).

אם $f(a)=f(b)$, אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

- <u>הוכחה:</u>

נתון כי $f(x)$ רציפה בקטע סגור, ולכן ממשפט ויירשטראס נובע שהיא מקבלת בו מקסימום ומינימום. כלומר - $\exists_{x_1,x_2\in[a,b]}\ \forall_{x\in[a,b]}\ f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.

נדון בשני מקרים –

אם x_1,x_2 הם נקודות הקצה של התחום, אז מהנתון $f(a)=f(b)$ נובע כי מדובר בפונקציה קבועה בקטע, שנגזרתה מתאפסת לכל נקודה בקטע.

אם x_1,x_2 אינן נקודות הקצה של התחום (מספיק שאחת מהן לא תהיה קצה של התחום), אז הן נקודות קיצון מקומיות לפי הגדרה ופנימיות לקטע $[a,b]$, ולכן ממשפט פרמה נובע כי $f'(x_1)=0$, $f'(x_2)=0$.

- **<u>משפט הערך הממוצע של לגרנז'</u>**

תהי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע הסגור $\left[a,b\right]$, וגזירה בקטע הפתוח $\left(a,b\right)$.

אזי קיים $c\in\left(a,b\right)$ כך ש-$f'\left(c\right)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$.

- <u>הוכחה:</u>

נגדיר את הפונקציה הבאה - $\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)-\left[\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\cdot\left(x-a\right)+f\left(a\right)\right]$.

הפונקציה $\varphi\left(x\right)$ מקיימת את תנאי משפט רול:

היא רציפה לפי אריתמטיקה של רציפות, והיא גזירה לפי אריתמטיקה של נגזרות.

כמו-כן נשים לב כי $\varphi\left(a\right)=0$ וכי $\varphi\left(b\right)=0$.

לכן לפי משפט רול קיימת נקודה $c\in\left(a,b\right)$ כך ש-$\varphi'\left(c\right)=0$.

נשים לב כי מתקיים - $\varphi'\left(x\right)=f'\left(x\right)-\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$, ולכן אם עבור הנקודה c שבחרנו לפי משפט רול, מתקיים $\varphi'\left(c\right)=0$, נסיק $f'\left(c\right)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$, כמבוקש.

- <u>מסקנה:</u>

אם הנגזרת של $f\left(x\right)$ קבועה ושווה ל-0 בקטע I, אזי הפונקציה קבועה בקטע.
אם הנגזרת של $f\left(x\right)$ חיובית ב-I, אז $f\left(x\right)$ עולה במובן החזק בקטע.
וכן באופן אנלוגי עבור נגזרת שלילית.

- <u>נימוק:</u>

נניח כי $f'\left(x\right)=0$ בקטע. ממשפט לגראנז' נובע שלכל $a,b\in I$ קיים $c\in\left(a,b\right)$, כך ש-$f'\left(c\right)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$. מהנתון נובע כי $f'\left(c\right)=0$, ומכך נובע מיד כי $f\left(b\right)=f\left(a\right)$.

- **<u>משפט הערך הממוצע של קושי</u>**

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$, וגזירות בקטע הפתוח (a,b).

נניח גם כי $g'(x)\neq 0$ בקטע.

אזי קיים $c\in(a,b)$, כך ש- $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$.

- הוכחה:

ראשית, מההנחה $g'(x)\neq 0$ נובע ממשפט הערך הממוצע של לגראנז' כי $g(x)$ אינה קבועה, ולכן בהכרח $g(a)-g(b)\neq 0$.

בדומה להוכחת משפט לגראנז', נגדיר את הפונקציה הבאה –

$$\varphi(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\left(g(x)-g(a)\right)+f(a)\right]$$

זו פונקציה רציפה וגזירה לפי כללי האריתמטיקה של רציפות וגזירות, וכן מתקיים כי $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=0$. לכן ממשפט רול נובע שקיים $c\in(a,b)$, כך ש- $\varphi'(c)=0$.

נשים לב כי $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$, ולכן נסיק כי –

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)=0\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>הערה</u>: משפט לגראנז' הוא מקרה פרטי של משפט קושי.

ניתן להציב במשפט קושי את הפונקציה $g(x)=x$, ולקבל את משפט לגראנז'.

- **<u>תכונת ערך הביניים של פונקציית הנגזרת</u>**

במשפט ערך הביניים הוכחנו שרציפות גוררת את תכונת ערך הביניים, אולם ההיפך לא נכון. קיימות פונקציות שמקיימות את תכונת ערך הביניים, אך אינן רציפות.

דוגמה: נגדיר את הפונקציה הבאה - $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

קל לראות שהפונקציה רציפה ב- 0, כי מתקיים $\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$, וכן קל לבדוק

שהפונקציה גזירה בכל נקודה כולל 0: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

נתבונן בפונקציית הנגזרת, ונשתמש בכלל המכפלה ובכלל השרשרת:

$$f'\left(x\right)=\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

פונקציה זו אינה רציפה ב- 0, ולמרות זאת, המידע שיש בידינו שפונקציה זו היא נגזרת של פונקציה אחרת, מספיק כדי להסיק כי היא מקיימת את תכונת ערך הביניים, כפי שנוכיח במשפט הבא.

- **<u>משפט דארבו</u>** (תכונת ערך הביניים לנגזרות)

תהי $f\left(x\right)$ גזירה בקטע $\left[a,b\right]$, ונניח שקיימות הנגזרות החד-צדדיות $f_+'\left(a\right)$, $f_-'\left(b\right)$.

יהי $s\in\mathbb{R}$, כך ש- $f_+'\left(a\right)<s<f_-'\left(b\right)$ (בלי הגבלת הכלליות), אזי קיים $x_0\in\left(a,b\right)$, כך ש- $f'\left(x_0\right)=s$.

- <u>הוכחה:</u>

נגדיר פונקציית עזר - $\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)-s\cdot x$, כך ש- $\varphi'\left(x\right)=f'\left(x\right)-s$.

נתון כי $f_+'\left(a\right)<s<f_-'\left(b\right)$, ולכן נוכל להסיק - $\begin{matrix}\varphi_+'\left(a\right)=f_+'\left(a\right)-s<0\\ \varphi_-'\left(b\right)=f_-'\left(b\right)-s>0\end{matrix}$

משמע בסביבה ימנית של a הפונקציה $\varphi\left(x\right)$ יורדת, ולכן קיים a^* כך ש- $\varphi\left(a\right)>\varphi\left(a^*\right)$.

וכן בסביבה שמאלית של b הפונקציה $\varphi\left(x\right)$ עולה, ולכן קיים b^* כך ש- $\varphi\left(b\right)>\varphi\left(b^*\right)$.

נדון בשני מקרים –

א. אם $\varphi\left(a\right)=\varphi\left(b\right)$, ממשפט רול נובע שקיים $x_0\in\left(a,b\right)$ כך ש- $\varphi'\left(x_0\right)=0$.

ולכן $\varphi'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)-s=0\Rightarrow f'\left(x_0\right)=s$, כמבוקש.

ב. אם $\varphi\left(a\right)\neq\varphi\left(b\right)$, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\varphi\left(a\right)<\varphi\left(b\right)$.

מהנתון כי $f\left(x\right)$ גזירה בקטע הסגור $\left[a,b\right]$ נובע שגם $\varphi\left(x\right)$ גזירה בו ולכן היא גם רציפה בו.

ממשפט המקסימום של ויירשטראס נובע כי היא מקבלת בקטע מינימום, עבור x_0 כלשהי.

נשים לב כי $\varphi(a^*)<\varphi(a)<\varphi(b)$, ולכן $\begin{matrix}\varphi(x_0)\neq\varphi(b)\\ \varphi(x_0)\neq\varphi(a)\end{matrix}$.

ממשפט פרמה נובע כי בנקודת קיצון פנימית $\varphi'(x_0)=0$, ולכן

$\varphi'(x_0)=f'(x_0)-s=0\Rightarrow f'(x_0)=s$, כמבוקש.

דרך נוספת להוכיח את המשפט עבור האפשרות $\varphi(a)\neq\varphi(b)$, היא להתבונן בקטע הסגור $[a^*,b]$.

נשים לב כי $\varphi(a)\in(a^*,b)$, ובגלל ש-$\varphi(x)$ רציפה, נסיק ממשפט ערך הביניים שקיימת נקודה $c\in(a^*,b)$, כך ש-$\varphi(c)=\varphi(a)$.

נפעיל את משפט רול לקטע $[a,c]$, ונקבל שקיים $x_0\in(a,c)$, כך ש-$\varphi'(x_0)=0$.

נשים לב כי מכיוון ש-$c\in(a^*,b)$, אז $(a,c)\subset(a,b)$, ולכן $x_0\in(a,b)$.

נסיק כי $\varphi'(x_0)=f'(x_0)-s=0\Rightarrow f'(x_0)=s$, כמבוקש.

- <u>מסקנה</u>:
במשפט דארבו ראינו שפונקציות נגזרת הן פונקציות שמקיימות את תכונת ערך הביניים אבל אינן רציפות בהכרח.
עם זאת, פונקציות שמקיימות את תכונת ערך הביניים ואינן רציפות, בהכרח סובלות מאי-רציפות מסוג שני.
נשים לב כי באי-רציפות סליקה ובאי-רציפות מסוג ראשון, ניתן למצוא שני ערכים שקיים ערך ביניהם שהפונקציה לא מקבלת, בניגוד לתכונת ערך הביניים.

<u>צידה השני של מסקנה זו</u>: כל פונקציה שיש לה נקודת אי-רציפות סליקה או מסוג ראשון, בהכרח אינה נגזרת של פונקציה אחרת. במילים אחרות: אין לה פונקציה קדומה.

- **<u>נגזרת של פונקציה מעריכית</u>**

תהי הפונקציה $f(x)=a^x$, $a>0$.

נשים לב כי ניתן לבטא את הפונקציה באופן הבא - $a^x=e^{\ln(a^x)}=e^{x\ln a}$.

לכן נסיק לפי כלל השרשרת - $(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$.

נשים לב שעבור המקרה הפרטי $a=e$, נקבל $(e^x)'=e^x\cdot\ln e=e^x$.

- **<u>נגזרת של משתנה בחזקה ממשית</u>**

כמסקנה מהנוסחה האחרונה נובע כי עבור פונקציה מהצורה $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>0$, מתקיימת הנוסחה הבאה -

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\left(e^{\ln\left(x^{\alpha}\right)}\right)'=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

(זו הרחבה של הנוסחה עבור פולינומים שבהם המעריכים טבעיים, גם למעריכים ממשיים).

- **<u>נגזרת של פונקציה בחזקת פונקציה</u>**

תהי $h(x)=f(x)^{g(x)}$, $f(x)>0$, וכן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ גזירות.
נפתח נוסחה לנגזרת, ונשתמש בכלל המכפלה ובכלל השרשרת:

$$h'(x)=\left(f(x)^{g(x)}\right)'=\left(e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}\right)'=\left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)'=$$

$$=e^{g(x)\ln f(x)}\cdot\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right]=$$

$$=f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

- **<u>רשימת נגזרות של פונקציות טריגונומטריות</u>**

ההוכחות נסמכות על שוויון שיוכח בקורס הבא: $\sin x\le x\le\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$, $x>0$.

משוויון זה נובע כי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, באמצעות כלל הסנדוויץ', כך –

$$\sin x\le x\le\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\frac{\cos x}{\sin x}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sin x}\Rightarrow\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{\sin x}{\sin x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\cos x\le\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\le 1\Rightarrow 1\le\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\le 1$$

- **נגזרת של** $\sin x$

נשים לב לזהות הטריגונומטית הבאה - $\cos h=1-2\sin^{2}\left(\frac{h}{2}\right)$.

$$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin x_0\cdot\cosh+\cos x_0\sinh-\sin x_0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin x_0(\cosh-1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{\cos x_0\sinh}{h}=\sin x_0\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cosh-1}{h}+\lim_{h\to0}\cos x_0=$$

$$=\sin x_0\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cosh-1}{h}+\cos x_0=\sin x_0\cdot\lim_{h\to0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}+\cos x_0=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sin x_0\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{-h}{2}}+\cos x_0=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sin x_0\cdot(-1)\cdot\lim_{h\to0}\sinh+\cos x_0=0+\cos x_0=\cos x_0$$

- **נגזרת של** $\cos x$

נשים לב לזהות $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. נסיק מכך –

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+\pi)=-\sin x$$

- **נגזרת של** $\tan x$

מכיוון ש- $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, קל לחשב לפי כלל המנה שמתקיים $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2(x)}$

- **נגזרת של** $\arcsin x$

נשתמש במשפט שהוכחנו כי נגזרת של פונקציה הופכית היא $\frac{1}{f'(x)}$.

נגדיר $\arcsin y=x \Leftrightarrow \sin x=y$, ונקבל כי - $(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin x)'}=\frac{1}{\cos x}$.

הגדרנו את תחום הפונקציה $\arcsin$ כ- y, ולכן נרצה לקבל את הנגזרת במונחי y.

נשים לב כי $y=\sin x\Rightarrow\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-\sin^2 x}\Rightarrow\sqrt{1-y^2}=\cos x$, ולכן –

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

- **נגזרת של** $\arctan x$

נשתמש במשפט שהוכחנו כי נגזרת של פונקציה הופכית היא $\frac{1}{f'(x)}$.

נגדיר $\arctan y = x \Leftrightarrow \tan x = y$, ונקבל כי -

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2(x).$$

הגדרנו את תחום הפונקציה $\arctan$ כ- y , ולכן נרצה לקבל את הנגזרת במונחי y .

נשים לב כי

$$y = \tan x \Rightarrow y^2 + 1 = \tan^2 x + 1 \Rightarrow y^2 + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{y^2+1} = \cos^2 x$$

ולכן –

$$(\arctan x)' = \cos^2(x) = \frac{1}{y^2+1}$$

יחידה 6 – פולינומי טיילור

- **פונקציה אפסית מסדר n**

נשתמש בהגדרה שהוכחנו כי היא שקולה להגדרה של פונקציה אפסית מסדר ראשון:

תהי $u(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת 0, וכן $u(0)=0$.

נאמר כי $u(x)$ פונקציה אפסית מסדר ראשון, אם מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{x}=0$.

באותו אופן נאמר כי $u(x)$ פונקציה אפסית מסדר n, אם מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{x^n}=0$.

- **קירוב באמצעות פולינומים**

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת h של x_0.

נרצה לחשב בקירוב את ערך הפונקציה עבור $x\in(x_0-h,x_0+h)$, באמצעות פולינום.

כלומר נרצה למצוא פולינום שייתן לנו את הערך של $f(x)$ עבור $x\in(x_0-h,x_0+h)$, כאשר

השגיאה לא גדולה מידי.

נסמן ב-$p_n(h)$ את פולינום הקירוב מסדר n, ונסמן ב-$\alpha_n(h)$ פונקציה אפסית מסדר n.

כדי לדאוג שהשגיאה לא תהיה גדולה מידי, נדרוש שיתקיים עבור פולינום הקירוב השוויון הבא –

$$f(x)=p_n(h)+\alpha_n(h)$$

כלומר, נדרוש שערך הפונקציה בנקודה x יהיה שווה לפולינום הקירוב, עד-כדי שגיאה שניתנת לתיאור באמצעות פונקציה אפסית מסדר n.

- **<u>יחידות הקירוב</u>**

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבת h של x_0.

נניח כי ניתן לקרב את הפונקציה באמצעות $f\left(x\right)=p_n\left(h\right)+\alpha_n\left(h\right)$ וגם באמצעות $f\left(x\right)=q_n\left(h\right)+\beta_n\left(h\right)$, אזי $p_n\left(h\right)=q_n\left(h\right)$.

(באופן מיידי נובע מטענה זו גם השוויון $\alpha_n\left(h\right)=\beta_n\left(h\right)$)

<u>הוכחה</u>:

נתון $f\left(x\right)=p_n\left(h\right)+\alpha_n\left(h\right)$ וגם $f\left(x\right)=q_n\left(h\right)+\beta_n\left(h\right)$.

לכן מתקיים $p_n\left(h\right)+\alpha_n\left(h\right)=q_n\left(h\right)+\beta_n\left(h\right)\Rightarrow p_n\left(h\right)-q_n\left(h\right)=\beta_n\left(h\right)-\alpha_n\left(h\right)$

הוכחנו כי הפרש של פונקציות אפסיות הוא פונקציה אפסית, ובמקרה הנוכחי ההפרש $\beta_n\left(h\right)-\alpha_n\left(h\right)$ הוא פונקציה אפסית מסדר n. נסמן $\gamma_n\left(h\right)=\beta_n\left(h\right)-\alpha_n\left(h\right)$.

נסמן את הפולינומים $p_n\left(h\right)=\sum_{k=1}^{n}a_kh^k$, $q_n\left(h\right)=\sum_{k=1}^{n}b_kh^k$ ונקבל –

$$\gamma_n\left(h\right)=p_n\left(h\right)-q_n\left(h\right)=\sum_{k=1}^{n}a_kh^k-\sum_{k=1}^{n}b_kh^k=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-b_k\right)h^k$$

נניח בשלילה כי $p_n\left(h\right)\neq q_n\left(h\right)$, אזי נובע מכך שקיים לפחות אינדקס k_0 אחד, שעבורו מתקיים $a_{k_0}\neq b_{k_0}$.

לכן מצד אחד מתקיים $0\neq a_{k_0}-b_{k_0}=\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-b_k\right)h^{k-k_0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-b_k\right)h^k}{h^{k_0}}$.

מצד שני $\gamma_n\left(h\right)$ פונקציה אפסית מסדר n ולכן $0=\lim_{x\to 0}\frac{\gamma_n\left(h\right)}{h^n}\cdot h^{n-k_0}=\lim_{x\to 0}\frac{\gamma_n\left(h\right)}{h^{k_0}}$.

הראינו כי מתקיים השוויון $\gamma_n\left(h\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-b_k\right)x^k$, ולכן זו סתירה.

- **פולינום טיילור (או: קיום של פולינום קירוב מסדר n)**

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה n פעמים בסביבת h של x_0.

נגדיר את הפולינום הבא - $p_n(f)(x) \underset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$

כאשר $f^{(k)}(x_0)$ היא הנגזרת מסדר k של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0.

<u>טענה</u>: לכל $x \in (x_0-h, x_0+h)$ מתקיים $f(x) = p_n(f)(x) + \alpha_n(x)$.

כלומר פולינום טיילור הוא פולינום קירוב מסדר n של הפונקציה $f(x)$, ולפיכך, מיחידות פולינום הקירוב נובע כי פולינום טיילור הוא פולינום הקירוב היחיד של הפונקציה $f(x)$.

<u>הוכחה</u>:

כדי להוכיח שפולינום טיילור הוא פולינום הקירוב מסדר n, מספיק להוכיח כי השגיאה שלו ניתנת לביטוי כפונקציה אפסית מסדר n.

נסמן את השגיאה ב-$R_n(f)(x)$, כלומר –

$$R_n(f)(x) = f(x) - p_n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

נרצה להראות כי $R_n(f)(x)$ היא פונקציה אפסית מסדר n - $\lim_{x \to 0} \frac{R_n(f)(x)}{x^n} = 0$.

לשם כך נוכיח את כלל לופיטל למציאת גבול.

- **כלל לופיטל**

- טענה א': יהיו $u(x), v(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבת 0, כך ש-$v(x) \neq 0$ בסביבה.

נניח כי $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$, $\lim_{x \to 0} v(x) = 0$, וכן נניח כי $u(x), v(x)$ גזירות בנקודה 0, כך שמתקיים $v'(0) \neq 0$.

אזי מתקיים - $\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(0)}{v'(0)}$.

<u>הוכחה</u>:

נתון כי $u(x),v(x)$ גזירות בסביבת 0, ולכן כפי שהוכחנו הן דיפרנציאביליות.

כלומר, מתקיים - $\begin{matrix} u(x)=u(0)+u'(0)x+\alpha(x) \\ v(x)=v(0)+v'(0)x+\beta(x) \end{matrix}$.

נציב בביטוי הגבול -

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{u(0)+u'(0)x+\alpha(x)}{v(0)+v'(0)x+\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{u'(0)x+\alpha(x)}{v'(0)x+\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{u'(0)+\frac{\alpha(x)}{x}}{v'(0)+\frac{\beta(x)}{x}}=\frac{u'(0)}{v'(0)}$$

- <u>טענה ב'</u>:

נוסיף להנחות טענה א' את ההנחה ש-$u(x),v(x)$ גזירות <u>בסביבת</u> 0.

אזי ממשפט הערך הממוצע של קושי נובע שלכל x בסביבת 0 קיים $c(x)\in(0,x)$ (נשים לב כי $c=c(x)$ והוא תלוי ב-x), כך שמתקיים השוויון $\frac{u'(c(x))}{v'(c(x))}=\frac{u(x)-u(0)}{v(x)-v(0)}$.

נזכור שנתון כי הפונקציות $u(x),v(x)$ גזירות ולכן הן גם רציפות. נשתמש בנתון $\lim_{x\to 0}u(x)=0$, $\lim_{x\to 0}v(x)=0$ ונסיק כי $u(0)=0$, $v(0)=0$.

נסיק כי $\frac{u'(c(x))}{v'(c(x))}=\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x)-u(0)}{v(x)-v(0)}$ ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{u'(c(x))}{v'(c(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)}$.

נשים לב שלפי בחירת c, כך ש-$c(x)\in(0,x)$, ניתן להסיק כי אם $x\to 0$ אז גם $c(x)\to 0$, ולכן השוויון האחרון מתקיים.

נניח כעת כי גם הגבול שהתקבל אינו מוגדר, כי $\lim_{x\to 0}u'(c(x))=0$ $\lim_{x\to 0}v'(c(x))=0$.

אם ידוע כי $u(x),v(x)$ גזירות פעם נוספת בסביבת 0, נוכל לקבוע שוב באותו אופן כי מתקיים - $\lim_{x\to 0}\frac{u''(c(x))}{v''(c(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{u'(c(x))}{v'(c(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)}$.

וכך באופן כללי אם $u(x),v(x)$ גזירות n פעמים בסביבת 0, נסיק שמתקיים –

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{u'(c(x))}{v'(c(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{u''(c(x))}{v''(c(x))}=\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{u^{(n)}(c(x))}{v^{(n)}(c(x))}$$

- **המשך ההוכחה של פולינום טיילור**

נחזור להוכחה שפולינום טיילור הוא פולינום הקירוב מסדר n.

כזכור ביצענו רדוקציה לטענה זו והראינו שמספיק להוכיח כי $\lim_{h\to 0}\frac{R_n(f)(h)}{h^n}=0$.

הגדרנו $R_n(f)(h)=f(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(h)^k$, ולכן הגבול שצריך להוכיח הוא

הגבול הבא - $\lim_{h\to 0}\frac{R_n(f)(h)}{h^n}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k}{h^n}$.

נרצה להשתמש בכלל לופיטל, ולכן יש לוודא שהפונקציות עומדות בתנאי הכלל.

ברור כי המכנה מתכנס ל-0 כאשר $h\to 0$. נותר לבדוק שגם המונה מתכנס ל-0 כאשר $h\to 0$.

נשים לב כי לפי ההגדרה של פולינום טיילור מתקיים:

$$f(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k=f(x_0+h)-\left[f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n\right]$$

ולכן כאשר $h\to 0$ מתקיים - $\lim_{h\to 0}R_n(h)=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]=0$.

אם כך הביטוי עומד בתנאי כלל לופיטל, ונפעיל את הכלל כדי לחשב את הגבול.

נבדוק את הנגזרת מסדר l כלשהו של המונה -

$$\left(f(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k\right)^{(l)}=f^{(l)}(x_0+h)-\sum_{k=l}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot k(k-1)(k-2)\ldots(k-l+1)h^{k-l}$$

נשים לב שאם $k<l$ האיבר בסיגמא מתאפס בגלל הביטוי $k(k-1)(k-2)\ldots(k-l+1)$.

נשים לב שעבור $k>l$ האיבר בסיגמא מתאפס, בגלל הביטוי $f^{(k)}(x_0)$.

לכן הביטוי היחיד שנשאר מהסיגמא הוא עבור $k=l$ -

$$R_n(f)(h)=f^{(l)}(x_0+h)-\sum_{k=l}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot k(k-1)(k-2)\ldots(k-l+1)h^{k-l}=$$

$$=f^{(l)}(x_0+h)-\frac{f^{(l)}(x_0)}{l!}\cdot l!=f^{(l)}(x_0+h)-f^{(l)}(x_0)$$

כעת נשתמש בכלל לופיטל עד הנגזרת ה-$n-1$, ונסיק –

$$\lim_{h\to0}\frac{R_n(f)(h)}{h^n}=\lim_{h\to0}\frac{\left(f(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k\right)^{(n-1)}}{\left(h^n\right)^{(n-1)}}=$$

$$.=\lim_{h\to0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k\right)^{(n-1)}}{n!h^{n-(n-1)}}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-\left(\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot(n-1)!+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot n!h\right)}{n!h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-\left(f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)h\right)}{n!h}$$

[נימוק: השוויון השני נובע מכך שלאחר $n-1$ גזירות, כל האיברים בסיגמא מתאפסים חוץ משניים.]

כעת נשתמש בעובדה שהפונקציה $f^{(n-1)}$ גזירה מסדר ראשון, כי ידוע שקיימת $f^{(n)}$, ולכן היא דיפרנציאבילית. כלומר - $f^{(n-1)}(x_0+h)=f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)h+\beta(h)$.

נציב בביטוי האחרון שקיבלנו, ונסיק –

$$\lim_{h\to0}\frac{R_n(f)(h)}{h^n}=\lim_{h\to0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)h}{n!h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)h+\beta(h)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)h}{n!h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\beta(h)}{n!h}=\frac{1}{n!}\lim_{h\to0}\frac{\beta(h)}{h}=\frac{1}{n!}\cdot0=0$$

כמבוקש

- **<u>הערכת השגיאה בצורת לגראנז'</u>**

תהי $f(x)$ מוגדרת וגזירה $n+1$ (!) פעמים בסביבת x_0.

אזי ניתן לאמוד את גודל השגיאה באופן הבא –

$$R_n(f)(x_0+h)=f(x_0+h)-p_n(f)(x_0,h)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+h^*)}{(n+1)!}h^{n+1}\quad,\quad h^*\in(0,h)$$

- <u>הוכחה</u>:

נשים לב כי מתקיים $R_n(f)(x_0)=0$ (ברור שבערך הפונקציה הידוע, השגיאה היא 0).

ולכן - $\frac{R_n(f)(x_0+h)-R_n(f)(x_0)}{h^{n+1}-0^{n+1}}=\frac{R_n(f)(x_0+h)}{h^{n+1}}$.

נשתמש במשפט הערך הממוצע של קושי ונסיק שקיים $c_1\in(0,x_0+h)$, כך ש-

$$\frac{R_n(f)(x_0+h)}{h^{n+1}}=\frac{R_n'(f)(x_0+c_1)}{(n+1)c_1^{\,n}}.$$

נשתמש שוב במשפט הערך הממוצע של קושי, ונקבל שקיים $c_2\in(0,x_0+c_1)$, כך ש-

$$\frac{R_n(f)(x_0+h)}{h^{n+1}}=\frac{R_n'(f)(x_0+c_1)}{(n+1)c_1^{\,n}}=\frac{R_n''(f)(x_0+c_2)}{n(n+1)c_2^{\,n-1}}$$

נחזור על התהליך $n+1$ פעמים, ונקבל כי –

$$\frac{R_n(f)(x_0+h)}{h^{n+1}}=\frac{R_n'(f)(x_0+c_1)}{(n+1)c_1^{\,n}}=\frac{R_n''(f)(x_0+c_2)}{n(n+1)c_2^{\,n-1}}=\ldots=$$
$$=\ldots=\frac{R_n^{(n+1)}(f)(x_0+c_n)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}$$

[נימוק: השוויון האחרון נובע מכך שפולינום טיילור הוא פולינום ממעלה n, ולכן הוא מתאפס לאחר $n+1$ גזירות.]

נכפיל בחזרה ב- h^{n+1}, ונקבל את הערכת השגיאה לפי לגראנז'.

- **<u>הערכת השגיאה בצורת קושי</u>**

תהי $f(x)$ מוגדרת וגזירה $n+1$ (!) פעמים בסביבת x_0.

אזי ניתן לאמוד את גודל השגיאה באופן הבא –

$$c\in(x,x_0)\ ,\ R_n(h)=f(x_0+h)-p_n(f)(x_0,h)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$$

- <u>הוכחה</u>:

נתבונן בפולינום טיילור כפונקציה של שני משתנים, שנסמן $s=x_0$, $t=x$.

כלומר - $p_n(s,t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k$.

נגדיר פונקציה חדשה - $\varphi(s)=R_n(t,s)=f(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k$, כאשר עבורה $t=x$ כלשהו, ומתייחסים אליו כאל קבוע.

ממשפט הערך הממוצע של לגראנז' נובע כי מתקיים –

$$\varphi'(c)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\Leftrightarrow\varphi'(c)=\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\text{, עבור } c\in(x,x_0)\Leftrightarrow c\in(t,s)$$

נחשב את הנגזרת של $\varphi(s)$ -

$$\varphi'(s)=\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k\right)'$$

[נימוק: $f(t)$ נעלם בגזירה כי אנו מתייחסים ל-t כאל קבוע.]

נחשב את הנגזרת איבר איבר –

עבור $k=0$ מתקיים $\varphi'(s)=f'(s)$

עבור $1\le k\le n$ נשתמש בכלל המכפלה ונקבל -

$$\left(\frac{f^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k\right)'=\frac{f^{(k+1)}(s)}{k!}(t-s)^k-\frac{f^{(k)}(s)}{k!}k(t-s)^{k-1}$$

נשים לב כי מתקבל טור שבכל אחד מההפרשים, איבר מצמצם את הבא אחריו, ולכן כל האיברים מצטמצמים למעט החלק הראשון של ההפרש האחרון.

לכן נקבל כי הנגזרת של $\varphi(s)$ היא – $\varphi'(s)=\frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n$.

נסיק כי בפרט עבור הנקודה $c\in(x,x_0)$, מתקיים כי $\varphi'(c)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$.

נשווה לתוצאה ממשפט לגראנז' ונקבל

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \Rightarrow \varphi(x)-\varphi(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_n(h)-\underbrace{R_n(x_0)}_{=0}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$$

כמבוקש