מושגי יסוד באנליזה (1)

.

מבוסס על הרצאות פרופ' תמר ציגלר
בקורס "מושגי יסוד באנליזה (1)" (80600)
האוניברסיטה העברית, סמסטר א' 2016-17
להערות: $nachi.avraham@gmail.com$

נחי

תודה למי ששלח הערות ותיקונים

תוכן עניינים

חלק I

מרחבים: מכפלה פנימית, נורמה, מטריקה

1 מרחבים כלליים

מבוא: נטפל באופן כללי ב**מרחב וקטורי** כלשהו מעל השדה $\mathbf{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbf{F}=\mathbb{C}$, עם מבנה המוגדר עליו. המבנה יכול להיות אלגברי, גאומטרי או טופולוגי כללי.

באופן כללי, ההיררכיה של המרחבים בהם נטפל היא כזאת: מרחבים וקטוריים טופולוגיים $\subset$ מרחבים וקטוריים מטריים (שלמים) $\subset$ מרחבים וקטוריים נורמיים (שלמים) $\subset$ מרחבים וקטוריים עם מכפלה פנימית (שלמים).

באופן כללי, ההיררכיה של המרחבים בהם נטפל היא כזאת: מרחבים וקטוריים עם מכפלה פנימית $\subset$ מרחבים וקטוריים נורמיים $\subset$ מרחבים וקטוריים מטריים $\subset$ מרחבים וקטוריים טופולוגיים. כל אחד מהמרחבים יכול להיות גם שלם (סגור להתכנסות של סדרות קושי).

הגדרה: זוג $(\mathbf{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ כאשר $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{F}$ וכן $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{F}$, נקרא **מרחב מכפלה פנימית**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. **סימטריות:** $\langle v,w\rangle=\overline{\langle w,v\rangle}$ לכל $v,w\in\mathbf{V}$.
2. **לינאריות:** $\langle v+u,w\rangle=\langle v,w\rangle+\langle u,w\rangle$ לכל $u,v,w\in\mathbf{V}$.
3. **הומוגניות:** $\langle av,w\rangle=a\langle v,w\rangle$ לכל $v,w\in\mathbf{V}$ ולכל $a\in\mathbf{F}$.
4. **חיוביות:** $\langle v,v\rangle\geq 0$, ומתקיים שוויון אם ורק אם $v=0$, לכל $v\in\mathbf{V}$.

הגדרה: זוג $(\mathbf{V},\|\cdot\|)$ כאשר $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{F}$ וכן $\|\cdot\|:\mathbf{V}\to\mathbb{R}^+$, נקרא **מרחב נורמי**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. **הומוגניות:** $\|av\|=|a|\,\|v\|$ לכל $v\in\mathbf{V}$ ולכל $a\in\mathbf{F}$.
2. **אי שוויון המשולש:** $\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$ לכל $v,w\in\mathbf{V}$.

טענה: (**אי שוויון קושי שוורץ**) במרחב מכפלה פנימית, לכל $v,w\in\mathbf{V}$,

$$|\langle v,w\rangle|\leq\|v\|\,\|w\|$$

כאשר $\|x\|:=\langle x,x\rangle^{1/2}$.

טענה: כל מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב נורמי, כאשר הנורמה מושרית מהמכפלה הפנימית על ידי $\|v\|=\langle v,v\rangle^{1/2}$.

הוכחה: יש להראות כי הפונקציה שהוגדרה היא נורמה. ההומוגניות נובעת מהומוגניות המכפלה הפנימית. נותר להראות את אי שוויון המשולש. נחשב:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w,v+w\rangle=\|v\|^2+\|w\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle v,w\rangle\\ &\leq \|v\|^2+\|w\|^2+2\,|\langle v,w\rangle|\\ &\leq \|v\|^2+\|w\|^2+2\,\|v\|\,\|w\|=(\|v\|+\|w\|)^2\end{aligned}$$

כאשר אי השוויון השני הוא מאי שוויון קושי שוורץ. ■

טענה: (**שוויון המקבילית**) במרחב נורמי המושרה ממרחב מכפלה פנימית מתקיים,

$$2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)=\|v-w\|^2+\|v+w\|^2$$

הוכחה: מתקיים,

$$\|v\pm w\|^2=\|v\|^2\pm 2\mathrm{Re}\left\langle v,w\right\rangle+\|w\|^2$$

והטענה נובעת מיד. ■

הערה: ניתן להראות בכיוון השני, כי אם מרחב נורמי מקיים את שוויון המקבילית אז הוא מושרה ממרחב מכפלה פנימית. לשם כך יש לשים לב שבמרחבי מכפלה פנימית יש את הזהות,

$$\left\langle v,w\right\rangle=\frac{1}{4}\left(\|v+u\|^2-\|v-u\|^2+i\|v+iu\|^2-i\|v-iu\|^2\right)$$

(אם השדה הוא $\mathbb{R}$, אז המכפלה הפנימית היא החלק הממשי של הביטוי).

הגדרה: במרחב מכפלה פנימית ניתן להגדיר את **הזווית** בין שני איברים $v,w\in\mathbf{V}$,

$$\cos\left(v,w\right)=\frac{\mathrm{Re}\left\langle v,w\right\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$$

טענה: (**משפט הקוסינוסים**) במרחב מכפלה פנימית $\mathbf{V}$, לכל $v,w\in\mathbf{V}$,

$$\|v-w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2-2\|v\|\,\|w\|\cos\left(v,w\right)$$

דוגמה: עבור מרחב מידה $\left(X,\mathcal{B},\mu\right)$, עבור $p\geq 0$, נגדיר את $L^p\left(X,\mathcal{B},\mu\right)$ להיות אוסף הפונקציות המדידות $f:X\to\mathbf{F}$, כך שמתקיים $\int_X|f|^p\,d\mu<\infty$.

זהו מרחב נורמי, על ידי הנורמה המוגדרת,

$$\|f\|_p=\left(\int\limits_X|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

ניתן להראות כי עבור כל $p\neq 2$ שוויון המקבילית אינו מתקיים. עם זאת מתקיימים שני אי שוויונים אחרים, המכונים **אי שוויוני האנר**:

1. לכל $1\leq p\leq 2$,

$$\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p\geq\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^p+\left|\|f\|_p-\|g\|_p\right|^p \tag{1}$$

ונובע מכך גם,

$$2^p\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right)\geq\left(\|f+g\|_p+\|f-g\|_p\right)^p+\left|\|f+g\|_p-\|f-g\|_p\right|^p \tag{2}$$

2. עבור $p=2$ מתקבל שוויון בביטוי שבסעיף הקודם (שוויון המקבילית).
3. עבור $p>2$, אי השוויון מתהפך (ונשאר אי שוויון חלש).

הגדרה: זוג $(\mathbf{V},d)$ כאשר $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{F}$ וכן $d:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}^{+}$, נקרא **מרחב מטרי**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. **חיוביות:** $d(v,w)\geq 0$, ומתקיים שוויון אם ורק אם $v=w$, לכל $v\in\mathbf{V}$.
2. **סימטריות:** $d(v,w)=d(w,v)$ לכל $v,w\in\mathbf{V}$.
3. **אי שוויון המשולש:** $d(v,w)\leq d(v,u)+d(u,w)$ לכל $u,v,w\in\mathbf{V}$.

טענה: כל מרחב מרחב נורמי הוא מרחב מטרי, כאשר המטריקה מושרית מהנורמה על ידי $d(v,w)=\|v-w\|$.

2 שלמות

הגדרה: מרחב מטרי (X,d) נקרא **שלם**, אם לכל סדרת קושי בו קיים גבול.

טענה: לכל מרחב מטרי (X,d) קיים **מרחב השלמה**, כלומר מרחב מטרי שלם $\left(\tilde{X},\tilde{d}\right)$ יחד עם שיכון איזומטרי $\iota:X\to\tilde{X}$, כך שמתקיים כי $\iota(X)$ קבוצה צפופה ב-$\tilde{X}$. יתרה מזו, מרחב ההשלמה יחיד עד כדי איזומורפיזם של מרחבים מטריים.

הוכחה: מגדירים את $\tilde{X}$ להיות אוסף כל סדרות קושי שב-X, מודולו יחס השקילות המוגדר $(x_n)\sim(y_n)$ אם ורק אם $d(x_n,y_n)\to 0$ כאשר $n\to\infty$. המטריקה $\tilde{d}$ מוגדרת על ידי $\tilde{d}([(x_n)],[(y_n)])=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$. ■

טענה: (**התכונה האוניברסלית של ההשלמה**) יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $\left(\tilde{X},\tilde{d}\right)$ מרחב ההשלמה שלו ביחס לאיזומטריה $\iota:X\to\tilde{X}$.

אז לכל מרחב מטרי שלם Z, לכל העתקה רציפה $f:X\to Z$ קיימת העתקה רציפה $\tilde{f}:\tilde{X}\to Z$, כך שהדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & Z \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "\exists!\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

טרמינולוגיה: מרחב מכפלה פנימית שלם מכונה **מרחב הילברט**; מרחב נורמי שלם מכונה **מרחב בנך** (כאשר מרחב מכפלה פנימית ומרחב נורמי הם שלמים ביחס למטריקה המושרית מהם).

משפט: (**משפט ההשלמה**) לכל מרחב מכפלה פנימית $(\mathbf{V},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{V}})$ קיים מרחב הילברט $(\mathbf{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{H}})$ יחד עם אופרטור לינארי $T:\mathbf{V}\to\mathbf{H}$, כך שמתקיים:

1. $T(\mathbf{V})$ קבוצה צפופה ב-$\mathbf{H}$ (ביחס למטריקה המושרית).
2. $\langle v,w\rangle=\langle Tv,Tw\rangle$ לכל $v,w\in\mathbf{V}$.

כמו כן המרחב $\left(\mathbf{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{H}}\right)$ הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם של מרחבי הילברט. כלומר, אם $\left(\mathbf{H}',\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{H}'}\right)$ מרחב הילברט אחר שמקיים את שתי התכונות הללו, אז יש איזומורפיזם של מרחבי הילברט $S:\mathbf{H}\to\mathbf{H}'$, כך שהדיאגרמה הבאה מתחלפת,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "T"'] & \mathbf{H}' \\ \mathbf{H} \arrow[ur, dashed, "\exists S"'] & \end{tikzcd}$$

הוכחה: הפעולות של חיבור, כפל בסקלר ונורמה (המושרית מהמכפלה הפנימית) הן כולן רציפות במידה שווה. לכן אם נתבונן ב-$\mathbf{V}$ כמרחב מטרי עם המטריקה המושרית מהמכפלה הפנימית, פעולות אלה מתרחבות להשלמה של $\mathbf{V}$ כמרחב מטרי.

באופן אחר, ניתן היה פשוט לבנות את ההשלמה של $\mathbf{V}$ כמרחב מטרי, ולהגדיר מכפלה פנימית על ידי $\langle[(v_n)],[(w_n)]\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle v_n,w_n\rangle$, וגבול זה קיים מרציפות במידה שווה של הנורמה המושרית. ■

הערה: המשפט תקף באופן דומה עבור מרחב נורמי $(\mathbf{V},\|\cdot\|)$, עם הוכחה דומה.

דוגמאות:

1. $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ הם מרחבי הילברט.
2. נתבונן בקבוצה $l_2^{\text{finite}}(\mathbb{N})=\{(a_n)\subset\mathbf{F}\mid\exists_N\,\forall_{n\geq N}\,a_n=0\}$, ונגדיר מכפלה פנימית $\langle(a_n),(b_n)\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\overline{b_i}$. זה אינו מרחב הילברט. ההשלמה של מרחב זה היא $l_2(\mathbb{N})=\left\{(a_n)\subset\mathbf{F}\mid\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty\right\}$ עם המטריקה המתקבלת. נשים לב כי זה אכן מרחב שלם, שכן מתקיים על ידי אי שוויון קושי שוורץ,
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overline{b_n}\right|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)^{1/2}$$
3. נתבונן בקבוצה $C([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbf{F}\mid f\text{ is continuous}\}$, ונגדיר מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{[0,1]}f\overline{g}dx$. זה אינו מרחב הילברט. ההשלמה של מרחב זה היא $L^2([0,1])=\left\{f:[0,1]\to\mathbf{F}\mid\int_{[0,1]}f^2dx<\infty\right\}$.
4. באופן כללי יותר, עבור מרחב מידה $(X,\mathcal{B},\mu)$, הקבוצה $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_X f\overline{g}d\mu$ היא מרחב הילברט.

תכונות:

1. תת מרחב סגור של מרחב הילברט הוא מרחב הילברט.
2. סכום ישר של מרחבי הילברט הוא מרחב הילברט, כאשר סכום ישר של זוג מרחבי מכפלה פנימית $(\mathbf{H}_1,\langle\cdot,\cdot\rangle_1),(\mathbf{H}_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ מסומן $\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{H}_2$, והוא הקבוצה $\mathbf{H}_1\times\mathbf{H}_2$ עם המכפלה הפנימית $\langle(h_1,h_2),(h_1',h_2')\rangle=\langle h_1,h_1'\rangle_1+\langle h_2,h_2'\rangle_2$.

3 קמירות והטלה ניצבת

הגדרה: אם $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי, תת קבוצה שלו $C\subset\mathbf{V}$ נקראת **קמורה**, אם לכל $x,y\in C$, מתקיים $tx+(1-t)y\in C$ לכל $0\leq t\leq1$. כך למשל כל תת מרחב וקטורי הוא קבוצה קמורה.

טענה: אם $C\subset\mathbf{V}$ קבוצה קמורה, אז גם $\overline{C}$ (הסגור), C^o (הפנים) הן קבוצות קמורות.

הוכחה: נראה כי $\overline{C}$ קמורה. יהיו $x,y\in\overline{C}$. יהי $\epsilon>0$. נקבע $x',y'\in C$ המקיימות $\|x-x'\|,\|y-y'\|<\epsilon$. מקמירות C נובע שלכל $0\le t\le 1$ מתקיים $tx'+(1-t)y'\in C$, ולכן נובע כי,

$$\begin{aligned}\|tx+(1-t)y-(tx'+(1-t)y')\| &= \|t(x-x')+(1-t)(y-y')\|\\ &\le t\|x-x'\|+(1-t)\|y-y'\|<\epsilon\end{aligned}$$

כלומר גם $tx+(1-t)y$ היא נקודת גבול של C, כלומר היא ב-$\overline{C}$.

נראה כי C^o קמורה. יהיו $x,y\in C^o$. נניח כי $B_x,B_y\subset C^o$ כדורים פתוחים המכילים את x,y בהתאמה. אזי $tB_x+(1-t)B_y\subset C^o$ היא סביבה פתוחה של $tx+(1-t)y$ לכל $0\le t\le 1$. ■

טענה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, $C\subset\mathbf{H}$ קבוצה קמורה וסגורה ולא ריקה, אז לכל $x\in\mathbf{H}$ קיימת ויחידה נקודה $y\in C$, כך שמתקיים,

$$d(x,y)=\inf_{z\in C}\{d(x,z)\}$$

כמו כן, לכל $z\in C$ מתקיים,

$$\operatorname{Re}\langle z-y,x-y\rangle\le 0$$

הוכחה:

- נראה את היחידות: נניח כי $y,y'\in C$ מקיימות $d:=d(x,y)=d(x,y')=\inf_{z\in C}\{d(x,z)\}$. תהי $z=\frac{1}{2}(y+y')\in C$ (מקמירות C), אז משוויון המקבילית נובע,

$$\|y-y'\|^2=2\|x-y\|^2+2\|x-y'\|^2-\|(x-y)+(x-y')\|^2=4d-4\|x-z\|^2$$

ובהעברת אגפים,

$$\|x-z\|^2=d-\frac{1}{4}\|y-y'\|^2$$

אם בשלילה היה $y\neq y'$, היינו מוצאים כי $d(x,z)<d(x,y)$,וזו סתירה. לכן $y=y'$.

- נראה את אי השוויון בזווית: נניח כי $y\in C$ מקיים $d(x,y)=\inf_{z\in C}\{d(x,z)\}$. לכל $z\in C$ נסמן $z_t:=tz+(1-t)y\in C$ לכל $0\le t\le 1$, ונקבל כי,

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2-\|x-z_t\|^2 &= \|x-y\|^2-\|(x-y)+(y-z_t)\|^2\\ &= \|x-y\|^2-\left[\|x-y\|^2+\|y-z_t\|^2-2\operatorname{Re}\langle x-y,y-z_t\rangle\right]\\ &= -\|y-z_t\|^2+2\operatorname{Re}\langle x-y,y-z_t\rangle\\ &= 2t\operatorname{Re}\langle x-y,z-y\rangle-t^2\|y-z\|^2\end{aligned}$$

נשים לב כי מההנחה נובע $\|x-y\|^2\le\|x-z_t\|^2$, ולכן אם נחלק את הביטוי הקודם ב-t נקבל,

$$0\ge 2\operatorname{Re}\langle x-y,z-y\rangle-t\|y-z\|^2$$

לכל $0<t<1$. נחלק ב-2 ונשאיף $t\downarrow 0$, ונקבל את השוויון המבוקש.

- נראה את הקיום: נסמן $d=\inf_{z\in C}\{d(x,z)\}$. נקבע $(z_n)\subset C$ סדרה המקיימת $d(x,z_n)\to d$ כאשר $n\to\infty$, ונראה כי זו סדרת קושי:

$$\begin{aligned}\|z_n-z_m\|^2 &= \|(z_n-x)-(z_m-x)\|^2\\ &= 2\|z_n-x\|^2+2\|z_m-x\|-4\left\|\frac{1}{2}(z_n+z_m)-x\right\|^2\\ &\le 2\|z_n-x\|^2+2\|z_m-x\|^2-4d^2\to 0\,,\ \ n,m\to\infty\end{aligned}$$

כאשר השוויון בשורה השנייה נובע משוויון המקבילית. לכן נובע כי (z_n) סדרת קושי, ומשלמות המרחב וסגירות C יש לה גבול $y\in C$, שבהכרח מקיים $d(x,y)=\inf_{z\in C}\{d(x,z)\}$. ■

הגדרה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, $C\subset\mathbf{H}$ קבוצה קמורה וסגורה ולא ריקה, נגדיר את **ההטלה הניצבת** $P_C:\mathbf{H}\to C$ להתאים לכל $x\in\mathbf{H}$ את $P_Cx\in C$ היחידה המקיימת $d(x,P_Cx)=\inf_{z\in C}\{d(x,z)\}$.

טענה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, $C\subset\mathbf{H}$ קבוצה קמורה וסגורה ולא ריקה, אז:

1. $P_C\circ P_C=P_C$
2. $\|P_Cx-P_Cy\|^2\le\operatorname{Re}\langle P_Cx-P_Cy,x-y\rangle$ לכל $x,y\in\mathbf{H}$.
3. $\|P_Cx-P_Cy\|\le\|x-y\|$ לכל $x,y\in\mathbf{H}$.

הוכחה:

1. נשים לב כי $P_Cx\in C$ לכל $x\in\mathbf{H}$, ולכן $\inf_{z\in C}\{d(P_Cx,z)\}$ מתקבל על ידי $z=P_Cx$ עצמה, כלומר $P_CP_Cx=P_Cx$.
2. נשים לב כי מהטענה הקודמת, לכל $z\in C$ מתקיים $\operatorname{Re}\langle z-P_Cx,x-P_Cx\rangle\le 0$ באופן כללי. בפרט עבור $P_Cy\in C$,

$$\operatorname{Re}\langle x-P_Cx,P_Cy-P_Cx\rangle\le 0$$

ובאופן סימטרי עבור $P_Cx\in C$,

$$\operatorname{Re}\langle P_Cy-y,P_Cy-P_Cx\rangle\le 0$$

נחבר את שני הביטויים ונקבל,

$$0\ge\operatorname{Re}\langle(x-y)-(P_Cx-P_Cy),P_Cx-P_Cy\rangle=\operatorname{Re}\langle P_Cx-P_Cy,x-y\rangle-\|P_Cx-P_Cy\|^2$$

3. נשים לב כי,

$$\begin{aligned}\|P_Cx-P_Cy\|^2 &\le |\operatorname{Re}\langle P_Cx-P_Cy,x-y\rangle|\\ &\le \|P_Cx-P_Cy\|\,\|x-y\|\end{aligned}$$

כאשר אי השוויון הראשון הוא מהסעיף הקודם, ואי השוויון השני הוא מאי שוויון קושי שורץ. ■

הגדרה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, $S\subset\mathbf{H}$ תת קבוצה כלשהי, נגדיר $S^\perp=\{x\in\mathbf{H}\mid\forall_{s\in S},\ \langle x,s\rangle=0\}$. זה תת מרחב סגור.

טענה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, $\mathbf{V}$ תת מרחב סגור, אזי לכל $x \in \mathbf{H}$ קיים פירוק יחיד $x = v + u$, כאשר $v = P_{\mathbf{V}}x \in \mathbf{V},\ u = x - P_{\mathbf{V}}x \in \mathbf{V}^{\perp}$. בפרט עבור פירוק זה מתקיים $\|x\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$.

הוכחה:

- נראה את היחידות: נשים לב כי $\mathbf{V} \cap \mathbf{V}^{\perp} = \{0\}$, ולכן אם $x = v + u = v' + u'$ עבור $v, v' \in \mathbf{V},\ u, u' \in \mathbf{V}^{\perp}$, כלומר $v - v' = u - u'$, בהכרח $v - v' \in \mathbf{V} \cap \mathbf{V}^{\perp}$ ולכן $v = v'$, ובאותו אופן גם $u = u'$.
- נראה את הקיום: נכתוב $x = P_{\mathbf{V}}x + (x - P_{\mathbf{V}}x)$, ונראה כי $x - P_{\mathbf{V}}x \in \mathbf{V}^{+}$. כלומר יש להראות כי $\langle x - P_{\mathbf{V}}x, w\rangle = 0$ לכל $w \in \mathbf{V}$.

  נשים לב כי $\operatorname{Re}\langle x - P_{\mathbf{V}}x, w - P_{\mathbf{V}}x\rangle \le 0$ לכל $w \in \mathbf{V}$. אבל כל $w \in \mathbf{V}$ ניתן להציג על ידי $w = w' - P_{\mathbf{V}}x \in \mathbf{V}$ לאיזה $w' \in \mathbf{V}$, ולכן למעשה $\operatorname{Re}\langle x - P_{\mathbf{V}}x, w\rangle \le 0$ לכל $w \in \mathbf{V}$. בפרט גם $\operatorname{Re}\langle x - P_{\mathbf{V}}x, -w\rangle \le 0$ (עבור $-w \in \mathbf{V}$), ולכן בהכרח $\operatorname{Re}\langle x - P_{\mathbf{V}}x, w\rangle = 0$ לכל $w \in \mathbf{V}$.

  באופן דומה ניתן להראות כי גם עבור $\pm iw$ מתקיים כי $\operatorname{Im}\langle x - P_{\mathbf{V}}x, w\rangle = 0$, ולכן בסך הכל $\langle x - P_{\mathbf{V}}x, w\rangle = 0$ לכל $w \in \mathbf{V}$. $\blacksquare$

מסקנה: $P_{\mathbf{V}}$ העתקה מכווצת. כלומר $\|P_{\mathbf{V}}v\| \le \|v\|$ לכל $v \in \mathbf{V}$.

טענה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, $\mathbf{V}$ תת מרחב סגור, אזי $P_C : \mathbf{H} \to \mathbf{V}$ אופרטור לינארי.

הוכחה: יהיו $x, y \in \mathbf{H}$, עם הפירוקים $x = v_1 + u_1,\ y = v_2 + u_2$, עבור $v_1, v_2 \in \mathbf{V},\ u_1, u_2 \in \mathbf{V}^{\perp}$. נשים לב כי מתקיים $x + y = (v_1 + v_2) + (u_1 + u_2)$, ומיחידות הפירוק נובע $P_{\mathbf{V}}x + P_{\mathbf{V}}y = v_1 + v_2 = P_{\mathbf{V}}(x + y)$, כנדרש. $\blacksquare$

טענה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, $P : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ אופרטור לינארי מכווץ המקיים $P \circ P = P$, אזי קיים תת מרחב סגור $\mathbf{V}$, כך ש-$P = P_{\mathbf{V}}$.

הוכחה: נתבונן בתתי המרחבים $\mathbf{V} = \{x \in \mathbf{H} \mid Px = x\},\ \mathbf{W} = \{x \in \mathbf{H} \mid Px = 0\}$. נתון כי P מכווץ ולכן רציף, כלומר $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ תתי מרחבים סגורים.

יהי $x \in \mathbf{H}$. נכתוב $x = Px + (\mathrm{Id} - P)x$. מהנתון $P \circ Px = Px$ נובע כי $Px \in \mathbf{V}$. כמו כן מתקיים $P(\mathrm{Id} - P)x = Px - P \circ Px = 0$, ולכן נובע כי $(\mathrm{Id} - P)x \in \mathbf{W}$.

כעת נראה כי $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{\perp}$ ומיחידות הפירוק בכך נסיים. כדי להראות זאת נשאיר כתרגיל להוכיח כי באופן כללי מתקיים $\left(\mathbf{V}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\mathbf{V}}$, ונראה כי $\mathbf{W}^{\perp} = \mathbf{V}$.

מצד אחד, אם $x \in \mathbf{W}^{\perp}$, מתקיים כי,

$$\|x\|^2 \ge \|Px\|^2 = \|x + (Px - x)\|^2 = \|x\|^2 + \|Px - x\|^2$$

כאשר השוויון האחרון הוא כי $x \in \mathbf{W}^{\perp},\ Px - x \in \mathbf{W}$. בהעברת אגפים נקבל כי $\|Px - x\| = 0$, כלומר $Px = x$ ולכן $x \in \mathbf{V}$.

מצד שני, אם $x \in \mathbf{V}$ נכתוב $x = v + u$ פירוק יחיד עבור $v \in \mathbf{W},\ u \in \mathbf{W}^{\perp} \subset \mathbf{V}$. אם כך בהכרח $v = x - u \in \mathbf{V}$, אבל $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{0\}$ ולכן $v = 0$. כלומר $x = u \in \mathbf{W}^{\perp}$. $\blacksquare$

חלק II
העתקות של מרחבים

4 אופרטורים לינאריים

הגדרה: יהיו $(\mathbf{V},\|\cdot\|_1),(\mathbf{W},\|\cdot\|_2)$ מרחבים נורמיים, ויהי $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ אופרטור לינארי. אומרים כי T **אופרטור חסום**, אם יש $c>0$ שעבורו $\|Tv\|_2\le c\|v\|_1$ לכל $v\in\mathbf{V}$.

במקרה זה נגדיר את ה**נורמה האופרטורית** של T,

$$\|T\|_{\text{op}}=\sup_{v\in\mathbf{V},\,\|v\|_1=1}\|Tv\|_2=\sup_{0\ne v\in\mathbf{V}}\frac{\|Tv\|_2}{\|v\|_1}$$

למה: לאופרטור לינארי בין מרחבים נורמיים $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ מתקיים: T חסום $\Longleftrightarrow$ T רציף $\Longleftrightarrow$ T רציף בנקודה אחת ב-$\mathbf{V}$.

הוכחה:

- אם T חסום, כלומר $\|T\|_{\text{op}}<\infty$, אז לכל $v,v'\in\mathbf{V}$ מתקיים,

$$\|Tv-Tv'\|_2=\|T(v-v')\|_2\le\|T\|_{\text{op}}\cdot\|v-v'\|_1$$

ולכן T רציף.

- אם T רציף, בפרט רציף ב-$v=0$, אז עבור $\epsilon=1$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $v\in B_\delta(0)$ מתקיים $\|Tv\|=\|Tv-T0\|_2\le1$.
כעת לכל $0\ne v\in\mathbf{V}$ מתקיים $1\ge\left\|T\left(\frac{\delta}{2}\frac{v}{\|v\|}\right)\right\|=\frac{\delta}{2\|v\|}\|Tv\|$ ולכן $\|Tv\|\le{}^2\!/\!_\delta\|v\|$. מכאן כי $\|T\|_{\text{op}}\le{}^2\!/\!_\delta$, כלומר T חסום.
- אם T רציף בנקודה $v_0\in\mathbf{V}$, באותו אופן שהראינו כי רציפות ב-0 גוררת חסימות ניתן גם להראות כי רציפות בכל v_0 גוררת חסימות, ולכן T רציף. ■

הערה: ניתן להראות כי אם $\mathbf{V}$ מרחב בנך, $\mathbf{U}\subset\mathbf{V}$ תת מרחב צפוף, אז כל אופרטור לינארי חסום $T:\mathbf{U}\to\mathbf{U}$ ניתן להרחבה יחידה לאופרטור לינארי חסום $\widetilde{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$.

4.1 תוצאה: תוחלת מותנית

משפט: יהי $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה, ותהי $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ תת סיגמא אלגברה.
אז קיימת העתקה $\mathbf{E}[\cdot\mid\mathcal{B}]:L^1(\mathcal{A})\to L^1(\mathcal{B})$, כך שמתקיימים הדברים הבאים:

1. לכל $B\in\mathcal{B}$ ולכל $f\in L^1(\mathcal{A})$,

$$\int\limits_B\mathbf{E}[f\mid\mathcal{B}]\,d\mu=\int\limits_B f\,d\mu$$

2. לכל $1\le p<\infty$ ולכל $f\in L^p(\mathcal{A})$,

$$\|\mathbf{E}[f\mid\mathcal{B}]\|_p\le\|f\|_p$$

3. לכל $f \in L^1(\mathcal{A})$, אם $f \geq 0$ אז גם $\mathbf{E}[f \mid \mathcal{B}] \geq 0$ (נקודתית).

הוכחה: נתבונן במרחב הילברט $\mathbf{H} = L^2(\mathcal{A})$. נתבונן בתת המרחב הסגור $\mathbf{M} = L^2(\mathcal{B})$. תהי $P : \mathbf{H} \to \mathbf{M}$ ההטלה הניצבת.

- לכל $f \in L^2(\mathcal{A})$ מתקיים כי Pf מדידה ביחס ל-$\mathcal{B}$. כמו כן, לכל $B \in \mathcal{B}$ ולכל $f \in L^2(\mathcal{A})$,

$$\int_B Pf = \int Pf1_B = \langle Pf, 1_B \rangle = \langle f, P1_B \rangle = \langle f, 1_B \rangle = \int f1_B = \int_B f$$

כאשר השוויון השלישי הוא מתכונות כלליות של ההטלה הניצבת.[1]

- ידוע מתכונות ההטלה הניצבת כי $\|Pf\|_2 \leq \|f\|_2$ לכל $f \in L^2(\mathcal{A})$. אבל גם עבור $\|\cdot\|_1$ מתקיים,

$$\|Pf\|_1 = \int |Pf| = \int Pf\overline{g}_0 = \int fP\overline{g}_0 = \int f\overline{g}_0 \leq \sup_{g \in L^\infty(\mathcal{A}),\, \|g\|_\infty \leq 1} \int f\overline{g} = \|f\|_1$$

עבור $g_0 = \operatorname{sign}(f) \in L^1(\mathcal{B})$, כאשר השוויון האחרון נובע מהעובדה הכללית שלכל $1/p + 1/q = 1$ מתקיים $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p} = \sup_{g \in L^q,\, \|g\|_q = 1} \left\{\int f\overline{g}\right\}$.

אם כך נובע כי P אופרטור חסום ולכן רציף במידה שווה, ולכן $P : L^2(\mathcal{A}) \to L^2(\mathcal{B})$ ניתנת לצמצום לתת המרחב $L^1(\mathcal{A}) \cap L^2(\mathcal{A})$, שהוא צפוף בתוך $L^1(\mathcal{A})$.[2]

כעת, ניתן להרחיב את P באופן יחיד להעתקה $E = E[\cdot \mid \mathcal{B}] : L^1(\mathcal{A}) \to L^1(\mathcal{B})$. נראה כי זו ההעתקה המבוקשת במשפט.

- נשים לב כי מההערה הקודמת נובע כי אכן האופרטור המורחב E מקיים $\|Ef\|_1 \leq \|f\|_1$. כלומר הוא רציף במידה שווה, ולכן התכונה $\int_B Pf = \int_B f$ משתמרת תחת לקיחת גבול ב-L^1 עבור האופרטור E.

כמו כן ניתן להראות כי עבור כל $E' : L^1(\mathcal{A}) \to L^1(\mathcal{B})$ אופרטור כלשהו המקיים את התנאים עבור $L^2(\mathcal{A})$, בהכרח $E' = E$.

- נראה כי אם $f \geq 0$ אז $Ef \geq 0$. לשם כך נגדיר $B = \{x \mid Ef(x) < 0\} \in \mathcal{B}$.[3] נשים לב כי $B \in \mathcal{B}$, ולכן $\int_B Ef = \int_B f \geq 0$. אם בשלילה היה $\mu(B) > 0$ אז היה $\int_B Ef < 0$ והיינו מקבלים סתירה, ולכן בהכרח $\mu(B) = 0$, כנדרש. ■

5 פונקציונלים לינאריים

טרמינולוגיה: יהי $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbf{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. אופרטור לינארי $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{F}$ מכונה **פונקציונל לינארי**.

הגדרה: למרחב הילברט $\mathbf{H}$ מעל $\mathbf{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, נגדיר את **המרחב הצמוד** $\mathbf{H}^*$ להיות אוסף כל הפונקציונלים הלינאריים הרציפים מהצורה $\mathbf{H} \to \mathbf{F}$. זה בבירור מרחב וקטורי מעל $\mathbf{F}$.

משפט: (משפט ההצגה של ריס למרחבי הילברט) קיים איזומורפיזם קנוני של מרחבי הילברט $\mathbf{H} \to \mathbf{H}^*$, המתקבל על ידי ההעתקה $\mathbf{H} \ni v \mapsto \varphi_v \in \mathbf{H}^*$, כאשר $\varphi_v(x) = \langle v, x \rangle$.

הוכחה: תחילה נשים לב כי φ_v רציף לכל $v \in \mathbf{H}$, כלומר אכן $\varphi_v \in \mathbf{H}^*$, כי מאי שוויון קושי שוורץ $|\varphi_v(x)| \leq \|v\| \|x\|$. כמו כן קל לראות כי $v \mapsto \varphi_v$ אופרטור לינארי.

העובדה שהעתקה זו חח"ע נובעת כי עבור $v, v' \in \mathbf{H}$ המקיימים $\varphi_v = \varphi_{v'}$, כלומר מלינאריות $\langle v - v', x \rangle = 0$ לכל $x \in \mathbf{H}$, אזי בפרט עבור $x = v - v'$ נקבל כי $\|v - v'\| = 0$ ולכן $v = v'$.

---

[1] מתקיים $\langle Px, y \rangle = \langle Px, Py \rangle$ לכל P הטלה ניצבת, שכן $\langle Px, y \rangle = \langle Px, Py + y - Py \rangle = \langle Px, Py \rangle$, ובאופן סימטרי גם $\langle x, Py \rangle = \langle Px, Py \rangle$.

[2] עובדה כללית: $L^p \cap L^q$ מרחב צפוף בתוך L^p ובתוך L^q, לכל $p, q \geq 1$.

[3] אם f מרוכבת, נפעיל את הטיעון להלן על החלק הממשי והחלק המדומה שלה.

נראה כי העתקה זו על. יהי $\varphi \in \mathbf{H}^*$. אם $\varphi \equiv 0$ אז $\varphi = \varphi_0 = 0 \mapsto 0$. נניח כי $\varphi \not\equiv 0$. נסמן $\mathbf{V} = \ker\varphi \subset \mathbf{H}$, ונבחין כי זה תת מרחב סגור, כי $\mathbf{V} = \varphi^{-1}(\{0\})$ ו-φ רציף.

נשתמש במשפט הפירוק ונכתוב $\mathbf{H} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^\perp$, ומההנחה כי $\varphi \not\equiv 0$ נובע שקיים $0 \neq w \in \mathbf{V}^\perp$ שעבורו $\varphi(w) \neq 0$. נשים לב כי לכל $x \in \mathbf{H}$ מלינאריות נובע $\varphi\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(w)}w - x\right) = 0$, כלומר $\frac{\varphi(x)}{\varphi(w)}w - x \in \mathbf{V}$. לכן,

$$0 = \left\langle \frac{\varphi(x)}{\varphi(w)}w - x, w \right\rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(w)}\langle w, w\rangle - \langle x, w\rangle$$

כלומר $\frac{\varphi(x)}{\varphi(w)}\|w\|^2 = \langle x, w\rangle$. בהעברת אגפים נקבל $\varphi(x) = \frac{\varphi(w)}{\|w\|^2}\langle w, x\rangle = \left\langle \frac{\varphi(w)}{\|w\|^2}w, x\right\rangle$, כלומר $\varphi = \varphi_{\frac{\varphi(w)}{\|w\|^2}w} \mapsto \frac{\varphi(w)}{\|w\|^2}w$, כנדרש. ■

5.1 תוצאה: משפט רדון־ניקודים

משפט: יהי $(\Omega, \mathcal{A})$ מרחב מדיד, ויהיו μ, ν זוג מידות סופיות על מרחב זה, כך שמתקיימת רציפות בהחלט $\nu \ll \mu$ (כלומר אם $\mu(A) = 0$ אז $\nu(A) = 0$ לכל $A \in \mathcal{A}$).

אז קיימת "**נגזרת**" של ν לפי μ, כלומר פונקציה $f \in L^1(\mu)$ (המסומנת $\frac{d\nu}{d\mu}$), כך שמתקיים $\nu(A) = \int_A f d\mu$ לכל $A \in \mathcal{A}$.

הוכחה: נגדיר מידה חדשה $\sigma = \mu + \nu$. זו מידה סופית על $(\Omega, \mathcal{A})$. נתבונן במרחב $L^2(\sigma)$ ובהעתקה $\varphi : L^2(\sigma) \to \mathbf{F}$ המוגדרת $\varphi : g \mapsto \int g d\nu$. נשים לב כי φ פונקציונל לינארי רציף,

$$\begin{aligned} |\varphi g| &= \left|\int g d\nu\right| \leq \int |g|\, d\nu \leq \int |g|\, d\sigma \\ &\leq \left(\int |g|^2 d\sigma\right)^{1/2} \cdot \sigma(\Omega)^{1/2} = \|g\|_{L^2(\sigma)} \cdot \sigma(\Omega)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

כאשר אי השוויון בראשית השורה השנייה הוא אי שוויון קושי שוורץ.

אם כך, ממשפט ההצגה של ריס קיימת פונקציה $\psi \in L^2(\sigma)$ שעבורה מתקיים $\varphi(g) = \langle g, \psi\rangle = \int g\psi d\sigma$ לכל $g \in L^2(\sigma)$. כלומר,

$$\int g d\nu = \varphi(g) = \int g\psi d\sigma = \int g\psi d\mu + \int g\psi d\nu$$

ובהעברת אגפים נובע כי,

$$\int g(1 - \psi)\, d\nu = \int g\psi d\mu$$

- תחילה נשים לב כי $\psi \geq 0$ σ־כ"ת, שכן מתקיים לכל $A \in \mathcal{A}$ עבור $g = 1_A$,

$$0 \leq \nu(A) = \int 1_A d\nu = \int 1_A \psi d\sigma = \int_A \psi d\sigma$$

- עוד נראה כי $\psi < 1$ σ־כ"ת. נגדיר $A = \{x \mid \psi(x) \geq 1\}$. אז מתקיים,

$$\nu(A) = \int_A \psi d\sigma \geq \int_A 1 d\sigma = \sigma(A) = \mu(A) + \nu(A)$$

לכן בהכרח $\mu(A) = 0$. אבל $\nu \ll \mu$ ולכן $\nu(A) = 0$. לכן $\sigma(A) = 0$, כנדרש.

אם כך מצאנו כי הפונקציה $\psi \in L^2(\sigma)$ מקיימת $0 \leq \psi < 1$ σ־כ"ת, וכן $\int g d\nu = \int g\psi d\sigma$ לכל $g \in L^2(\sigma)$. אם כך נגדיר $f = \frac{\psi}{1-\psi}$, ומתקיים עבורה $\psi = \frac{f}{1+f}$, וכן $f \geq 0$ σ־כ"ת.

- נראה כי $f \in L^1(\mu)$. לשם כך נגדיר לכל $n \in \mathbb{N}$ את $B_n = \{x \mid f(x) + 1 \leq n\}$. נקבל כי,

$$\int\limits_{B_n} (1+f)\, d\nu = \int\limits_{B_n} (1+f)\, \psi d\sigma = \int\limits_{B_n} f d\sigma = \int\limits_{B_n} f d\mu + \int\limits_{B_n} f d\nu$$

ובהעברת אגפים נובע כי,

$$\nu(B_n) = \int\limits_{B_n} f d\mu$$

נשים לב כי $B_n \uparrow \Omega$, ולכן גם $\nu(B_n) \uparrow \nu(\Omega) < \infty$. נשאיף $n \to \infty$ ונקבל כי $\infty > \nu(\Omega) = \int f d\mu$, כלומר $0 \leq f \in L^1(\mu)$.

- נראה כי לכל $A \in \mathcal{A}$ מתקיים $\nu(A) = \int_A f d\mu$. לשם כך נגדיר לכל $n \in \mathbb{N}$ את $C_n = \{x \mid (f(x)+1)\, 1_A(x) \leq n\}$. עבור $g = (1+f)\, 1_{A\cap C_n} \in L^1(\sigma)$ מתקיים,

$$\begin{aligned} \int\limits_{A\cap C_n} f d\mu + \int\limits_{A\cap C_n} f d\nu &= \int\limits_{A\cap C_n} f d\sigma = \int\limits_{A\cap C_n} (1+f)\, \psi d\sigma = \int\limits_{A\cap C_n} (1+f)\, d\nu \\ &= \int\limits_{A\cap C_n} 1 d\nu + \int\limits_{A\cap C_n} f d\nu = \nu(A\cap C_n) + \int\limits_{A\cap C_n} f d\nu \end{aligned}$$

ובהעברת אגפים נובע כי $\nu(A\cap C_n) = \int_{A\cap C_n} f d\mu$.

אבל גם כאן מתקיים $C_n \uparrow \Omega$, ולכן נובע משיקולים דומים לאלה שהזכרנו לעיל כי $\nu(A) = \int_A f d\mu$, כנדרש. ■

5.2 תוצאה: קיום אופרטור צמוד

משפט: יהיו $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ מרחבי הילברט, ויהי $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ אופרטור לינארי רציף.
אזי קיים ויחיד **אופרטור צמוד** $T^* : \mathbf{H}' \to \mathbf{H}$, כלומר כזה המקיים $\langle Tv, u\rangle = \langle v, T^*u\rangle$, לכל $v \in \mathbf{H},\ u \in \mathbf{H}'$.

הוכחה: נקבע $w \in \mathbf{H}'$. נתבונן בפונקציונל $\psi_w : \mathbf{H} \to \mathbf{F}$ המוגדר $\psi_w(x) = \langle Tx, w\rangle$. אז ψ_w רציף כי T רציפה ומשוויון קושי שוורץ, ולכן ממשפט ההצגה של ריס קיים (ויחיד) $z \in \mathbf{H}$ שעבורו $\psi_w(x) = \langle x, z\rangle$ לכל $x \in \mathbf{H}$. אם כך נגדיר $T^*w = z$.
ואכן, נשים לב כי $\langle Tv, u\rangle = \psi_v(u) = \langle u, T^*w\rangle$.
היחידות של T^* היא כי אם $S : \mathbf{H}' \to \mathbf{H}$ מקיים $\langle Tv, u\rangle = \langle v, Su\rangle$ לכל $v \in \mathbf{H}, u \in \mathbf{H}'$, אז $\langle v, T^*u\rangle = \langle v, Su\rangle$ ולכן $\langle v, T^*u - Su\rangle = 0$, כלומר $T^*u = Su$. ■

טענה: נראה כמה תכונות של האופרטור הצמוד.

1. $(T^*)^* = T$
2. T היא איזומטריה אם ורק אם $T^* \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbf{H}}$.
3. עבור זוג אופרטורים לינאריים $\mathbf{H} \xrightarrow{T} \mathbf{H}' \xrightarrow{S} \mathbf{H}''$, מתקיים $(ST)^* = T^*S^*$.

4. יהי $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ תת מרחב סגור ו-$P_{\mathbf{V}}$ ההטלה הניצבת המתאימה לו. נתבונן בשיכון הטבעי $\iota_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{H}$. אז $(\iota_{\mathbf{V}})^* = P_{\mathbf{V}}$.
הוכחה: לכל $v \in \mathbf{V},\ u \in \mathbf{H}$, מצד אחד,

$$\langle v, u\rangle = \langle \iota_{\mathbf{V}} v, u\rangle = \langle v, \iota_{\mathbf{V}}^* u\rangle$$

ומצד שני,

$$\langle v, u\rangle = \langle v, P_{\mathbf{V}} u\rangle + \underbrace{\langle v, u - P_{\mathbf{V}} u\rangle}_{=0} = \langle v, P_{\mathbf{V}} u\rangle$$

ומיחידות האופרטור הצמוד נובע כי $(\iota_{\mathbf{V}})^* = P_{\mathbf{V}}$. ▲

חלק III
מערכות אורתונורמליות

הגדרה: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט. תהי $\mathbf{e}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\mathbf{H}$ משפחה של וקטורים לקבוצת אינדקסים כלשהי A. אומרים כי $\mathbf{e}$ היא **מערכת אורתונורמלית**, אם לכל $\alpha,\beta\in A$ מתקיים,

$$\langle e_\alpha,e_\beta\rangle=\delta_{\alpha,\beta}=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta\\ 1 & \alpha=\beta\end{cases}$$

סימון: למערכת אורתונורמלית $\mathbf{e}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ במרחב הילברט $\mathbf{H}$, לכל $x\in\mathbf{H}$ ולכל $\alpha\in A$, נסמן את **מקדם פורייה** ה־α של x על ידי $\hat{x}(\alpha)=\langle x,e_\alpha\rangle$.

דוגמאות:

1. $\mathbf{H}=L^2([0,1])$, עם המשפחה $\mathbf{e}=\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ כך שלכל $n\in\mathbb{Z}$, $e_n(x)=e^{2\pi inx}=\exp(2\pi inx)$.
זו מערכת אורתונורמלית כי,

$$\langle e_n,e_m\rangle=\int_0^1 e^{2\pi inx}\cdot\overline{e^{2\pi imx}}dx=\int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x}dx=\delta_{n,m}$$

2. $\mathbf{H}=L^2\left(\{\pm1\}^{\mathbb{N}}\right)$ כאשר זה מרחב מידה ביחס למידת המכפלה המתקבלת מהמידה $\mu(-1)=\mu(+1)={}^1\!/\!_2$ לכל קואורדינטה $n\in\mathbb{N}$.
ניקח את המשפחה $\mathbf{e}=\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $e_n(\mathbf{x})=x_n$ עבור $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n,...)$. זו מערכת אורתונורמלית.

5.3 מערכות אורתונורמליות בנות מניה

טענה: תהי $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מערכת אורתונורמלית בת מניה במרחב הילברט $\mathbf{H}$. אזי לכל סדרה $(c_n)\subset\mathbf{F}$ מתקיים כי $\sum c_ne_n$ מתכנס בתנאי ב-$\mathbf{H}$ אם ורק אם $\sum|c_n|^2$ מתכנס ב-$\mathbb{R}$.

הוכחה: מהגדרת התכנסות בתנאי ומהיות $\mathbf{H}$ הילברט, $\sum c_ne_n$ מתכנס אם ורק אם $S_N=\sum^N c_na_n$ סדרת קושי. נשים לב שלכל N,M,

$$\|S_N-S_{M-1}\|^2=\left\|\sum_{n=M}^N c_ne_n\right\|^2=\sum_{n=M}^N\|c_ne_n\|^2=\sum_{n=M}^N|c_n|^2\|e_n\|^2=\sum_{n=M}^N|c_n|^2$$

כאשר השוויון השני הוא ממשפט פיתגורס. לכן נובע כי (S_N) סדרת קושי ב-$\mathbf{H}$ אם ורק אם $\sum_{n=1}^N|c_n|^2$ סדרת קושי ב-$\mathbb{R}$, ומשלמות שני המרחבים הללו נובעת השקילות הנדרשת. ■

מסקנה: נתבונן במרחב $l^2(\mathbb{N})=\left\{(c_n)\subset\mathbf{F}\mid\sum|c_n|^2<\infty\right\}$, ונגדיר העתקה $\mathbf{H}\to l^2(\mathbb{N})$ על ידי $(c_n)\mapsto\sum c_ne_n$.

העתקה זו מוגדרת היטב לפי הטענה הקודמת, וכמו כן היא איזומטריה, שכן $\|\sum c_ne_n\|=\sum|c_n|^2=\|(c_n)\|$. כמו כן התמונה של העתקה זו, היא תת מרחב סגור של $l^2(\mathbb{N})$, שהוא הקטן ביותר המכיל את כל $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. תת מרחב זה הוא,

$$\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}(e_n\mid n\in\mathbb{N}):=\overline{\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}(e_n\mid n\in\mathbb{N})}$$

כאשר $\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ הוא הפרוש האלגברי, כלומר אוסף הצירופים הלינאריים הסופיים של איברי המערכת.

טענה: עבור מערכת אורתונורמלית $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ במרחב הילברט $\mathbf{H}$, נסמן $\mathbf{V}=\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}\left(e_n\mid n\in\mathbb{N}\right)$ ונתבונן בשיכון הטבעי $\iota_{\mathbf{V}}:\mathbf{V}\hookrightarrow\mathbf{H}$. אזי לכל $x\in\mathbf{H}$,

$$P_{\mathbf{V}}x=\sum\hat{x}\left(n\right)e_n=\sum\left\langle x,e_n\right\rangle e_n$$

הוכחה: נשתמש בכך שבאופן כללי $\iota_{\mathbf{V}}^{*}=P_{\mathbf{V}}$, ונשים לב כי לכל $(c_n)\in l^2\left(\mathbb{N}\right)$,

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_m c_m e_m,\sum_n\left\langle x,e_n\right\rangle e_n\right\rangle &= \sum_m c_m\left\langle e_m,\sum_n\left\langle x,e_n\right\rangle e_n\right\rangle=\sum_m\sum_n c_m\overline{\left\langle x,e_n\right\rangle}\delta_{mn}\\ &= \sum c_m\overline{\left\langle x,e_m\right\rangle}=\sum c_m\left\langle e_m,x\right\rangle=\left\langle\sum c_m e_m,x\right\rangle\\ &= \left\langle\sum c_m e_m,P_{\mathbf{V}}x\right\rangle\end{aligned}$$

לכן נובע כי $P_{\mathbf{V}}x=\sum\left\langle x,e_n\right\rangle e_n$. $\blacksquare$

מסקנה: **(אי שוויון בסל)** הראינו כי הטלה ניצבת מכווצת, כלומר $\|P_{\mathbf{V}}x\|\le\|x\|$. בפרט עבור מערכת אורתונורמלית,

$$\left\|\sum\left\langle x,e_n\right\rangle e_n\right\|^2=\sum\left|\left\langle x,e_n\right\rangle\right|^2\le\|x\|^2$$

5.4 בסיסים אורתונורמליים

הערה: תהי $\mathbf{e}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ מערכת אורתונורמלית במרחב הילברט $\mathbf{H}$. אז על ידי אי שוויון בסל, לכל תת קבוצה בת מניה $\{e_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbf{e}$ מתקיים,

$$\sum_i\left|\left\langle x,e_{\alpha_i}\right\rangle\right|^2\le\|x\|^2$$

טענה: תהי $\mathbf{e}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ מערכת אורתונורמלית במרחב הילברט $\mathbf{H}$. לכל $x\in\mathbf{H}$, הקבוצה $A\left(x\right)=\{\alpha\in A\mid\hat{x}\left(\alpha\right)\ne0\}$ לכל היותר בת מניה.

הוכחה: יהי $x\in\mathbf{H}$. לכל $k\ge1$ נגדיר $A_k\left(x\right)=\left\{\alpha\in A\mid\left|\hat{x}\left(\alpha\right)\right|^2\ge{}^1\!/_k\right\}$. נניח בשלילה שקיים k עבורו $|A_k\left(x\right)|=\infty$. אז יש $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}\subset A_k\left(x\right)$ שעבורם מאי שוויון בסל,

$$\infty=\sum\frac{1}{k}\le\sum\left|\hat{x}\left(\alpha_i\right)\right|^2\le\|x\|^2<\infty$$

וזו סתירה; לכן בהכרח $|A_k\left(x\right)|<\infty$ לכל $k\ge1$. אבל $A\left(x\right)=\bigcup_k A_k\left(x\right)$ ולכן $A\left(x\right)$ לכל היותר בת מניה. $\blacksquare$

מסקנה: נתבונן במרחב $l^2\left(A\right)=\left\{(c_\alpha)\subset\mathbf{F}\mid\sum|c_\alpha|^2<\infty\right\}$, ונגדיר העתקה $\mathbf{H}\to l^2\left(A\right)$ על ידי $(c_n)\mapsto\sum c_\alpha e_\alpha$.

העתקה זו מוגדרת היטב לפי הטענה הקודמת, שכן יש רק מספר בן מניה של אינדקסים $\alpha\in A$ שעבורם $c_\alpha\ne0$, וכמו כן היא איזומטריה, ותמונתה היא תת המרחב הסגור $\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}\left(\mathbf{e}\right)\subset\mathbf{H}$.

הגדרה: מערכת אורתונורמלית $\mathbf{e}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ במרחב הילברט $\mathbf{H}$ נקראת **בסיס אורתונורמלי**, אם $\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}\left(\mathbf{e}\right)=\mathbf{H}$.

משפט: **(שוויון פרסבל)** יהי $\mathbf{e}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ בסיס אורתונורמלי של מרחב הילברט $\mathbf{H}$. אזי,

1. $x=\sum\hat{x}(\alpha)e_\alpha$ לכל $x\in\mathbf{H}$.
2. $\|x\|^2=\sum|\hat{x}(\alpha)|^2$ לכל $x\in\mathbf{H}$. בפרט אם $\hat{x}(\alpha)=0$ לאיזה $x\in\mathbf{H}$ לכל $\alpha\in A$, אז $x=0$.
3. $\langle x,y\rangle=\sum\hat{x}(\alpha)\hat{y}(\alpha)$ לכל $x,y\in\mathbf{H}$.

הוכחה: לא קשה לראות כיצד חלקים 2,3 נובעים מ-1. נוכיח אם כך את 1. נסמן $\mathbf{V}=\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}(\mathbf{e})$, ונתבונן בשיכון הטבעי $\iota_{\mathbf{V}}:\mathbf{V}\to\mathbf{H}$. כפי שראינו, מתקיים $P_{\mathbf{V}}x=\sum\hat{x}(\alpha)e_\alpha$ לכל $x\in\mathbf{H}$. אבל מצד שני נתון כי $\mathbf{V}=\mathbf{H}$, ולכן מתכונות ההטלה הניצבת $P_{\mathbf{V}}x=x$ לכל $x\in\mathbf{H}$. ■

למה: תהי $\mathbf{e}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ מערכת אורתונורמלית במרחב הילברט $\mathbf{H}$. אם לכל $x\in\mathbf{H}$ מתקיים $x=0\Longleftarrow\hat{x}(\alpha)=0$, $\forall_{\alpha\in A}$, אזי $\mathbf{e}$ בסיס אורתונורמלי.

הוכחה: נסמן $\mathbf{V}=\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}(\mathbf{e})$, ונניח בשלילה כי $\mathbf{V}\neq\mathbf{H}$. ניתן לכתוב $\mathbf{H}=\mathbf{V}\oplus\mathbf{V}^\perp$ וקיים $0\neq y\in\mathbf{V}^\perp$. מתקיים לכל $\alpha\in A$,

$$\begin{aligned}\langle P_{\mathbf{V}}y-y,e_\beta\rangle &= \left\langle\sum\hat{y}(\alpha)e_\alpha-y,e_\beta\right\rangle=\left\langle\sum\hat{y}(\alpha)e_\alpha,e_\beta\right\rangle-\hat{y}(\beta)\\ &= \sum_\alpha\hat{y}(\alpha)\delta_{\alpha,\beta}-\hat{y}(\beta)=0\end{aligned}$$

ולכן מההנחה נובע $P_{\mathbf{V}}y-y=0$, בסתירה להנחה $y\in\mathbf{V}^\perp$. ■

5.5 מיון של מרחבי הילברט לפי ממד

טענה: לכל מרחב הילברט $\mathbf{H}$ יש בסיס אורתונורמלי.

תזכורת: **(הלמה של צורן)** נניח כי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית ולא ריקה. נניח שלכל שרשרת (כלומר תת קבוצה $Y\subset X$ שבה כל זוג איברים ניתנים להשוואה) קיים חסם מלעיל (כלומר איבר $x\in X$ שמקיים $y\leq x$ לכל $y\in Y$). אזי קיים ב-X איבר מקסימלי (כלומר איבר $z\in X$ שמקיים $x\leq z$ לכל $x\in X$).

הוכחה: נשתמש בלמה של צורן. תהי $\mathcal{F}$ משפחת כל המערכות האורתונורמליות של $\mathbf{H}$. $\mathcal{F}$ לא ריקה כי $\emptyset\in\mathcal{F}$, והיא סדורה חלקית ביחס להכלה. באופן כללי, איחוד עולה של מערכות אורתונורמליות הוא מערכת אורתונורמלית, ולכן נובע כי לכל שרשרת עולה ביחס להכלה של איברים מ-$\mathcal{F}$ יש חסם מלעיל. אם כך מהלמה של צורן נובע כי יש איבר מקסימלי $\mathbf{e}\in\mathcal{F}$. נראה כי $\mathbf{e}$ הוא בסיס אורתונורמלי.

אם $\mathbf{e}$ לא היה בסיס, נכתוב $\mathbf{V}=\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}(\mathbf{e})$ ונקבל כי $\mathbf{H}=\mathbf{V}\oplus\mathbf{V}^\perp$ וקיים $0\neq y\in\mathbf{V}^\perp$. לכן $\mathbf{e}\cup\left\{\frac{y}{\|y\|}\right\}$ מערכת אורתונורמלית המכילה ממש את $\mathbf{e}$, בסתירה למקסימליות. ■

מסקנה: כל מרחב הילברט $\mathbf{H}$ איזומורפי כמרחב הילברט למרחב $l^2(A)$ לאיזו קבוצה A.

הוכחה: נקבע $\mathbf{e}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{H}$, לאיזו קבוצת אינדקסים A. נגדיר העתקה $\mathbf{H}\to l^2(A)$ באופן הבא: לכל $\alpha\in A$ יהי δ_α וקטור באורך $|A|$ שהוא אפס בכל מקום למעט בקואורדינטה α שם הוא 1. נגדיר את ההעתקה $e_\alpha\mapsto\delta_\alpha$. הקבוצה $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ היא בסיס אורתונורמלי של $l^2(A)$, ולכן ההעתקה מתרחבת באופן לינארי ורציף לכל $l^2(A)$. קל לראות שזו העתקה חח"ע ועל. ■

טענה: לכל זוג קבוצות A,B, מתקיים $l^2(A)\cong l^2(B)$ (איזומורפיזם כמרחבי הילברט) אם ורק אם $|A|=|B|$ (תרגיל).

מסקנה: כל הבסיסים האורתונורמליים של מרחב הילברט $\mathbf{H}$, הם מאותו גודל. ויתרה מזו, מרחבי הילברט כולם ממוינים על ידי **הממד** שלהם, כלומר עוצמת הבסיסים האורתונורמליים שלהם. בפרט, קיים מרחב הילברט יחיד עם בסיס בן מניה שאינו סופי, עד כדי איזומורפיזם של מרחבי הילברט.

למה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט ספרבילי (כלומר שיש לו קבוצה צפופה בת מניה), אז הממד שלו הוא לכל היותר בן מניה.

הוכחה: נניח כי $\mathbf{x}=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbf{H}$ צפופה. לכל N, נבצע תהליך גרהם־שמידט על $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ כדי לקבל מערכת אורתונורמלית $\{e_n\}_{n=1}^{N}$, כך שמתקיים $\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\{x_n\}_{n=1}^{N}\right)=\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\{e_n\}_{n=1}^{N}\right)$.

אם כך אינדוקטיבית נקבל מערכת אורתונורמלית בת מניה או סופית $\mathbf{e}=\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ המקיימת $\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}(\mathbf{x})=\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}(\mathbf{e})$. מכך נובע כי הסגורים של הקבוצות האלה שווים, כלומר $\mathbf{H}=\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}(\mathbf{x})=\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}(\mathbf{e})$. ■

דוגמה: נתבונן במרחב הילברט $\mathbf{H}=L^2([0,1])$, ונבחר בו מערכת אורתונורמלית $\mathbf{e}=\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ כך ש-$e_n(x)=\exp(2\pi inx)=e^{2\pi inx}$. מאוחר יותר נראה כי זה בסיס, ולכן כל $f\in L^2([0,1])$ ניתן לכתוב $f\overset{L^2}{=}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e_n$ עבור $\hat{f}(n)=\langle f,e_n\rangle=\int_0^1 f(x)e^{2\pi inx}dx$.

דוגמה: יהי K מרחב מטרי קומפקטי, ולכן ספרבילי. המרחב $L^2(K,\mu)$ עבור μ מידת בורל גם הוא ספרבילי,[4] ולכן איזומורפי ל-$l^2(A)$ עבור A בת מניה או סופית (במקרה הסופי זה למעשה $\mathbb{R}^n$ לאיזה $n\geq 1$).

דוגמה: **(מערכת האר)** עבור המרחב $L^2([0,1])$, נגדיר מערכת של פונקציות מדרגה $\mathbf{h}=\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ באופן הבא:

$$h_0(x)=1\,,\quad h_1(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1/2)\\ -1 & x\in[1/2,1]\end{cases}$$

$$h_2(x)=\begin{cases}2^{1/2} & x\in[0,1/4)\\ -2^{1/2} & x\in[1/4,1/2)\\ 0 & x\in[1/2,1]\end{cases}\quad,\quad h_3(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1/2)\\ 2^{1/2} & x\in[1/2,3/4)\\ -2^{1/2} & x\in[3/4,1]\end{cases}$$

וכן הלאה. כלומר, באופן כללי לכל $n\geq 1$, נגדיר עבור $k=0,1,2,\ldots,2^n-1$,

$$h_{k+2^n}(x)=\begin{cases}2^{n/2} & x\in[k2^{-n},(k+1/2)2^{-n})\\ -2^{n/2} & x\in[(k+1/2)2^{-n},(k+1)2^{-n})\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

לא קשה לראות ש-$\|h_{k+2^n}\|=1$ לכל $n\geq 1$ ולכל $0\leq k\leq 2^n-1$. כמו כן לכל $n\geq 1$ ולכל $0\leq k\leq 2^n-1$, על הקטע שבו h_{k+2^n} אינה אפס, כל הפונקציות h_j עבור $j<k+2^n$ הן קבועות, ולכן בממוצע האינטגרל הוא אפס, כלומר זו מערכת אורתונורמלית.

ניתן להראות כי $\mathrm{Span}_{\mathbf{H}}(\mathbf{h})$ הוא למעשה כל $L^2([0,1])$, שכן $\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}(h_1,\ldots,h_{2^n})$ הוא אוסף פונקציות המדרגה שקבועות על הקטעים מהצורה $\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]$.

נשים לב כי לכל $f\in L^2([0,1])$ מתקיים,

$$S_n(x):=\sum_{i=1}^{2^n}\hat{f}(i)h_i(x)=\frac{1}{1/2^n}\int\limits_{x\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]}f(t)\,dt$$

ניתן לראות זאת בחישוב ישיר, אולם זה למעשה נובע מהזיהוי הכללי של הפונקציה $x\mapsto\sum_{i=1}^{2^n}\hat{f}(i)h_i(x)$ כהטלה של f על המרחב $L^2([0,1])$ ביחס לסיגמא־אלגברה הנוצרת על ידי הקטעים מהצורה $\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]$. אם כך על ידי משפט לבג נובע כי $S_n\to f$ כמעט תמיד.

[4] ניתן לבחור את סדרה של פונקציות מציינות של כדורים ברדיוסים חיוביים סביב סדרה צפופה ב-K, וזו סדרה צפופה ב-$L^2(K,\mu)$.

דוגמה: נתאר הצגה איזומורפית של מערכת האר. נסמן $C=\{\pm1\}^{\mathbb{N}}$, ונתבונן במרחב $\mathbf{H}=L^2(C)$.

נשים לב לזיהוי הידוע $C\cong[0,1]$, המתקבל על ידי $\{\pm1\}^{\mathbb{N}}\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]$, כאשר מעתיקים לפיתוח הבינארי $\mathbf{c}\mapsto\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{2^i}$ כאשר c_i היא הקואורדינטה ה־i של $\mathbf{c}\in C$. אם כך נובע כי $L^2(C)\cong L^2([0,1])$.

נגדיר $r_0=1$ ונגדיר $r_i(\mathbf{c})=c_i$ לכל $i\in\mathbb{N}$. לכל $A\subset\mathbb{N}$ סופית, נגדיר $w_A=\prod_{i\in A}r_i$. נזהה את המערכות האורתונורמליות באופן הבא: $w_\emptyset\leftrightarrow h_1$, $w_{\{1\}}\leftrightarrow h_2$, ובאופן כללי נבצע זיהוי $\{h_1,\ldots,h_{2^n}\}\leftrightarrow\{w_A\}_{A\subset\{1,\ldots,n\}}$. מתקבל תחת זיהוי זה כי $\{w_A\mid A\subset\mathbb{N},\,|A|<\infty\}$ מערכת אורתונורמלית של $\mathbf{H}$, ולכן לכל $f\in L^2(C)$,

$$f(\mathbf{c})=\sum_{A\subset\mathbb{N},\,|A|<\infty}\hat{f}(A)\,w_A(\mathbf{c})$$

(אין חשיבות לסדר הסכימה, שכן טור הערכים המוחלטים בריבוע מתכנס, ולכן יש התכנסות בהחלט). שוב על ידי משפט לבג נקבל כי יש התכנסות כמעט תמיד,

$$S_n(\mathbf{c})=\sum_{A\subset\{1,\ldots,n\}}\hat{f}(A)\,w_A(\mathbf{c})\to f(\mathbf{c})$$

הערה: האוסף $\{w_A\mid A\subset\mathbb{N},\,|A|<\infty\}$ הוא חבורה ביחס לכפל $w_A\cdot w_B=w_{A\triangle B}$.

חלק IV
הטופולוגיה החלשה

הגדרה: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט. נאמר כי סדרה $\mathbf{H} \supset (x_n)$ **מתכנסת חלש** לאיבר $x \in \mathbf{H}$, ונסמן $x_n \xrightarrow{w} x$, אם לכל $y \in \mathbf{H}$ מתקיים $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ כסדרה בשדה $\mathbf{F}$.

הגדרה: נגדיר קבוצה פתוחה תת־בסיסית בהתכנסות החלשה להיות סביבה ברדיוס $\epsilon > 0$ של איזה $y \in \mathbf{H}$. כלומר $U_\epsilon (y) = \{z \in \mathbf{H} \mid |\langle z, y\rangle| < \epsilon\}$. נגדיר את **הטופולוגיה החלשה** להיות זו שנוצרת על ידי תת־בסיס הסביבות הללו.

הגדרה: סדרה (x_n) נקראת **סדרת קושי חלשה**, אם לכל $y \in \mathbf{H}$ הסדרה $(\langle x_n, y\rangle)$ היא סדרת קושי ממשית.

טענה: גבול חלש הוא יחיד.

הוכחה: נניח כי $x_n \xrightarrow{w} x, x'$. כלומר לכל $y \in \mathbf{H}$ מתקיים $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle, \langle x', y\rangle$. מיחידות הגבול הממשי נובע כי $\langle x, y\rangle = \langle x', y\rangle$ לכל $y \in \mathbf{H}$, כלומר $\langle x - x', y\rangle = 0$ לכל $y \in \mathbf{H}$, ובפרט עבור $y = x - x'$, ולכן $\|x - x'\| = 0$, כלומר $x = x'$. ■

טענה: אם $x_n \to x$ אז $x_n \xrightarrow{w} x$.

הוכחה: נקבע $y \in \mathbf{H}$. מתקיים מאי שוויון קושי שוורץ,

$$|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\|$$

נתון כי $\|x_n - x\| \to 0$, ולכן $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$, כנדרש. ■

טענה: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט סוף ממדי, אז התכנסות שקולה להתכנסות חלשה.

הוכחה: יש להראות כי אם $x_n \xrightarrow{w} x$ אז $x_n \to x$. נקבע בסיס אורתונורמלי $(e_i)_{i=1}^m \subset \mathbf{H}$. אז מתקיים $x_n = \sum_{i=1}^m \hat{x}_n (i) e_i$ וכן $x = \sum_{i=1}^m \hat{x} (i) e_i$. לכן,

$$\|x_n - x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^m (\hat{x}_n (i) - \hat{x} (i)) e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\hat{x}_n (i) - \hat{x} (i)\|^2$$

נתון כי $x_n \xrightarrow{w} x$ ולכן $\hat{x}_n (i) = \langle x_n, e_i\rangle \to \langle x, e_i\rangle = \hat{x} (i)$ לכל $i = 1, \ldots, n$, ולכן כל אחד מהנסכמים קטן כרצוננו, והיות שהסכום סופי נובע כי הביטוי כולו קטן כרצוננו. ■

טענה: אם $\mathbf{H} \supset (e_i)$ מערכת אורתונורמלית אינסופית, אז $e_i \xrightarrow{w} 0$.

הערה: זו דוגמה למצב בו התכנסות חלשה אינה גוררת התכנסות, שכן $\|e_i - 0\| = \|e_i\| = 1$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

הוכחה: נקבע $y \in \mathbf{H}$. נשים לב כי מאי שוויון בסל מתקיים,

$$\sum |\langle y, e_i\rangle|^2 \leq \|y\|^2 < \infty$$

זה טור חיובי מתכנס, ולכן איברו הכללי שואף לאפס, כלומר $|\langle y, e_i\rangle| \to 0$, כנדרש. ■

מסקנה: **(הלמה של רימן־לבג)** לכל $f \in L^2 ([0, 1])$, ניקח את המערכת האורתונורמלית $e_n (x) = e^{2\pi inx}$ ונקבל כי,

$$\int_0^1 f (x) e^{2\pi inx} dx = \langle f, e_n\rangle \to 0 \,, \ \ n \to \infty$$

בפרט,

$$\int_0^1 \sin x \cdot e^{2\pi inx}dx \to 0\,,\quad \int_0^1 \cos x \cdot e^{2\pi inx}dx \to 0\,,\quad n\to\infty$$

הערה: טענה זו נכונה גם עבור כל $f \in L^1\left([0,1]\right)$, שכן ניתן למצוא קבוצה של פונקציות שצפופות גם ב-$L^1\left([0,1]\right)$ וגם ב-$L^2\left([0,1]\right)$.

טענה:

1. אם $x_n \xrightarrow{w} x$ אז $\|x\| \le \liminf \|x_n\|$.
2. $x_n \to x$ אם ורק אם $x_n \xrightarrow{w} x$ וגם $\limsup \|x_n\| \le \|x\|$.

הוכחה:

1. נשים לב כי מאי שוויון קושי שוורץ $|\langle x_n, x\rangle| \le \|x_n\| \cdot \|x\|$, ולכן מתקיים,

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} |\langle x_n, x\rangle| \le \liminf \|x_n\| \cdot \|x\|$$

אם $x=0$ הטענה ברורה, אם $x \neq 0$ נחלק ב-$\|x\|$ ונקבל את אי השוויון הנדרש.

2. בכיוון אחד, נניח כי $x_n \to x$. ראינו כבר כי $x_n \xrightarrow{w} x$, וכמו כן מתקיים מאי שוויון המשולש $\limsup \|x_n\| \le \limsup \|x_n - x\| + \|x\| = \|x\|$.
בכיוון השני, נשים לב כי,

$$\begin{aligned} 0 &\le \limsup \|x_n - x\|^2 = \limsup \left[\|x_n\|^2 + \|x\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle\right] \\ &= \limsup \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \le 0 \end{aligned}$$

כאשר אי השוויון האחרון הוא מהנתון בטענה. לכן $\limsup \|x_n - x\|^2 \to 0$, כלומר $x_n \to x$. ■

מסקנה: מחלק 2 של הטענה נובע כי על מעגל היחידה, התכנסות שקולה להתכנסות חלשה.

טענה: כל סדרת קושי חלשה היא חסומה.

הוכחה: תהי (x_n) סדרת קושי חלשה. לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $V_k = \{y \mid \forall_n,\, |\langle y, x_n\rangle| \le k\}$. נשים לב כי $V_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{k,n}$ כאשר $V_{k,n} = \{y \mid |\langle y, x_n\rangle| \le k\}$. מרציפות המכפלה הפנימית נובע כי $V_{k,n}$ קבוצה סגורה לכל $k \in \mathbb{N}$, ולכן V_n סגורה לכל $n \in \mathbb{N}$.

נתון שלכל $y \in \mathbf{H}$ מתקיים כי $(\langle y, x_n\rangle)$ סדרת קושי ממשית, ולכן היא חסומה. לכן $y \in V_k$ לאיזה $k \in \mathbb{N}$. כלומר $\mathbf{H} = \bigcup_k V_k$. אם כך ממשפט הקטגוריה של בייר נובע שקיים אינדקס k_0 שעבורו $V_{k_0}^o \neq \emptyset$. אז יש $r > 0$ עם $y_0 \in \mathbf{H}$, כך שמתקיים $B_r(y_0) = \{y \mid \|y - y_0\| < r\} \subset V_{k_0}$. כעת לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{r}{2}\|x_n\| &= \frac{r}{2\|x_n\|}|\langle x_n, x_n\rangle| = \left|\left\langle x_n, \frac{r}{2\|x_n\|}x_n\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle x_n, y_0 - \frac{r}{2\|x_n\|}\right\rangle - \langle x_n, y_0\rangle\right| \le 2k_0 \end{aligned}$$

ולכן נובע כי $\|x_n\| \le 4r^{-1}k_0$ לכל n, כנדרש. ■

משפט: כל סדרת קושי חלשה מתכנסת חלש.

הוכחה: תהי $(x_n) \subset \mathbf{H}$ סדרת קושי חלשה. לכל $y \in \mathbf{H}$, סדרת המספרים $(\langle y, x_n \rangle)$ היא סדרת קושי ולכן מתכנסת. אם כך יהי $\phi : \mathbf{H} \to \mathbf{F}$ הפונקציונל הלינארי $\phi(y) = \lim_{n\to\infty} \langle y, x_n \rangle$. זה פונקציונל חסום כי (x_n) סדרת קושי חלשה ולכן חסומה. אם כך ממשפט ההצגה של ריס נובע שקיים $x_0 \in \mathbf{H}$ שעבורו $F(y) = \langle y, x_0 \rangle$ לכל $y \in \mathbf{H}$. כלומר $x_n \xrightarrow{w} x_0$. ■

משפט: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת חלש.

הוכחה: תהי $(x_n) \subset \mathbf{H}$ סדרה חסומה.

- נניח תחילה כי $\mathbf{H}$ מרחב ספרבילי, עם סדרה צפופה $(y_k) \subset \mathbf{H}$.
נשים לב כי $(\langle y_1, x_n \rangle)$ סדרה ממשית חסומה (מאי שוויון קושי שוורץ), ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת שנסמן $(\langle y_1, x_n^1 \rangle)$. כמו כן $(\langle y_2, x_n^1 \rangle)$ סדרה ממשית חסומה, ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת שנסמן $(\langle y_2, x_n^2 \rangle)$. נמשיך הלאה אינדוקטיבית, ונקבל כי הסדרה $(\langle y_k, x_n^n \rangle)_n$ מתכנסת לכל y_k, ולכן נובע כי (x_n^n) סדרה מתכנסת חלש ביחס לכל y_k. אבל $(y_k) \subset \mathbf{H}$ סדרה צפופה, ומרציפות המכפלה הפנימית נובע כי $(\langle y, x_n^n \rangle)$ סדרה מתכנסת לכל $y \in \mathbf{H}$, כלומר (x_n^n) סדרת קושי חלשה, ולכן מתכנסת חלש.
- כעת עבור $\mathbf{H}$ לאו דווקא ספרבילי, נתבונן בתת המרחב הסגור $\mathbf{V} = \mathrm{Span}_{\mathbf{H}}(x_n \mid n \in \mathbb{N})$. מהחלק הראשון של ההוכחה נובע שיש התכנסות חלשה $x_n \xrightarrow{w} x$ בתוך $\mathbf{V}$.
יהי $y \in \mathbf{H}$. נכתוב $y = v + u$ עבור $u \in \mathbf{V}^\perp$, $v \in \mathbf{V}$, ונקבל כי,
$$\langle y, x_n \rangle = \langle v, x_n \rangle + \langle u, x_n \rangle = 0 + \langle v, x_n \rangle = \langle v, x_n \rangle$$
אבל $v \in \mathbf{V}$, ולכן $(\langle v, x_n \rangle)$ סדרה מתכנסת, כנדרש. ■

משפט: (**משפט בנך־סאקס**) יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט ותהי $(x_n) \subset \mathbf{H}$. אם $x_n \xrightarrow{w} x$, אז יש תת סדרת אינדקסים $(n_k)_k$ שעבורה $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} \to x$.

הוכחה: נניח ללא הגבלת הכלליות $x = 0$. נתון כי $x_n \xrightarrow{w} 0$ ולכן זו סדרת קושי חלשה ולכן היא סדרה חסומה, $\|x_n\| \le M$. נבנה את n_k בצורה אינדוקטיבית.

נגדיר $n_1 = 1$. נגדיר את n_2 להיות האינדקס הראשון $n_2 > n_1$ שמקיים $|\langle x_{n_2}, x_{n_1} \rangle| < 1/2$ (קיים כזה מההתכנסות החלשה $x_n \xrightarrow{w} 0$). נגדיר את n_3 להיות האינדקס הראשון $n_3 > n_2$ שמקיים $|\langle x_{n_3}, x_{n_1} \rangle|, |\langle x_{n_3}, x_{n_2} \rangle| < 1/3$ (קיים כזה מאותו הנימוק). באינדוקציה, נגדיר את n_k להיות האינדקס הראשון $n_k > n_{k-1}$ שמקיים $\left|\langle x_{n_k}, x_{n_j} \rangle\right| < 1/k$ עבור $j = 1, \ldots, k-1$.

כעת נשים לב כי מתקיים,
$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} \right\|^2 &= \frac{1}{N^2}\left[\sum_{k=1}^N \|x_k\|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_{1\le j<k\le N} \langle x_{n_k}, x_{n_j} \rangle\right] \\ &\le \frac{1}{N^2}\left[NM^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{N-1}{N}\right)\right] \\ &< \frac{1}{N^2}\left(NM^2 + N - 1\right) \end{aligned}$$
וברור כי ביטוי זה שואף לאפס כאשר $N \to \infty$, כנדרש. ■

למה: אם $C \subset \mathbf{H}$ קבוצה קמורה וסגורה, אז היא סגורה להתכנסות חלשה.

הוכחה: תהי $(x_n) \subset C$ סדרה המקיימת $x_n \xrightarrow{w} x$ לאיזה $x \in \mathbf{H}$. נראה כי $x \in C$. נזכור כי הראינו שקיימת תת סדרה $(x_{n_k}) \subset C$ שעבורה $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} \to x$. מהיות C קמורה נובע כי $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N}x_{n_k} \in C$, ולכן x הוא גבול של סדרת איברים מ-C, ולכן מסגירות C נובע $x \in C$. ■

6 רציפות למחצה

הגדרה: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט. העתקה $f:\mathbf{H}\to\mathbb{R}$ נקראת **רציפה למחצה מלמטה** (LSC - Lower Semi Continuous), אם לכל $x_0\in\mathbf{H}$, לכל סדרה $(x_n)\subset\mathbf{H}$ המקיימת $x_n\to x_0$, מתקיים,

$$f\left(x_0\right)\leq\liminf_{n\to\infty}f\left(x_n\right)$$

דוגמה: הפונקציה המציינת $1_A:\mathbf{H}\to\mathbb{R}$ היא LSC אם ורק אם $A\subset\mathbf{H}$ קבוצה פתוחה.

הגדרה: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט. העתקה $f:\mathbf{H}\to\mathbb{R}$ נקראת **קמורה**, אם לכל $x,y\in\mathbf{H}$ ולכל $t\in[0,1]$, מתקיים $f\left(tx+(1-t)\,y\right)\leq tf\left(x\right)+(1-t)\,f\left(y\right)$.

דוגמה: $x\mapsto\|x\|$ היא פונקציה קמורה מאי שוויון המשולש. למעשה גם $x\mapsto\|x\|^p$ קמורה לכל $p\geq1$, שכן באופן כללי $t\mapsto t^p$ היא קמורה עבור $p\geq1$.

טענה: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט. תהי $C\subset\mathbf{H}$ קבוצה קמורה, סגורה וחסומה, ותהי $f:C\to\mathbb{R}$ קמורה ו-LSC על C. אם f חסומה מלרע ב-C אז היא מקבלת מינימום ב-C.

הוכחה: נסמן $m=\inf_{x\in C}f\left(x\right)$, ונקבע סדרה $(x_n)\subset C$ המתכנסת $f\left(x_n\right)\to m$. נתון כי C חסומה ולכן (x_n) סדרה חסומה, ואם כך מטענה קודמת יש לה תת סדרה $\left(x_{n_k}\right)$ מתכנסת חלש $x_{n_k}\xrightarrow{w}x_0$, ומטענה קודמת נובע כי $x_0\in C$. לפי טענה קודמת קיימת תת תת סדרה $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ המקיימת $y_N:=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_{n_{k_j}}\to x_0$.

מהנתון ש־f קמורה נובע $f\left(y_N\right)\leq\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f\left(x_{n_{k_j}}\right)$, ולכן אם ניקח גבול, מרציפות ומהנתון כי f LSC נובע,

$$f\left(x_0\right)\leq\liminf_{N\to\infty}f\left(y_N\right)\leq\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f\left(x_{n_{k_j}}\right)$$

נשים לב כי $f\left(x_{n_{k_j}}\right)\to m$. אבל ידוע כי בהתכנסות ממשית, אם $t_n\to t$ אז $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}t_n\to t$, ולכן נובע כי $f\left(x_0\right)\leq m$.

מצד שני $x_0\in C$ ולכן $m=\inf_{x\in C}f\left(x\right)\leq f\left(x_0\right)$, ולכן בסך הכל $f\left(x_0\right)=m$, כנדרש. ■

חלק V
קירובים של פונקציות

7 משפט סטון־ויירשטראס

סימון: אם X,Y מרחבים מטריים כלשהם, נסמן ב-$C\left(X,Y\right)$ את אוסף הפונקציות הרציפות $X\to Y$.

תזכורת: (**משפט הקירוב של ויירשטראס**) כל פונקציה של $C\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$ ניתנת לקירוב במידה שווה על ידי פולינומים. במילים אחרות, אם $\mathcal{A}$ היא משפחת כל הפולינומים מהצורה $\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$, אז $\overline{\mathcal{A}}=C\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$, כאשר הסגור הוא ביחס לנורמת הסופרימום של $L^{\infty}\left(\left[0,1\right]\right)$.

משפט: (**משפט סטון־ויירשטראס**) יהי K מרחב מטרי קומפקטי ותהי $\mathcal{A}\subset C\left(K,\mathbb{R}\right)$ אלגברה (כלומר קבוצה הסגורה לחיבור וכפל נקודתיים). אזי $\mathcal{A}$ צפופה ב-$C\left(K,\mathbb{R}\right)$ ביחס לנורמת הסופרימום, אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $1\in\mathcal{A}$ (כאשר 1 היא הפונקציה הקבועה 1).
2. **הפרדת נקודות:** לכל זוג נקודות $x,y\in K$, אם $x\neq y$ אז קיימת $f\in A$ כך ש־$f\left(x\right)\neq f\left(y\right)$.

הערה: (**גרסה מרוכבת של המשפט**) המשפט תקף גם עבור $C\left(K,\mathbb{C}\right)$, אם $\mathcal{A}$ בנוסף גם סגורה להצמדה מרוכבת.

הוכחה: נניח ללא הגבלת הכלליות כי $\mathcal{A}$ קבוצה סגורה (אחרת נדון ב-$\mathcal{B}=\overline{\mathcal{A}}$, וזו גם אלגברה שמכילה את 1 ומפרידה נקודות).

1. תחילה נראה כי $\mathcal{A}$ היא סגורה סריגית. כלומר, אם $f,g\in\mathcal{A}$ אז $\max\left(f,g\right),\min\left(f,g\right)\in\mathcal{A}$.
לשם כך נשים לב שניתן לכתוב,
$$\max\left(f,g\right)=\frac{f+g}{2}+\frac{\left|f-g\right|}{2},\quad\min\left(f,g\right)=\frac{f+g}{2}-\frac{\left|f-g\right|}{2}$$
אם כך די להראות כי $\mathcal{A}$ סגורה תחת ערך מוחלט. כלומר, אם $f\in\mathcal{A}$ אז $\left|f\right|\in\mathcal{A}$.
תהי $f\in\mathcal{A}$. היא רציפה על קבוצה קומפקטית ולכן חסומה, אז נסמן $M=\left\Vert f\right\Vert_{\infty}$. נתבונן בפונקציה $g\left(t\right)=\left|t\right|$ כפונקציה $g:\left[-M,M\right]\to\mathbb{R}$. g רציפה, ולכן ממשפט ויירשטראס ניתן לקרב אותה על ידי פולינומים במידה שווה, $p_{n}\to g$, עבור $p_{n}:\left[-M,M\right]\to\mathbb{R}$ פולינומים. נשים לב כי $p_{n}\circ f$ הוא פולינום ב-f, ולכן מהיות $\mathcal{A}$ אלגברה נובע כי $p_{n}\circ f\in\mathcal{A}$. כמו כן מתקיים $p_{n}\circ f\to g\circ f=\left|f\right|$, אבל $\mathcal{A}$ סגורה ולכן נובע כי $\left|f\right|\in\mathcal{A}$.
2. כעת נוכיח את המשפט. תהי $f\in C\left(K,\mathbb{R}\right)$ ויהי $\epsilon>0$. נחפש $g\in\mathcal{A}$ שעבורה $\left\Vert g-f\right\Vert_{\infty}<\epsilon$.
לכל $s,t\in K$ שונים, נקבע $h\in\mathcal{A}$ שמפרידה אותן, $h\left(s\right)\neq h\left(t\right)$. נגדיר את הפונקציה $r\left(x\right)=a+\left(b-a\right)\frac{h(x)-h(t)}{h(s)-h(t)}$, ונשים לב כי $r\left(s\right)=b,\ r\left(t\right)=a$.
בפרט עבור $a=f\left(t\right),b=f\left(s\right)$, אם $s\neq t$ קיימת פונקציה $f_{s,t}\in\mathcal{A}$ שמקיימת $f_{s,t}\left(s\right)=f\left(s\right),f_{s,t}\left(t\right)=f\left(t\right)$, ואם $s=t$ אז נבחר את הפונקציה $f_{s,s}\in\mathcal{A}$ הקבועה $f_{s,s}=f\left(s\right)$.
נקבע $s\in K$. לכל $t\in K$ נגדיר,
$$U_{t}^{s}=\left\{x\in K\mid f_{s,t}\left(x\right)<f\left(x\right)+\epsilon\right\}$$
מתקיים כי $U_{t}^{s}=\left(f_{s,t}-f\right)^{-1}\left(\left(-\infty,\epsilon\right)\right)$ ולכן היא קבוצה פתוחה. כמו כן ברור כי $t\in U_{t}^{s}$ לכל $t\in K$, ולכן בסך הכל $\left\{U_{t}^{s}\right\}_{t\in K}$ הוא כיסוי פתוח של K, ומקומפקטיות יש לו תת כיסוי סופי שנסמן $\left\{U_{t_{i}}^{s}\right\}_{i=1}^{n}$.
אם כך לכל $s\in K$ נגדיר את הפונקציה $h_{s}=\min_{1\leq i\leq n}f_{s,t_{i}}$. מתקיים $f_{s,t_{i}}\in\mathcal{A}$ לכל i, ומסגירות סריגית של $\mathcal{A}$ נובע כי $h_{s}\in\mathcal{A}$ לכל $s\in K$. בנוסף נשים לב כי $h_{s}\left(s\right)=f\left(s\right)$, שכן $f_{s,t_{i}}\left(s\right)=f\left(s\right)$ לכל i. כמו כן נשים לב כי $h_{s}\left(x\right)<f\left(x\right)+\epsilon$, שכן $f_{s,t_{i}}\left(x\right)<f\left(x\right)+\epsilon$ לכל i.

כעת, לכל $s \in K$ נגדיר,

$$V_s = \{x \in K \mid h_s(x) > f(x) - \epsilon\}$$

באופן דומה גם V_s קבוצה פתוחה. כמו כן ברור כי $s \in V_s$ לכל $s \in K$, ולכן בסך הכל $\{V_s\}_{s\in K}$ הוא כיסוי פתוח של K, ומקומפקטיות יש לו תת כיסוי סופי שנסמן $\{V_{s_j}\}_{j=1}^{m}$.

נגדיר לבסוף $g = \max_{1\le j\le m} h_{s_j}$. מתקיים $h_{s_j} \in \mathcal{A}$ לכל j, ומסגירות סריגית של $\mathcal{A}$ נובע כי $g \in \mathcal{A}$. ואכן, נשים לב כי לכל $x \in K$,

$$f(x) - \epsilon < g < f(x) + \epsilon$$

כנדרש. ■

מסקנה: נראה כיצד נובעת הגרסה המרוכבת של המשפט. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה המכילה את 1, מפרידה נקודות וסגורה להצמדה מרוכבת.

בהינתן $f \in C(K,\mathbb{C})$, נכתוב $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$ עבור $\mathrm{Re}f = \frac{f+\overline{f}}{2} \in \mathcal{A}$ ועבור $\mathrm{Im}f = \frac{f-\overline{f}}{2i} \in \mathcal{A}$.

יהי $\mathcal{B}$ אוסף הפונקציות הממשיות של $\mathcal{A}$. לא קשה לראות כי $\mathcal{B}$ היא אלגברה מעל $\mathbb{R}$, שמכילה את 1 ומפרידה נקודות. לכן מהגרסה הממשית של המשפט נובע כי $\overline{\mathcal{B}} = C(K,\mathbb{R})$.

נשים לב כי $C(K,\mathbb{C}) = C(K,\mathbb{R}) + iC(K,\mathbb{R})$, ולכן נובע כי יש $g_1, g_2 \in C(K,\mathbb{R})$ המקרבות במידה שווה את $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$, ולכן $g_1 + ig_2$ מקרבות במידה שווה את $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$.

דוגמאות:

1. אוסף הפונקציות מהצורה $a_0 + \sum_n (a_n \cos 2\pi nt + b_n \sin 2\pi nt)$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$ ואיזשהם $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, צפוף ב-$L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (אבל לא ב-$[0,1]$, כי אין הפרדת נקודות).
2. אוסף הצירופים הלינאריים של פונקציות מהצורה $e^{2\pi int}$ עבור כל $n \in \mathbb{Z}$, צפוף ב-$L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (אבל לא ב-$[0,1]$, כי אין הפרדת נקודות).

   נובע מכך כי אוסף זה הוא בסיס אורתונורמלי של $L^2([0,1])$, שכן הוא צפוף בתת המרחב של $L^2([0,1])$ של הפונקציות שמקבלות את אותם הערכים על קצוות הקטע $[0,1]$, ולא קשה לראות כי תת מרחב זה צפוף ב-$L^2([0,1])$.
3. אוסף המונומים $1, x, x^2, \ldots$ המנורמלים ב-$L^2([0,1])$, הוא בסיס אורתונורמלי.
4. אם X, Y מרחבים מטריים קומפקטיים, אז כל $f \in C(X\times Y, \mathbf{F})$ ניתן לקרב על ידי פונקציות מהצורה $\sum f_i \overline{g}_i$, כאשר $f_i \in C(X,\mathbf{F}),\ g_i \in C(Y,\mathbf{F})$, שכן $\{f_i g_i\}$ היא אלגברה של $C(X\times Y, \mathbf{F})$ המפרידה נקודות ומכילה את 1.
5. אם X מרחב מטרי קומפקטי, אז $C(X,\mathbf{F})$ מרחב ספרבילי.

הוכחה: נקבע $(x_i) \subset X$ צפופה. מהלמה של אוריסון, לכל n, m יש פונקציה רציפה $\psi_{n,m} : X \to \mathbf{F}$ המקיימת $\psi_{n,m}\mid_{X\setminus B_{2/m}(x_n)} = 0$, $\psi_{n,m}\mid_{B_{1/m}(x_n)} = 1$. לכן האוסף $\Psi = \{\psi_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ מפריד נקודות, ולכן האלגברה הנוצרת על ידי $\Psi \cup \{1\}$ היא מפרידת נקודות וכמובן מכילה את 1, ולכן צפופה ב-$C(X,\mathbf{F})$ (במקרה המרוכב, היא נוצרת גם להכיל הצמדות). אם ניקח את האלגברה הזו להיווצר על ידי מקדמים רציונליים בלבד, נקבל קבוצה ספרבילית צפופה ב-$C(X,\mathbf{F})$.

8 טורי פורייה

מבוא: נסמן $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. ראינו על ידי משפט סטון־ויירשטראס כי האוסף $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ הוא בסיס אורתונורמלי של $L^2(\mathbb{T})$. כמו כן **מקדמי פורייה** של פונקציה $f \in L^2(\mathbb{T})$ הם האיברים,

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\, e^{2\pi int} dt$$

על ידי שוויון פרסבל נובע כי מתקיימים הדברים הבאים,

1. $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}=\int_{\mathbb{T}}\left|f\right|^{2}$
2. $\left\langle f,g\right\rangle =\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$
3. $f\left(x\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(n\right)e^{2\pi int}$, כאשר שוויון זה הוא התכנסות ב-$L^{2}\left(\mathbb{T}\right)$.

אם כך ניתן להגדיר העתקה $F:L^{2}\left(\mathbb{T}\right)\to l^{2}\left(\mathbb{Z}\right)$ על ידי $F\left(f\right)=\left(\hat{f}\left(n\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, והעתקה זו מוגדרת היטב כי $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}$ מתכנס, כפי שנובע משוויון פרסבל.

נשים לב עוד כי הראינו שכל $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ היא גבול במידה שווה של $\left\{ e^{2\pi int}\right\} _{n\in\mathbb{Z}}$ מהצורה $\sum a_{n}e^{2\pi int}\to f\left(t\right)$ במידה שווה. עם זאת חשוב לשים לב כי המקדמים a_{n} אינם בהכרח מקדמי פורייה.

8.1 התכנסות במידה שווה של טור פורייה

למה: תהי $f\in L^{2}\left(\mathbb{T}\right)$. לכל N נסמן $S_{N}f\left(x\right)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}\left(n\right)e^{2\pi inx}$. אם $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$, אז $S_{N}f\left(x\right)\to f\left(x\right)$ במידה שווה.

הוכחה: נשים לב כי יש התכנסות במידה שווה מהצורה,

$$S_{N}f\left(x\right)=\frac{1}{N}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}\left(n\right)e^{2\pi inx}\to g\left(x\right)$$

לאיזו $g\in C\left(\mathbb{T}\right)$. אבל נשים לב כי $S_{N}f\left(x\right)\to f\left(x\right)$ ב-$L^{2}\left(\mathbb{T}\right)$, ולכן בהכרח $f=g$. ■

הגדרה: פונקציה $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ נקראת **רציפה בהחלט**, אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל אוסף של קטעים $\left\{ I_{j}\right\} _{j}$, $I_{j}=\left[x_{j},y_{j}\right]$ שהם כולם זרים, אם מתקיים $\sum_{j}\left|I_{j}\right|=\sum_{j}\left(y_{j}-x_{j}\right)<\delta$, אז $\sum_{j}\left|f\left(y_{j}\right)-f\left(x_{j}\right)\right|<\epsilon$.

דוגמה: אם μ היא מידה כלשהי על $\left[0,1\right]$, אז מתקיים כי הפונקציה $f\left(x\right)=\mu\left(\left[0,x\right]\right)$ היא רציפה בהחלט אם ורק אם μ רציפה בהחלט ביחס למידת לבג λ.

תרגיל: אם $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט, אז היא גזירה כמעט תמיד ומתקיים $f'\in L^{1}$ (רמז: נגזרת רדון ניקודים).

טענה: אם $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ גזירה עם $f'\in L^{2}$, אזי $S_{N}f\left(x\right)\to f\left(x\right)$ במידה שווה.

הוכחה: מקדמי פורייה של f' הם על ידי אינטגרציה בחלקים,

$$\begin{aligned}\hat{f'}\left(n\right) & = \int_{0}^{1}f'\left(x\right)e^{2\pi inx}dx\\
 & = f\left(x\right)e^{2\pi inx}\mid_{0}^{1}-\int_{0}^{1}f\left(x\right)\left(-2\pi ine^{2\pi inx}\right)dx\\
 & = 0+2\pi ni\int_{0}^{1}f\left(x\right)e^{2\pi inx}dx=2\pi in\hat{f}\left(n\right)
\end{aligned}$$

ונקבל כי,

$$\left|\hat{f'}\left(n\right)\right|=2\pi n\left|\hat{f}\left(n\right)\right|$$

ומכאן נובע,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi n}\left|\hat{f'}\left(n\right)\right|\leq\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^{2}}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f'}\left(n\right)\right|^{2}\right)^{1/2}$$

כאשר אי השוויון במרכז הוא מאי שוויון הולדר.

נשים לב כי משוויון פרסבל נובע כי $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f'}\left(n\right)\right|^{2}<\infty$, וכן ברור כי $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^{2}}<\infty$, ומכאן כי $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$.
מהלמה נובע כי כי $S_{N}f\left(x\right)\to f\left(x\right)$ במידה שווה, כנדרש. ■

מסקנה: אם $f\in L^{2}\left(\mathbb{T}\right)$ גזירה ברציפות, אז בפרט $f'\in L^{2}\left(\mathbb{T}\right)$, ולכן $S_{N}f\left(x\right)\to f\left(x\right)$ במידה שווה.

8.2 גרעין דיריכלה וגרעין פייר

תזכורת: עבור $f,g\in L^{1}\left(\mathbb{C}\right)$, **הקונבולוציה** שלהן היא פונקציה המוגדרת על ידי,

$$f*g\left(x\right)=\int f\left(t\right)g\left(x-t\right)dt$$

נשים לב כי אם $f,g\in L^{2}\left(\mathbb{C}\right)$ אז $f*g\in L^{1}\left(\mathbb{C}\right)$, שכן לפי אי שוויון קושי שוורץ,

$$\left|\left\langle fg,fg\right\rangle \right|=\int\left|fg\right|^{2}=\left\langle f,g\right\rangle _{2}\leq\left\Vert f\right\Vert _{2}\left\Vert g\right\Vert _{2}<\infty$$

הגדרה: במרחב $L^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ (נסמן $\mathbb{T}={}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}$), לכל $f\in L^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ נסמן את סכום פורייה ה-N שלה ביחס לבסיס האורתונורמלי $\left\{ e^{2\pi inx}\right\} _{n\in\mathbb{Z}}$,

$$S_{N}f\left(x\right)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}\left(n\right)e^{2\pi inx}$$

גרעין דיריכלה ה-N הוא הפונקציה $D_{N}\in L^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ המקיימת את התכונה שלכל $f\in L^{1}\left(\mathbb{T}\right)$,

$$S_{N}f=f*D_{N}$$

באופן מפורש, גרעין דיריכלה הוא הפונקציה,

$$D_{N}\left(x\right)=\sum_{n=-N}^{N}e^{2\pi inx}$$

שכן,

$$\begin{aligned}S_{N}f\left(x\right) & = & \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}\left(n\right)e^{2\pi inx}=\sum_{n=-N}^{N}\left\langle f\left(x\right),e^{2\pi inx}\right\rangle \\
 & = & \sum_{n=-N}^{N}\left(\int_{\mathbb{T}}f\left(t\right)e^{-2\pi int}dt\right)e^{2\pi inx}=\int_{\mathbb{T}}f\left(t\right)\left(\sum_{n=-N}^{N}e^{2\pi in\left(x-t\right)}\right)dt\\
 & = & \int_{\mathbb{T}}f\left(t\right)D_{N}\left(x-t\right)dt=f*D_{N}\left(x\right)
\end{aligned}$$

טענה: על ידי חישוב ישיר באמצעות נוסחת הסכום של טור גאומטרי, ניתן להראות כי מתקיים זהותית,

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x} = \frac{e^{-2\pi i (N+1/2)x} - e^{2\pi i (N+1/2)x}}{e^{-\pi i x} - e^{\pi i x}} \\ &= \frac{\sin 2\pi (N + 1/2) x}{\sin \pi x} \end{aligned}$$

טענה: ניתן להראות כי,

$$\|D_N\|_1 \geq c \cdot \log N$$

עבור $c \in \mathbb{R}$ קבוע שאינו תלוי ב-N.

טענה: קיימת פונקציה $f \in C(\mathbb{T})$, שעבורה $S_N f$ לא מתכנס ל-f במידה שווה.

הוכחה: נתבונן בהעתקה $S_N : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ כאופרטור רציף. נשים לב כי אילו היה $S_N f \to f$ במידה שווה לכל $f \in C(\mathbb{T})$, אז היה $\|S_N\|_\infty = \sup_N \|S_N f\|_1 < \infty$ לכל $f \in C(\mathbb{T})$.

מצד שני, נשים לב כי $S_N f(x) = f * D_N(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t) D_N(x-t)\, dt$ לכל $f \in L^1(\mathbb{T})$, אז מספיק למצוא $f \in C(\mathbb{T})$ כזאת שהכפל בה יוביל לנרמול כך שנקבל $\|S_N f\| = \|D_N\|_1 \geq c \cdot \log N$.

משפט: **(עקרון הלוקליזציה)** יהיו $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. אם לאיזה $x_0 \in \mathbb{T}$ קיימת סביבה שעליה $f = g$, אזי מתקיים,

$$S_N f(x_0) - S_N g(x_0) \to 0\,, \quad N \to \infty$$

[נשים לב כי סביבה של $x_0 = 0$ בתוך $\mathbb{T}$, היא מהצורה $(0,\epsilon) \cup (2\pi - \epsilon, 2\pi)$].

הוכחה: נחשב,

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - S_N g(x_0) &= \int_{\mathbb{T}} \left(f(x_0 - x) - g(x_0 - x)\right) D_N(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x_0 - x) - g(x_0 - x)}{\sin \pi x} \sin\left(2\pi (N + 1/2) x\right) dx \end{aligned}$$

נשים לב כי מההנחה במשפט נובע כי בסביבה של $x = 0$, מתקיים $h(x) := \frac{f(x - x_0) - g(x - x_0)}{\sin \pi x} = 0$ זהותית, ולכן $h(x) \in L^1(\mathbb{T})$ (שכן מחוץ לסביבת x_0, נתון כבר כי $f, g \in L^1(\mathbb{T})$).

כעת על ידי הלמה של רימן־לבג ניתן להסיק כי,

$$\int_{\mathbb{T}} h(x) \cos 2\pi N x \to 0\,, \quad N \to \infty$$

$$\int_{\mathbb{T}} h(x) \sin 2\pi N x \to 0\,, \quad N \to \infty$$

(ניתן להרחיב את הלמה של רימן־לבג מ-L^2 ל-L^1 משיקולי קירוב ומהיות $e^{2\pi i n x}$ פונקציות חסומות).

לכן גם $S_N f(x_0) - S_N g(x_0) \to 0$ כאשר $N \to \infty$. ■

משפט: (הקריטריון של דיני) תהי $f \in L^1(\mathbb{T})$ ותהי $x_0 \in \mathbb{T}$. אם קיים מספר A שעבורו מתקיים,

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2} - A \right| \frac{1}{x} dx < \infty$$

אזי,

$$\lim_{N \to \infty} S_N f(x_0) = A$$

הערה: במקרה ש־f גזירה, הקריטריון מתקיים עבור $A = f(x_0)$.

הוכחה: נחשב,

$$\begin{aligned}
S_N f(x_0) - A &= \int_{\mathbb{T}} (f(x_0 - x) - A) D_N(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{T}} (f(x_0 - x) - A) D_N(x)\, dx + \int_{\mathbb{T}} (f(x_0 - x) - A) D_N(x)\, dx\right] \\
(*) &= \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{T}} (f(x_0 - x) - A) D_N(x)\, dx + \int_{\mathbb{T}} (f(x_0 + x) - A) D_N(x)\, dx\right] \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2} - A\right) D_N(x)\, dx
\end{aligned}$$

כאשר המעבר $(*)$ הוא שינוי משתנה $x \mapsto -x$, ושימוש בעובדה כי D_N פונקציה זוגית.

כעת נשים לב כי מההנחה נובע $\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}\frac{1}{x} \in L^1(\mathbb{T})$, וכמו כן נשים לב כי $\frac{x}{\sin \pi x} \in L^1(\mathbb{T})$ פונקציה חסומה, ולכן נובע כי,

$$\left(\frac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2} - A\right) \cdot \frac{x}{\sin \pi x} \cdot \frac{1}{x} \in L^1(\mathbb{T})$$

אם כך ההתכנסות לאפס של הביטוי המבוקש נובעת מהלמה של רימן־לבג. ■

הגדרה: נגדיר אופרטור $C_N : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ לכל N, להיות הממוצע ה־N של סכומי פורייה,

$$C_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_N f$$

גרעין פייר ה־N הוא הפונקציה $F_N \in L^1(\mathbb{T})$ המקיימת את התכונה שלכל $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$C_N f = f * F_N$$

באופן מפורש, גרעין פייר הוא הפונקציה,

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} D_n$$

שכן,

$$\begin{aligned} C_N f &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_N f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f * D_N \\ &= f * \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n = f * F_N \end{aligned}$$

טענה: **(תכונות גרעין פייר)**

1. לפי חישוב ישיר ניתן לראות כי,

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \pi N x}{\sin \pi x}\right)^2$$

2. ברור כי $\int_{\mathbb{T}} D_N = 1$, ולכן גם $\int_{\mathbb{T}} F_N = 1$.
3. $F_N \geq 0$
4. לכל $\epsilon > 0$,

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} F_N(x)\,dx \to 0\,, \quad N \to \infty$$

(מסעיף 1 ושימוש בכך שמחוץ לסביבה של אפס הפונקציה $\frac{\sin \pi N x}{\sin \pi x}$ חסומה).

משפט: **(משפט פייר)** לכל $f \in C(\mathbb{T})$, מתקיים $C_N f \to f$ במידה שווה.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. נתון כי f רציפה במידה שווה ($\mathbb{T}$ קומפקטי), ולכן יש $\delta > 0$ עם $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ לכל $d(x,y) < \delta$ (כאשר d היא המטריקה המושרית על $\mathbb{T}$). אז מתקיים, לכל $t \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} |C_N f(t) - f(t)| &= |f * F_N(t) - f(t)| = \left|\int_{\mathbb{T}} (f(x) - f(t)) F_N(t-x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{d(x,t)<\delta} (f(x) - f(t)) F_N(t-x)\,dx + \int_{d(x,t)\geq\delta} (f(x) - f(t)) F_N(t-x)\,dx\right| \\ &\leq \int_{d(x,t)<\delta} |f(x) - f(t)| F_N(t-x)\,dx + \int_{d(x,t)\geq\delta} |f(x) - f(t)| F_N(t-x)\,dx \\ &\leq \epsilon \cdot 1 + 2\|f\|_\infty \cdot \int_{d(x,t)\geq\delta} F_N(t-x)\,dx \end{aligned}$$

אבל מתכונה 4 נובע כי הביטוי $\int_{d(x,t)\geq\delta} F_N(t-x)\,dx$ קטן כרצוננו עבור N מספיק גדול, ולכן קיבלנו חסם במידה שווה, כנדרש. ■

הערה: ניתן להראות שלכל $f \in L^2(\mathbb{T})$ מתקיים $S_N f \to f$ נקודתית כמעט תמיד. זה **משפט קרלסון** שקשה להוכחה. מנגד, קיימת $f \in L^1(\mathbb{T})$ שעבורה $S_N f$ לא מתכנס ל-f באף נקודה.

9 טרנספורם פורייה

הגדרה: לכל $d>0$, נגדיר אופרטור $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\to C\left(\mathbb{R}^d\right)$, $f\mapsto\hat{f}$, כאשר,

$$\hat{f}\left(\xi\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}f\left(x\right)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}dx$$

טענה:

1. $\hat{f}$ רציפה על $\mathbb{R}^d$ (ממשפט ההתכנסות החסומה).
2. טרנספורם פורייה הוא אופרטור לינארי.
3. $\left\|\hat{f}\right\|_\infty\leq\|f\|_1$

טענה: תהי $f\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. לכל $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq0$,

$$f\widehat{\left(\lambda x+\mu\right)}\left(\xi\right)=\frac{e^{\frac{1}{\lambda}2\pi i\langle\mu,\xi\rangle}}{\lambda}\cdot\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

הוכחה: נחשב,

$$\begin{aligned}
f\widehat{\left(\lambda x+\mu\right)}\left(\xi\right) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}f\left(\lambda x+\mu\right)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}dx\\
{\scriptstyle (y:=\lambda x+\mu)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}f\left(y\right)e^{-2\pi i\left\langle\xi,\frac{y-\mu}{\lambda}\right\rangle}dy=e^{2\pi i\left\langle\xi,\frac{\mu}{\lambda}\right\rangle}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^d}f\left(y\right)e^{-2\pi i\left\langle\frac{\xi}{\lambda},y\right\rangle}dy\\
&= e^{2\pi i\left\langle\xi,\frac{\mu}{\lambda}\right\rangle}\cdot\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

כנדרש. ■

טענה: תהי $f\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. אם מתקיים כי $xf\left(x\right)\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, אזי $\hat{f}$ גזירה ומקיימת,

$$\hat{f}'\left(\xi\right)=-\widehat{ixf\left(x\right)}\left(\xi\right)$$

הוכחה: נשים לב כי,

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{f}\left(\xi+h\right)-\hat{f}\left(\xi\right)}{h} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}f\left(x\right)\left(\frac{e^{-2\pi i\langle\xi+h,x\rangle}-e^{-2\pi ix\xi}}{h}\right)dx\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d}f\left(x\right)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}\cdot\left(\frac{e^{-2\pi ihx}-1}{h}\right)dx
\end{aligned}$$

נשים לב כי מנוסחת הנגזרת של האקספוננט בנקודה 0,

$$\frac{e^{-2\pi ihx}-1}{h}\to-2\pi ix\,,\quad h\downarrow0$$

נותר רק לשים לב כי $\left|\frac{e^{-2\pi ihx}-1}{h}\right|\leq c\left|x\right|$ ולכן מההנחה כי $xf\left(x\right)\in L^{1}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ נובע כי האינטגרנד חסום, ולכן על ידי משפט ההתכנסות החסומה נשאיף $h\downarrow0$ ונקבל,

$$\frac{\hat{f}\left(\xi+h\right)-\hat{f}\left(\xi\right)}{h}\to-2\pi i\int\limits_{\mathbb{R}^{d}}xf\left(x\right)e^{-2\pi i\left\langle \xi,x\right\rangle }dx=-2\pi i\cdot\widehat{xf\left(x\right)}\left(\xi\right)$$

כנדרש. ■

טענה: (**הלמה של רימן־לבג לטרנספורם פורייה**) לכל $f\in L^{1}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$, $\lim_{\left|\xi\right|\to\infty}\hat{f}\left(\xi\right)=0$.

הוכחה: נוכיח עבור $d=1$, וההכללה תהיה קלה. נניח תחילה כי $f=1_{\left[a,b\right]}$ פונקציה מציינת של קטע. אזי,

$$\left|\hat{f}\left(\xi\right)\right|=\left|\int\limits_{a}^{b}e^{-2\pi i\xi x}dx\right|=\left|\frac{e^{-2\pi i\xi b}-e^{-2\pi i\xi a}}{2\pi\xi}\right|\leq\frac{1}{\pi\left|\xi\right|}\to0\,,\quad\left|\xi\right|\to\infty$$

קל להסיק את הטענה עבור פונקציות פשוטות (צירופים לינאריים של פונקציות מציינות של קטעים).

כעת תהי $f\in L^{1}\left(\mathbb{R}\right)$ כלשהי. יהי $\epsilon>0$. נקבע פונקציה פשוטה g המקיימת $\left\Vert f-g\right\Vert _{1}<\epsilon$, ונשים לב כי מלינאריות טרנספורם פורייה,

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}\left(\xi\right)\right| & \leq\left|\widehat{f-g}\left(\xi\right)-\hat{g}\left(\xi\right)\right|\leq\left|\widehat{f-g}\left(\xi\right)\right|+\left|\hat{g}\left(\xi\right)\right|\\
 & \leq\left\Vert \widehat{f-g}\left(\xi\right)\right\Vert _{\infty}+\left|\hat{g}\left(\xi\right)\right|\leq\left\Vert \widehat{f-g}\right\Vert _{1}+\left|\hat{g}\left(\xi\right)\right|<\epsilon+\left|\hat{g}\left(\xi\right)\right|
\end{aligned}$$

מהיות g פשוטה נובע $\left|\hat{g}\left(\xi\right)\right|\to0$ כאשר $\left|\xi\right|\to\infty$. אבל $\epsilon>0$ שרירותי, ולכן $\left|\hat{f}\left(\xi\right)\right|\to0$ כאשר $\left|\xi\right|\to\infty$. ■

טענה: אם f רציפה בהחלט (ובמקרה זה יודעים כי $f'\in L^{1}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ וכי $f\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}f'\left(t\right)dt$, כפי שהזכרנו לעיל), אזי,

$$\hat{f}'\left(\xi\right)=2\pi i\xi\hat{f}\left(\xi\right)$$

הערה: נתבונן בדיאגרמה הבאה של האופרטורים טרנספורם פורייה והגזירה,

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "F"'] & \frac{d}{dx}f \arrow[d] \\
\hat{f} \arrow[r, "\times2\pi i\xi"'] & \widehat{\frac{d}{dx}f}
\end{tikzcd}$$

משמעות הטענה אחרונה היא כי האופרטורים הללו מתחלפים עד כדי כפל בסקלר $2\pi i\xi$.

טענה: **(שוויון פרסבל לטרנספורם פורייה)** אם $f\in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ בעלת תומך סופי, אז מתקיים,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$$

הערה: שוויון פרסבל בגרסתו עבור $\mathbb{T}$ אומר כי $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}=\left\|\hat{f}\right\|_{l^2(\mathbb{Z})}$ עבור $\hat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ מקדמי פורייה. בגרסתו זו השוויון אומר כי $\|f\|_2=\left\|\hat{f}\right\|_2$ עבור $\hat{f}$ טרנספורם פורייה.

הוכחה: נוכיח עבור $d=1$. נניח ללא הגבלת הכלליות כי התומך של f הוא הקטע $[0,1]$. נקבע $t\in[0,1]$ ונקבל כי,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1|f(x)|^2\,dx &= \int\limits_0^1\left|f(x)\,e^{-2\pi intx}\right|dx\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f(x)\,e^{-2}}\pi itx\,(n)\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int\limits_0^1 f(x)\,e^{-2\pi itx}e^{-2\pi inx}dx\right|^2\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^1\left|f(x)\,e^{-2\pi i(n+t)x}\right|^2dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n+t)\right|^2
\end{aligned}$$

כאשר השוויון בשורה השנייה הוא משוויון פרסבל הכללי (שהזכרנו בהערה).

אבל זה נכון לכל $t\in[0,1]$, ולכן נובע כי,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1|f(x)|^2\,dx &= \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1|f(x)|^2\,dx\right)dt\\
&= =\int\limits_0^1\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n+t)\right|^2\right)dt=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2d\xi
\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון הוא ממשפט ההתכנסות החסומה. ■

משפט: קיים אופרטור לינארי רציף ויחיד $\mathbf{F}:L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\to L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ שהוא איזומטריה, ומרחיב את טרנספורם פורייה על $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

הוכחה: נוכיח עבור $d=1$. לכל $f\in L^2(\mathbb{R})$ נגדיר $f_n=f\cdot 1_{[-n,n]}$. כל f_n היא בעלת תומך סופי ולכן $f_n\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, ולפי טענה קודמת מתקיים $\int_{\mathbb{R}}|f_n|^2=\int_{\mathbb{R}}\left|\hat{f}_n\right|^2$.

נשים לב כי $(f_n)\subset L^2(\mathbb{R})$ סדרת קושי (כי היא מתכנסת נקודתית ל-f, וגם ב-$L^2(\mathbb{R})$), ולכן נובע כי $\left(\hat{f}_n\right)\subset L^2(\mathbb{R})$ סדרת קושי (משוויון הנורמות עבור f_n-f_m), ולכן יש לה גבול. אז נגדיר גבול זה להיות $\mathbf{F}f$.

נשים לב כי עבור $f\in L^1(\mathbb{R})$ מתקיים $\hat{f}_n(\xi)\to\hat{f}(\xi)$ נקודתית, שכן $f_n\to f$ ב-$L^1(\mathbb{R})$, ולכן $\mathbf{F}f$ היא טרנספורם פורייה של f.

כמו כן נשים לב כי מהצפיפות של $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ בתוך $L^1(\mathbb{R})$ נובעת היחידות של $\mathbf{F}$. ■

10 פונקציות שוורץ

הגדרה: תהי $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ מדידה. נאמר כי f **דועכת מהר** (יותר מכל פולינום), אם $|x|^n f(x)$ פונקציה חסומה לכל $n\geq 0$.

הגדרה: פונקציה חלקה $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ נקראת **פונקציית שוורץ**, אם היא וכל נגזרותיה החלקיות דועכות מהר. נסמן את אוסף כל פונקציות שוורץ על ידי $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

דוגמאות:

1. כל פונקציה חלקה עם תומך קומפקטית היא שוורץ.
2. גאוסיאנים הם שוורץ. כלומר פונקציות $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ מהצורה,

$$g(x)=z_0\cdot e^{2\pi i\langle\xi_0,x\rangle}\cdot e^{-\frac{\pi}{r^2}\|x-\xi_0\|_d^2}$$

עבור פרמטרים קבועים $\xi_0\in\mathbb{R}^d$, $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$.

הגדרה: נגדיר על המרחב $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ **סמי-נורמות**, עבור כל $\vec{k}\in\mathbb{Z}^n, s\in\mathbb{Z}$,

$$\|f\|_{\vec{k},s}=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left\{|x|^s\cdot\left|\partial_{\vec{k}}f(x)\right|\right\}$$

טענה:

1. האופרטורים הלינאריים $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\times\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\to\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ של סכום, כפל וקונבולוציה, הם רציפים.
2. טרנספורם פורייה $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\to\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ הוא אופרטור רציף.
3. $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ הוא תת מרחב צפוף של $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$, לכל $p\geq 1$ (לפי משפט סטון־ויירשטראס).

הגדרה: נגדיר אופרטור $\mathbf{F}^*:\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\to\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ על ידי,

$$f(x)\mapsto\mathbf{F}^*f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(\xi)\,e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}d\xi$$

טענה:

1. מתקיים $\mathbf{F}^*f=\overline{\mathbf{F}\overline{f}}$ (כאשר $\mathbf{F}$ אופרטור טרנספורם פורייה).
2. לכל $f,g\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$,

$$\langle\mathbf{F}f,g\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\,e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}\overline{g}(x)\,dx=\langle f,\mathbf{F}^*g\rangle$$

3. לכל $f,g\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$,

$$\mathbf{F}^*\mathbf{F}(f*g)=f*\mathbf{F}^*\mathbf{F}g$$

4. נתבונן בפונקציית שוורץ $g_r(x)=\frac{1}{r^d}e^{-\frac{\pi}{r^2}\|x\|_d^2}$, עבורה ידוע כי $\int_{\mathbb{R}^d}g_r=1$. אז מתקיים,

$$\mathbf{F}g_r(\xi)=e^{-\pi r^2\|\xi\|_d^2}$$

ולכן ניתן להסיק כי,

$$\mathbf{F}^*\mathbf{F}g_r=g_r$$

כלומר כל g_r היא נקודת שבת של $\mathbf{F}^*\mathbf{F}$.

הוכחה: נחשב עבור $r=1,d=1$, כלומר $g_1=e^{-\pi|x|^2}$. אז מתקיים,

$$\mathbf{F}g_1(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\pi|x|^2}e^{-2\pi ix\xi}dx=e^{-\pi\xi^2}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx$$

נותר להראות כי $\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi(x+i\xi)^2}=1$. לשם כך נשתמש במשפט קושי לאינטגרל על מסילות סגורות, ונטנגרל את $e^{-\pi|x|^2}$ לאורך הריבוע שקודקודיו הם $\{-R,R,-R-i\xi,R+i\xi\}\subset\mathbb{C}$.

נסמן את ערכי האינטגרלים לאורך הריבוע עם כיוון השעון I_1,I_2,I_3,I_4, כאשר ידוע כי $I_1\to\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi|x|^2}dx$ כאשר $R\to\infty$. ממשפט קושי ידוע כי $I_1+I_2-I_3+I_4=0$ (ניקח את I_3 באותו הכיוון של I_1).

ידוע כי $I_3=\int_{-R}^{R}e^{-\pi|x|^2}dx\to 1$ כאשר $R\to\infty$. עוד נשים לב כי $I_2,I_4\to 0$ כאשר $R\to\infty$, שכן מתקיים,

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_0^{\xi}e^{-\pi(R+ix)^2}dx\right| &= \left|e^{-\pi R^2}\int\limits_0^{\xi}e^{2\pi Rxi}e^{|x|^2}dx\right|\\ &\le \left|e^{-\pi R^2}\right||\xi|\to 0\,,\ \ R\to\infty\end{aligned}$$

ולכן נובע כי $I_1=1$, כנדרש. ■

5. לכל $f\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ מתקיים,

$$\mathbf{F}^*\mathbf{F}(f*g_r)=f*\mathbf{F}^*\mathbf{F}g_r=f*g_r$$

כלומר נובע כי כל $f*g_r$ נקודת שבת של $\mathbf{F}^*\mathbf{F}$.

6. **למה:** $f*g_r\to f$ כאשר $r\downarrow 0$, בטופולוגיית שוורץ.

הוכחה: נחשב עבור $d=1$. יהי $\epsilon>0$, ונבחר $\delta>0$ שעבורו על $B_\delta(0)$ מתקיים $|f(x-t)-f(x)|<\epsilon$. אם כך נובע כי,

$$\begin{aligned}|f*g_r(x)-f(x)| &= \left|\int f(x-t)g_r(t)\,dt-\int f(x)g_r(t)\,dt\right|\\ &= \left|\int(f(x-t)-f(x))g_r(t)\,dt\right|\le\int|f(x-t)-f(x)|g_r(t)\,dt\\ &= \int\limits_{B_\delta(0)}|f(x-t)-f(x)|g_r(t)\,dt+\int\limits_{B_\delta(0)^c}|f(x-t)-f(x)|g_r(t)\,dt\end{aligned}$$

המחובר הראשון חסום על ידי,

$$\epsilon\cdot\int g_r(t)\,dt=\epsilon$$

לגבי המחובר השני, נשים לב כי היות ש־g_r דועכת מהר, אז כאשר $r \downarrow 0$ מתקיים $\int_{B_\delta(0)} g_r(t)\,dt < \epsilon$. כמו כן נשים לב כי f שוורץ ולכן חסומה במידה שווה, כלומר $|f(x-t) - f(x)| \le M$ לאיזה קבוע $M > 0$. מכאן קל לראות שגם המחובר השני קטן כרצוננו. ■

7. **טענה:** כל פונקציות שוורץ הן נקודות שבת של $\mathbf{F}^*\mathbf{F}$. כלומר, כל פונקציית שוורץ ניתנת לשחזור על ידי $\mathbf{F}\mathbf{F}^*\mathbf{F}$. דהיינו, מתקיים נקודתית לכל $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

הוכחה: ניתן להשתמש בעובדות הבאות: לכל $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ מתקיים,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) * g$$

$$x_j \cdot (f * g) = (x_j f) * g + f * (x_j g)$$

כאשר x_j היא פונקציית הקואורדינטה ה־j, ל-$1 \le j \le d$.

8. **מסקנה:** היות שפונקציות שוורץ צפופות בכל מרחב L^p, אם f כלשהי מקיימת $\hat{f} \in L^1$, אז מתקיים,

$$f(x) \overset{L^1}{=} \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

10.1 סכימת פואסון

הגדרה: נסמן $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. תהי $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. נגדיר $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ על ידי $F(x + \mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$. זה מתכנס היות ש־$f$ שוורץ.

טענה:

1. מתקיים $\hat{F}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ לכל $\xi \in \mathbb{R}$ (כאשר אלה מקדמי פורייה של הפונקציות).
2. מתקיים $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

הוכחה:

1. נחשב,

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{T}} F(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\right) e^{-2\pi i \xi (x+n)} dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x+n) e^{-2\pi i \xi (x+n)} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

2. נשים לב כי F מחזורית על $\mathbb{T}$, והיא גזירה ולכן רציפה בהחלט, וכמו כן $F' \in L^1$, ומכאן כי טור פורייה שלה מתכנס נקודתית בכל מקום, ובפרט מתקיים,

$$F(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x)$$

אבל מצד שני, לכל x,

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi inx}$$

נציב $x = 0$ ונקבל את הנדרש. ■

מסקנה: נתבונן בפונקציה $g(xt) = f(x)$, ונקבל כי כפי שראינו לעיל עבור טרנספורם פורייה תחת טרנספורמציה לינארית,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(nt) = \frac{1}{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}\left(\frac{n}{t}\right)$$

בפרט עבור הפונקציה,

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi in^2 t}$$

נובע כי,

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

בפונקציה זו משתמשים כדי להרחיב את פונקציית זטא של רימן, $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$, המוגדרת באופן נאיבי רק על $|s| > 1$, לכל המישור המרוכב.

חלק VI

מרחבי בנך

תזכורת: מרחב בנך הוא מרחב נורמי שלם.

משפט: לכל מרחב נורמי יש **מרחב השלמה**. כלומר, אם $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי, אז קיים מרחב בנך $\left(\tilde{V}, \tilde{\|\cdot\|}\right)$ יחד עם איזומטריה $T : V \to \tilde{V}$, כך שמתקיים כי $T(V)$ צפופה בתוך $\tilde{V}$.

הוכחה: מבצעים השלמה של V כמרחב מטרי, ומוודאים שהנורמה מתיישבת.

תזכורת:

1. **אי שוויון יאנג:** יהי $p > 1$. אם p, q מקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, אז לכל $x, y \in \mathbb{C}$,
$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

2. **אי שוויון הולדר:** יהי $p > 1$. אם p, q מקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, אז לכל זוג סדרות $(x_i), (y_i) \subset \mathbb{C}$,
$$\sum_i |x_i y_i| \leq \|(x_i)\|_p \cdot \|(y_i)\|_q$$

3. **אי שוויון מינקובסקי:** לכל $p \geq 1$, לכל $x, y \in \mathbb{C}^n$
$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

דוגמה: עבור כל $n \geq 1$, $\mathbb{C}^n$ הוא מרחב בנך ביחס לנורמה $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, לכל $1 \leq p \leq \infty$.

הגדרה: לכל קבוצה S, נגדיר $\mathbf{B}(S) = \{f : S \to \mathbb{C} \mid f \text{ is bounded}\}$. זה מרחב וקטורי על ידי חיבור נקודתי וכפל בסקלר נקודתי. נגדיר נורמה על ידי $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$.

טענה: לכל קבוצה S, $\mathbf{B}(S)$ הוא מרחב בנך.

הוכחה: תהי $(f_n) \subset \mathbf{B}(S)$ סדרת קושי. לכל $x \in S$ מתקיים $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in S} |f_n(x) - f_m(x)| = d(f_n, f_m)$, ולכן נובע כי $(f_n(x)) \subset \mathbb{C}$ סדרת קושי לכל $x \in S$.

ידוע כי $\mathbb{C}$ מרחב שלם, ולכן קיים גבול שנסמן $\lim_n f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C}$. נרצה להראות כי $\sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty \to 0$.

יהי $\epsilon > 0$. מהיות (f_n) סדרת קושי נובע שקיים N כך שלכל $n, m > N$ מתקיים $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$. נתבונן רק ב-$n, m > N$. לכל n כזה, לכל $x \in S$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \epsilon + |f_m(x) - f(x)| \end{aligned}$$

וזאת לכל $m > N$, ללא תלות ב-x. נבחר m מספיק גדול כך שמתקיים $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$, ונקבל כי הביטוי כולו קטן מ-2ϵ ללא תלות ב-x, כנדרש. ■

הגדרה: יהי K מרחב מטרי האוסדורף קומפקטי. נתבונן במרחב $\mathbf{C}(K)=\{f:K\to\mathbb{C}\mid f\text{ is continuous}\}$, ונשים לב כי מקומפקטיות נובע כי $\mathbf{C}(K)$ תת מרחב של $\mathbf{B}(K)$.

ניתן עוד לשים לב כי $\mathbf{C}(K)$ תת מרחב סגור של $\mathbf{B}(K)$, ולכן גם הוא מרחב בנך.

טענה: עבור K מרחב מטרי האוסדורף קומפקטי, $\mathbf{C}(K)$ ספרבילי אם ורק אם K מטריזבילי.

הוכחה: אם K מטריזבילי, אז אם $(k_n)\subset K$ סדרה צפופה, נגדיר את סדרת הפונקציות $f_{n,m}(k)=1_{\{d(k,k_n)<1/m\}}$ (ניתן גם להשתמש בלמה של אוריסון), ולקבל שהפולינומים במקדמים רציונליים בפונקציות אלה מהווים אלגברה בת מניה מפרידת נקודות, וממשפט סטון־ויירשטראס נובע כי הם צפופים ב-$\mathbf{C}(K)$, ולכן $\mathbf{C}(K)$ ספרבילי.

אם $\mathbf{C}(K)$ ספרבילי, אז נקבע $(g_i)\subset\mathbf{C}(K)$ צפופה ונסמן $\mathrm{Im}g_i=[-M_i,M_i]$, ונגדיר העתקה $\varphi:K\to\prod_i[-M_i,M_i]$ על ידי $\varphi(x)=(g_i(x))$. נשים לב כי (g_i) מפרידות נקודות (כי $\overline{(g_i)}=\mathbf{C}(K)$), ולכן φ העתקה חח"ע. בנוסף, φ רציפה בטופולוגיית המכפלה, כפונקציה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף, ולכן היא אפילו הומאומורפיזם על התמונה שלה. אם כך נוכל להגדיר מטריקה על $\prod_i[-M_i,M_i]$,

$$d(x,y)=\sum_i\frac{1}{M_i2^i}\left|g_i(x)-g_i(y)\right|$$

וניתן לוודא כי זו מטריקה. ■

הגדרה: יהיו X,Y מרחבים נורמיים. נגדיר $\mathbf{B}(X,Y)=\{T:X\to Y\mid T\text{ is linear and bounded}\}$, זה מרחב וקטורי על ידי חיבור נקודתי וכפל בסקלר נקודתי, $(\alpha T+\beta S)(x)=\alpha Tx+\beta Sx$. נגדיר עליו את הנורמה האופרטורית, כלומר $\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$ (כאשר $\|x\|$ היא הנורמה ב-X, $\|Tx\|$ היא הנורמה ב-Y).

טענה: יהי X מרחב נורמי ויהי Y מרחב בנך, אזי $\mathbf{B}(X,Y)$ מרחב בנך (נשים לב כי זו הכללה של הטענה הקודמת עבור $\mathbf{B}(X)=\mathbf{B}(X,\mathbb{C})$).

מסקנה: מטענה זו נובע כי $X^*=\mathbf{B}(X,\mathbb{C})=\mathbf{B}(X)$ (מרחב הפונקציונלים הלינאריים החסומים), הוא מרחב בנך לכל מרחב נורמי X.

הוכחה: תהי $(T_n)\subset\mathbf{B}(X,Y)$ סדרת קושי. לכל $0\neq x\in X$ מתקיים מלינאריות,

$$\frac{1}{\|x\|}\cdot\|T_nx-T_mx\|\le\sup_{u\neq0}\frac{1}{\|u\|}\cdot\|T_nu-T_mu\|=\sup_{\|u\|=1}\|T_nu-T_mu\|=\|T_n-T_m\|_\infty$$

ונובע כי $\|T_nx-T_ny\|\le\|T_n-T_m\|_\infty\cdot\|x\|$. ברור שגם ב-$x=0$ מתקבלת סדרת קושי, ולכן $(T_nx)\subset Y$ סדרת קושי לכל $x\in X$.

מההנחה כי Y מרחב בנך נובע שקיים גבול שנסמן $\lim_nT_nx=Tx\in Y$. תחילה מהיות T_n לינאריות נובע כי T לינארית. נרצה להראות כי $\sup_{x\in X}\|T_nx-Tx\|=\|T_n-T\|_\infty\to0$, ונשים לב שמכך גם ינבע מידית כי $\|T\|_\infty<\infty$, שכן $\|T\|_\infty\le\|T_n-T\|_\infty+\|T_n\|_\infty$.

יהי $\epsilon>0$. מהיות (T_n) סדרת קושי נובע שקיים N כך שלכל $n,m>N$ מתקיים $\|T_n-T_m\|_\infty<\epsilon$. נתבונן רק ב-$n,m>N$. לכל n כזה, לכל $x\in X$,

$$\begin{aligned}|T_nx-Tx|&\le|T_nx-T_mx|+|T_mx-Tx|\\&<\epsilon+|T_mx-Tx|\end{aligned}$$

וזאת לכל $m>N$, ללא תלות ב-x. נבחר m מספיק גדול כך שמתקיים $|T_mx-Tx|<\epsilon$, ונקבל כי הביטוי כולו קטן מ-2ϵ ללא תלות ב-x, כנדרש. ■

11 מרחבי L^p, l^p

דוגמה: נתבונן במרחב $\{(a_i) \subset \mathbb{C} \mid a_i = 0 \text{ a.e.}\}$. לכל $1 \le p \le \infty$ זהו מרחב נורמי ביחס לנורמה $\|(a_i)\|_p = \left(\sum_i |a_i|^p\right)^{1/p}$, כאשר אם $p = \infty$ הנורמה היא $\|(a_i)\|_\infty = \sup_i |a_i|$.
מרחב זה אינו בנך, ומרחב ההשלמה שלו הוא,

$$l^p(\mathbb{N}) = \left\{(a_i) \subset \mathbb{C} \mid \sum_i |a_i|^p < \infty\right\}$$

טענה: המרחב $l^p(\mathbb{N})$ הוא ספרבילי עבור $1 \le p < \infty$, אבל לא ספרבילי עבור $p = \infty$.

הוכחה: עבור $1 \le p < \infty$, אוסף הסדרות הסופיות במקדמים רציונליים מהווה קבוצה צפופה.
עבור $p = \infty$, נתבונן בתת המרחב $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset l^\infty(\mathbb{N})$. נשים לב כי לכל $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, אם $x \ne y$ אז $d(x,y) = 1$.
כעת, אם הייתה קבוצה בת מניה צפופה (x^n) (כאשר $x^n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ סדרה), אז לכל $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ הייתה סדרה <u>ייחודית</u> x^n המקיימת $d(x^n, x) < 1/2$. אבל $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ אינה בת מניה, ומתקבלת סתירה. ■

דוגמה: אם $(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב מידה סופי, אז לכל $1 \le p \le \infty$,

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) = \left\{f : X \to \mathbb{C} \mid \int |f|^p \, d\mu < \infty\right\}$$

הוא מרחב בנך ביחס לנורמה $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$, כאשר אם $p = \infty$ הנורמה היא $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$.

טענה: יהי $1 \le p < \infty$. אם p, q מקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

1. יש איזומורפיזם של מרחבים מטריים $l^{p*}(\mathbb{N}) \cong l^q(\mathbb{N})$.
2. יש איזומורפיזם של מרחבים מטריים $L^{p*}(X, \mathcal{B}, \mu) \cong L^q(X, \mathcal{B}, \mu)$, לכל מרחב מידה סיגמא־סופי $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

הוכחה: נוכיח עבור $p > 1$, ונשאיר כתרגיל את המקרה $p = 1$ (כלומר $q = \infty$).

1. נשים לב שיש העתקה טבעית $\tau : l^q \to l^{p*}$, המוגדרת על ידי כך שלכל $\mathbf{y} = (y_i) \in l^q$ נתאים את הפונקציונל $\tau(\mathbf{y})$, המוגדר על ידי $\tau(\mathbf{y})(\mathbf{x}) = \sum_i x_i y_i$ לכל $\mathbf{x} = (x_i) \in l^p$. נשים לב כי,

$$|\tau(\mathbf{y})(\mathbf{x})| \le \sum_i |x_i| |y_i| \le \|\mathbf{x}\|_p \cdot \|\mathbf{y}\|_q$$

כאשר אי השוויון השני הוא מאי שוויון הולדר. לא קשה לראות כי τ אופרטור לינארי, וכמו כן $\tau \in l^{q*}$, שכן הנורמה האופרטורית שלו מקיימת שוב לפי אי שוויון הולדר,

$$\|\tau(\mathbf{y})\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \left(\sum |x_i y_i|^p\right)^{1/p} \le \|\mathbf{y}\|_q < \infty$$

נראה כי τ העתקה על, וכי היא איזומטריה. מכך ינבע כי היא גם חח"ע.

- נראה כי τ על. יהי $\varphi \in l^{p*}$ אופרטור לינארי חסום. נסמן e_i להיות וקטור האפס בכל מקום, למעט בקואורדינטה ה־i שם הוא 1. נתבונן באיבר $\mathbf{y} = (y_i)$ המוגדר על ידי $y_i = \varphi(e_i)$. נראה כי $\mathbf{y} \in l^q$ וכי $\tau(\mathbf{y}) = \varphi$.

- נראה תחילה כי $\mathbf{y} \in l^q$. לכל n, נגדיר סדרה $\left(x_k^n\right)_k$ על ידי,

$$x_k^n = 1_{\{k \leq n\}} \cdot |y_k|^{q-1} \cdot e^{-i \arg y_k}$$

נשים לב כי מההנחה נובע $p\left(q-1\right) = q$, ולכן נקבל,

$$\|x^n\|_p = \left(\sum_{k=1}^n \left(|y_k|^{q-1}\right)^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/p}$$

מצד שני מתקיים,

$$\varphi\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot |y_k|^{q-1} \cdot e^{-i \arg y_k} = \sum_{k=1}^n |y_k|^q$$

כעת מההנחה $\varphi \in l^{p*}$ נובע כי,

$$\left|\varphi\left(x^n\right)\right| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|x^n\|_p = \|\varphi\|_\infty \cdot \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/p}$$

ולכן נקבל כי לכל n,

$$\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1-1/p} \leq \|\varphi\|_\infty$$

לכן כאשר $n \to \infty$ נקבל $\|\mathbf{y}\|_q \leq \|\varphi\|_\infty < \infty$, כלומר $\mathbf{y} \in l^q$.

- נראה כעת כי $\tau\left(\mathbf{y}\right) = \varphi$. יהי $\mathbf{x} = \left(x_i\right) \in l^p$. אזי,

$$\left\|\mathbf{x} - \sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|_p = \left\|\sum_{i=n+1}^\infty x_i e_i\right\| \to 0\,, \quad n \to \infty$$

ולכן מרציפות ולינאריות φ נובע כי,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\mathbf{x}\right) &= \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i \varphi\left(e_i\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \tau\left(\mathbf{y}\right)\left(\mathbf{x}\right)\end{aligned}$$

- נראה כי τ איזומטריה. הראינו בראשית ההוכחה שלכל $\mathbf{y} \in l^q$, $\|\tau\left(\mathbf{y}\right)\|_\infty \leq \|\mathbf{y}\|_q$. מצד שני עבור הפונקציונל $\varphi = \tau\left(\mathbf{y}\right)$ הראינו שמתקיים $\|\mathbf{y}\|_q \leq \|\varphi\|_\infty = \|\tau\left(\mathbf{y}\right)\|$, ולכן $\|\tau\left(\mathbf{y}\right)\|_\infty = \|\mathbf{y}\|_q$, כנדרש.

2. נוכיח עבור מרחב מידה סופי, ונשאיר כתרגיל את ההכללה למרחב מידה סיגמא־סופי. נגדיר העתקה $\varphi_g : L^p \to L^{q*}$ על ידי כך שלכל $g \in L^p$ נתאים את הפונקציונל φ_g המוגדר על ידי $\varphi_g f = \int f g d\mu$.

לא קשה לראות כי φ_g פונקציונל לינארי, וכן מאי שוויון הולדר,

$$\|\varphi_g f\|_\infty \leq \int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q < \infty$$

ולכן $\varphi_g \in L^{p*}$.

נראה כי φ העתקה על, וכי היא איזומטריה. מכך ינבע כי היא גם חח"ע.

- נראה כי φ על. תהי $\varphi \in L^{p*}$. לצורך הפשטות נניח כי φ פונקציונל חיובי וממשי, ונשאיר כתרגיל להראות כיצד להכליל. נגדיר מידה חדשה על $\mathcal{B}$ על ידי $\nu(E) = \varphi(1_E)$. נשים לב כי $\nu \ll \mu$ (רציפות בהחלט), כי אם $\mu(E) = 0$, כלומר $1_E = 0$ כמעט תמיד ביחס ל-μ, אז מלינאריות φ נובע כי $\varphi(1_E) = \varphi(1_E + 0) = 2\varphi(1_E)$, ולכן $\nu(E) = \varphi(1_E) = 0$.
אם כך ממשפט רדון ניקודים יש נגזרת $g = \frac{d\mu}{d\nu} \in L^1$, כך שמתקיים $\nu(E) = \int_X g1_E d\mu = \int_E g d\mu$. נשים לב כי לכל $E \in \mathcal{B}$,

$$\varphi_g 1_E = \int g1_E d\mu = \int\limits_E g d\mu = \nu(E) = \varphi(1_E)$$

ומרציפות φ נובע כי שוויון זה מתקיים לא רק לפונקציות מציינות אלא לכל $f \in L^p$. נותר להראות כי $g \in L^q$.
תחילה, מצד אחד ידוע כי לכל $f \in L^p$,

$$\|\varphi_g f\| = |\varphi f| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_p$$

מצד שני, נגדיר לכל N, $f_N = (\min(g,N))^{q-1} \in L^p$ (כי f_N חסומה), והיות ש־$p(q-1) = q$ נקבל,

$$\begin{aligned}\|f_N\|_p &= \left(\int |f_N|^p\right)^{1/p} = \left(\int |\min(g,N)|^q\right)^{1-1/q} \\ &= \|\min(g,N)\|_q^{q-1} \leq |\varphi_g f_N| \cdot \|\min(g,N)\|^{1-1/q}\end{aligned}$$

כאשר אי השוויון האחרון הוא כי,

$$\varphi_g f_N = \int \min(g,N)^{q-1} g d\mu \geq \int \min(g,N)^q d\mu = \|\min(g,N)\|_q^q$$

אם כך נובע משני הצדדים כי,

$$\|f_N\|_p \leq |\varphi_g f_N| \cdot \|\min(g,N)\|^{1-1/q} \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f_N\|_p \cdot \|\min(g,N)\|_q^{1-1/q} < \infty$$

אבל $f_N \to g$ נקודתית מונוטונית, ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי אם נשאיף $N \to \infty$, $\|g\|_q < \infty$.
- את העובדה שזו איזומטריה נשאיר כתרגיל. ■

12 משפט החסימות במידה שווה (בנך שטיינהאוס)

משפט: יהי X מרחב בנך ותהי $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ משפחה של מרחבים נורמיים, עם משפחת העתקות $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $T_\alpha \in \mathbf{B}(X, Y_\alpha)$.
נניח כי $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ חסומה נקודתית במידה שווה על α, כלומר לכל $x \in X$ יש $M = M(x)$ שעבורו $\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < M$.[5] אזי מתקיים $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$.[6]

הוכחה: לכל $n \geq 1$ נגדיר $F_n = \{x \in X \mid \forall_{\alpha \in A}, \|T_\alpha x\| \leq n\}$. נשים לב כי כל F_n היא חיתוך של כל הקבוצות $F_{n,\alpha} = \{x \in X \mid \|T_\alpha x\| \leq n\}$, ולכל n, α, $F_{n,\alpha}$ סגורה מרציפות T_α, ולכן F_n סגורה. כמו כן מההנחה על החסימות הנקודתית נובע כי $X = \bigcup_n F_n$. אם כך ממשפט הקטגוריה של בייר נובע שיש n_0 כך ש־$F_{n_0}^o$ (הפנים) לא ריק. כלומר יש $x_0 \in F_{n_0}$ עם רדיוס $\rho > 0$ כך ש־$B_\rho(x_0) \subset F_{n_0}^o$.

[5] כאשר לכל α, $\|T_\alpha x\|$ היא הנורמה של Y_α.
[6] כאשר לכל α, $\|T_\alpha\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_\alpha x\|$, עבור $\|T_\alpha x\|$ הנורמה של Y_α.

מהגדרת F_{n_0} נובע שלכל $x \in B_\rho(x_0)$ מתקיים $\|T_\alpha x\| \leq n_0$ לכל $\alpha \in A$. נשים לב שלכל $0 \neq x \in X$ מתקיים $x_0 + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in B_\rho(x_0)$, ולכן נובע על ידי לינאריות T_α,

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2\|x\|}\|T_\alpha x\| &= \left\|T_\alpha\left(x_0 + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) - T_\alpha x_0\right\| \\ &\leq \left\|T_\alpha\left(x_0 + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| + \|T_\alpha x_0\| \leq 2n_0 \end{aligned}$$

כלומר מצאנו שלכל $x \in X$,

$$\frac{\|T_\alpha x\|}{\|x\|} \leq \frac{4n_0}{\rho}$$

ולכן עבור הסופרימום מתקיים,

$$\sup_\alpha \|T_\alpha\| \leq \frac{4n_0}{\rho}$$

כנדרש. ■

מסקנה: אם X, Y מרחבי בנך, אז סדרה $(T_n) \subset \mathbf{B}(X,Y)$ מתכנסת נקודתית לכל $x \in X$, אם ורק אם T_n מתכנסת על קבוצה צפופה וגם $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

הוכחה: בכיוון ראשון, אם $(T_n x)$ מתכנסת לכל $x \in X$, אז ודאי שהיא מתכנסת על קבוצה צפופה. כמו כן מכך שהיא מתכנסת לכל $x \in X$ נובע כי היא חסומה נקודתית לכל $x \in X$ במידה שווה על n, ולכן מההנחה כי X מרחב בנך נובע ממשפט החסימות במידה שווה כי $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

בכיוון שני, נסמן $M = \sup_n \|T_n\|$. יהי $\epsilon > 0$, אז לכל $x \in X$ נראה כי $(T_n x)$ סדרת קושי, וזה מספיק לפי ההנחה כי Y מרחב בנך.

יהי $x \in X$. נקבע $x' \in X$ המקיים $\|x - x'\| < \epsilon$ כך שעבורו $(T_n x')$ מתכנסת. כעת נובע כי,

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x - T_n x'\| + \|T_n x' - T_m x'\| + \|T_m x - T_m x'\| \\ &\leq \|T_n\|\|x - x'\| + \|(T_n - T_m)x'\| + \|T_m\|\|x - x'\| \end{aligned}$$

המחובר הראשון והשלישי חסומים כל אחד על ידי $M\epsilon$. נבחר n, m מספיק גדולים ביחס ל-x', ונקבל כי גם $\|(T_n - T_m)x'\| < \epsilon$, ובסך הכל נקבל כי הביטוי חסום על ידי $2M\epsilon + \epsilon$, כנדרש. ■

מסקנה: לכל $x_0 \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, יש $f \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$ שטור פורייה שלה לא מתכנס ב-x_0.

הוכחה: תהי $x_0 \in \mathbb{T}$. נתבונן באופרטורים $\mathcal{E}_n : \mathbf{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ המוגדרים $\mathcal{E}_n f = S_N f(x_0) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0}$, כאשר $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{2\pi i n t} dt$ מקדם פורייה ה־n. אלה אופרטורים לינאריים רציפים, כלומר $\mathcal{E}_n \in \mathbf{C}^*(\mathbb{T})$.

לו הייתה התכנסות של $S_N f(x_0)$ לכל $f \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$, מהמסקנה הקודמת היה נובע כי $\sup_n \|\mathcal{E}_n\| < \infty$. אבל ניתן להראות שמתקיים $\|\mathcal{E}_n\| \geq c \log n$ עבור c שאינו תלוי ב-n, ולכן נקבל סתירה. ■

13 תבניות בילינאריות

הגדרה: יהי X מרחב וקטורי. העתקה $\mathbf{B} : X \times X \to \mathbb{C}$ תיקרא **תבנית בילינארית**, אם היא לינארית בכל אחת מהקואורדינטות שלה. כלומר, לכל $x, y, z \in X$ ולכל $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\mathbf{B}(ax + by, z) = a\mathbf{B}(x,z) + b\mathbf{B}(y,z)$$

$$\mathbf{B}(x, ay+bz) = \overline{a}\mathbf{B}(x,y) + \overline{b}\mathbf{B}(x,z)$$

הגדרה: נאמר כי תבנית בילינארית $\mathbf{B}$ במרחב בנך X היא **חסומה**, אם קיים קבוע $M > 0$ כך שלכל $x, y \in X$,

$$\|\mathbf{B}(x,y)\| \leq M \|x\| \|y\|$$

במקרה זה, נאמר כי הנורמה של $\mathbf{B}$ היא $\|\mathbf{B}\|_{\text{op}} = \inf_{x,y \in X \setminus \{0\}} \frac{|\mathbf{B}(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$.

טענה: יהי X מרחב בנך ותהי $\mathbf{B}$ תבנית בילינארית עליו. אם $\mathbf{B}(x,\cdot), \mathbf{B}(\cdot,y) : X \to \mathbb{C}$ חסומות, אז $\mathbf{B}$ חסומה (ורק אם).

הוכחה: נקבע $x \in X$. נתבונן בפונקציונל $y \mapsto \overline{\mathbf{B}(x,y)}$. מההנחה בטענה הוא חסום, כלומר $\left|\overline{\mathbf{B}}(x,y)\right| \leq M_x \|y\|$ עבור $M_x > 0$ קבוע שאינו תלוי ב-y.

נגדיר משפחה של פונקציונלים המאונדקסת על ידי $X \setminus \{0\}$, $\{F_y\}_{y \in X\setminus\{0\}}$, כאשר $F_y(x) = \frac{1}{\|y\|}\mathbf{B}(x,y)$. נשים לב כי,

$$|F_y(x)| = \frac{1}{\|y\|}|\mathbf{B}(x,y)| \leq \frac{1}{\|y\|}M_x\|y\| = M_x$$

ולכן נובע כי $\{F_y\}_{y \in X\setminus\{0\}}$ חסומה נקודתית במידה שווה על y, וממשפט החסימות במידה שווה נובע כי $\mathrm{s} := \sup_{y \in X\setminus\{0\}} \|F_y\| < \infty$, כלומר לכל פונקציונל F_y, לכל $x \in X \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|F_y(x)\|}{\|x\|} = \frac{|\mathbf{B}(x,y)|}{\|x\|\|y\|} \leq \mathrm{s}$$

כלומר $\|\mathbf{B}(x,y)\| < \infty$, כנדרש. $\blacksquare$

טענה: לכל תבנית בילינארית חסומה $\mathbf{B}$ על מרחב הילברט $\mathbf{H}$, קיים ויחיד אופרטור לינארי חסום $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ המקיים $\|T\|_{\text{op}} = \|\mathbf{B}\|_{\text{op}}$, כך שניתן להציג $\mathbf{B}(v,u) = \langle Tv, u\rangle$.

הוכחה: נגדיר את $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ באופן הבא: בהינתן $v \in \mathbf{H}$, נתבונן בפונקציונל הלינארי $F_v(u) = \overline{\mathbf{B}(v,u)}$. נשים לב כי,

$$|F_v(u)| = \left|\overline{\mathbf{B}}(v,u)\right| \leq \|\mathbf{B}\|_{\text{op}} \|v\| \|u\|$$

אבל v קבוע ביחס ל-F_v, ולכן F_v חסום. אם כך ממשפט ההצגה של ריס קיים $w \in \mathbf{H}$ יחיד המקיים $F_v(u) = \langle w, u\rangle$. אם כך נגדיר $Tv = w$.

לא קשה לבדוק את הלינאריות. כמו כן נשים לב כי לכל $v \in \mathbf{H}$ מתקיים,

$$\|Tv\|^2 = |\langle Tv, Tv\rangle| = |\mathbf{B}(v, Tv)| \leq \|\mathbf{B}\|_{\text{op}} \|v\| \|Tv\|$$

לכן נובע כי $\frac{\|Tv\|}{\|v\|} \leq \|\mathbf{B}\|_{\text{op}}$, כלומר $\|T\|_{\text{op}} \leq \|\mathbf{B}\|_{\text{op}}$. מצד שני,

$$|\mathbf{B}(v,u)| = |\langle Tv, u\rangle| \leq \|Tv\| \|u\|$$

לכן נובע כי $\frac{|\mathbf{B}(v,u)|}{\|v\|\|u\|} \leq \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \leq \|T\|_{\text{op}}$, כלומר $\|\mathbf{B}\|_{\text{op}} \leq \|T\|_{\text{op}}$, כנדרש. $\blacksquare$

הגדרה: נאמר כי תבנית בילינארית $\mathbf{B}$ במרחב בנך X היא **חסומה מלרע**, אם יש $\delta > 0$ שעבורו לכל $x \in X$, $|\mathbf{B}(x,x)| \geq \delta \|x\|^2$.

טענה: אם $\mathbf{B}$ תבנית בילינארית חסומה מלרע במרחב הילברט $\mathbf{H}$, אז קיים ויחיד אופרטור לינארי חסום והפיך $S:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, המקיים $\|\mathbf{B}\|_{\text{op}}=\left\|S^{-1}\right\|_{\text{op}}$ וגם $\|S\|_{\text{op}}\le {}^{1}/_{\delta}$, כך שניתן להציג $\langle v,u\rangle=\mathbf{B}\left(Sv,u\right)$.

הוכחה: מהטענה הקודמת נובע שיש $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ יחיד המקיימת $\|T\|_{\text{op}}=\|\mathbf{B}\|_{\text{op}}$, כך שמתקיים $\mathbf{B}\left(v,u\right)=\langle Tv,u\rangle$. נראה כי T חח"ע ועל.

- נראה כי T חח"ע: נשים לב כי,

$$\delta\left\|v\right\|^{2}\le\left|\mathbf{B}\left(v,v\right)\right|=\left|\langle Tv,v\rangle\right|\le\left\|Tv\right\|\left\|v\right\|$$

ולכן $\delta\left\|x\right\|\le\left\|Tx\right\|$, כלומר אם $Tx=0$ אז $x=0$, ונובע כי T חח"ע.

- נראה כי T על: נתבונן בתת המרחב הלינארי $\mathbf{V}=\text{Im}T\subset\mathbf{H}$. תחילה נשים לב כי זה תת מרחב סגור, שכן אם $Tv_{n}\to u$ בנורמה, אז מתקיים,

$$\delta\left\|v_{n}-v_{m}\right\|^{2}\le\left|\mathbf{B}\left(v_{n}-v_{m},v_{n}-v_{m}\right)\right|=\left|\langle T\left(v_{n}-v_{m}\right),v_{n}-v_{m}\rangle\right|\le\left\|Tv_{n}-Tv_{m}\right\|\left\|v_{n}-v_{m}\right\|$$

נחלק ב-$\left\|v_{n}-v_{m}\right\|$ ונקבל כי מהיות $\left(Tv_{n}-Tv_{m}\right)$ סדרת קושי נובע כי $\left(v_{n}-v_{m}\right)$ סדרת קושי ולכן מתכנסת לאיזה $v\in\mathbf{H}$. אבל מרציפות T נובע $Tv=u$, כלומר $u\in\mathbf{V}$.

כעת יהי $w\in\mathbf{V}^{\perp}$. כלומר $\langle Tv,w\rangle=0$ לכל $v\in\mathbf{H}$, ובפרט $\langle Tw,w\rangle=0$. אבל $\left|\langle Tw,w\rangle\right|\ge\delta\left\|v^{2}\right\|$, ולכן בהכרח $w=0$. כלומר מצאנו כי $\mathbf{V}^{\perp}=\{0\}$, ומסגירות $\mathbf{V}$ נובע כי $\mathbf{V}=\mathbf{H}$, כלומר T על.

אם כך נובע שקיים $S=T^{-1}$. נשים לב כי $\left\|STv\right\|=\left\|v\right\|\le {}^{1}/_{\delta}\left\|Tv\right\|$, ומהיות T על נובע כי $\|S\|_{\text{op}}\le {}^{1}/_{\delta}$. ■

הגדרה: זוג מרחבים נורמיים X,Y נקראים **איזומורפיים**, אם הם איזומורפיים כמרחבים טופולוגיים בטופולוגיה המושרית מהנורמה (הומאומורפיים). הם נקראים **איזומטריים**, אם ההומאומורפיזם הוא איזומטריה.

למה: זוג מרחבים נורמיים $\left(X,\left\|\cdot\right\|_{1}\right),\left(Y,\left\|\cdot\right\|_{2}\right)$ הם איזומורפיים, אם ורק אם קיימים קבועים $m,M>0$ עם איזומורפיזם $T:X\to Y$, כך שמתקיים לכל $x\in X$,

$$m\left\|x\right\|_{1}\le\left\|Tx\right\|_{2}\le M\left\|x\right\|_{1}$$

מסקנה: במקרה בו $X=Y$ ונתונות זוג נורמות על מרחב זה, הלמה מיתרגמת לכך שהנורמות הללו שקולות, כלומר משרות את אותה הטופולוגיה, אם ורק אם קיימים קבועים $m,M>0$ כנ"ל.

הוכחה: בכיוון ראשון, נניח כי $T:X\to Y$ איזומורפיזם. מהיות T רציפה נובע כי היא חסומה, כלומר $\left\|Tx\right\|_{2}\le M\left\|x\right\|_{1}$ לכל $x\in X$ לאיזה $M>0$. אבל גם T^{-1} רציפה ולכן חסומה, כלומר $\left\|T^{-1}y\right\|_{1}\le c\left\|y\right\|_{2}$ לכל $y\in Y$ לאיזה $c>0$. נבחר $m={}^{1}/_{c}$ ונקבל כי,

$$m\left\|x\right\|_{1}=m\left\|T^{-1}Tx\right\|\le m\cdot c\left\|Tx\right\|=\left\|Tx\right\|_{2}\le M\left\|x\right\|_{1}$$

בכיוון שני, תהי $T:X\to Y$ עם קבועים $m,M>0$ כנ"ל. מאי השוויון הימני נובע כי T חסומה, ומאי השוויון השמאלי נובע כי T חח"ע (אם $\left\|Tx\right\|_{2}\le m\left\|x\right\|_{1}$, אז $Tx=0$ רק עבור $x=0$). נשים לב כי לכל $y\in Y$, $\left\|T^{-1}y\right\|\le\frac{1}{m}\left\|y\right\|$, כלומר T^{-1} חסומה ולכן רציפה. ■

דוגמה: נציג דוגמה למרחבים נורמיים איזומורפיים, אך לא איזומטריים. נתבונן במרחבים הבאים,

$$C\left(\mathbb{N}\right)=\left\{\left(a_{1},a_{2},a_{3},\dots\right)\subset\mathbb{R}\mid\exists\lim_{n\to\infty}a_{n}\right\}\subset l^{\infty}\left(\mathbb{N}\right)$$

$$C_{0}\left(\mathbb{N}\right)=\left\{\left(a_{0},a_{1},a_{2},a_{3},\dots\right)\subset\mathbb{R}\mid\lim_{n\to\infty}a_{n}=0\right\}\subset l^{\infty}\left(\mathbb{N}\right)$$

נשים לב כי הוספנו באופן פורמלי קואורדינטה מיוחדת $n=0$ בתת המרחב $C_{0}\left(\mathbb{N}\right)$.

- נראה כי $C(\mathbb{N}) \cong C_0(\mathbb{N})$. נגדיר $T : C(\mathbb{N}) \to C_0(\mathbb{N})$ על ידי כך שאם $a = \lim_{n\to\infty} a_n$,

$$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a, a_1 - a, a_2 - a, a_3 - a, \dots)$$

לא קשה לראות כי T חח"ע. כמו כן T על, כי בהינתן $(a_0, a_1, a_2, \dots) \in C(\mathbb{N})$, נגדיר $b_n = a_n + a_0$ לכל $n \geq 1$, נשים לב כי $a_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$, ולכן נקבל כי,

$$T(b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_0, a_1 + a_0 - a_0, a_2 + a_0 - a_0) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

לבסוף נשים לב כי T רציפה, שכן היא חסומה,

$$\|T(a_1, a_2, \dots)\|_\infty \leq 2 \|(a_1, a_2, \dots)\|_\infty$$

- נראה כי $C(\mathbb{N}), C_0(\mathbb{N})$ אינם איזומטריים. לשם כך נשתמש באינווריאנט הבא:

הגדרה: תהי C קבוצה קמורה במרחב לינארי. נאמר כי $x \in C$ היא **נקודת קיצון**, אם לא ניתן להציג את x כצירוף לינארי לא טריוויאלי של איברים מ-C. כלומר, אם $x = ty + (1-t)z$ עבור $y, z \in C$, אזי בהכרח $t = 0$ או $t = 1$ (ואז $x = z$ או $x = y$, בהתאמה).

תרגיל: יהיו X, Y מרחבים נורמיים ותהי $T : X \to Y$ איזומטריה לינארית. אם $C \subset X$ קבוצה קמורה, אז לכל $x \in C$ נקודת קיצון, גם $Tx \in T(C)$ נקודת קיצון ($T(C)$ קבוצה קמורה ב-Y).

נתבונן בכדור היחידה של $C(\mathbb{N})$ שהוא קבוצה קמורה, ונשים לב כי למשל $(1, 1, 1, \dots)$ היא נקודת קיצון שלו.
מאידך, נראה כי בכדור היחידה של $C_0(\mathbb{N})$ אין אף נקודת קיצון. תהי $(a_0, a_1, a_2, \dots) \in C_0(\mathbb{N})$ בכדור היחידה, כלומר $\|(a_0, a_1, a_2)\|_\infty \leq 1$. מההנחה $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ נובע שיש N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n| < 1/2$. נסמן ב-e_N את הסדרה שהיא אפס בכל מקום למעט במקום ה־N ששם היא a_N, ונשים לב כי ניתן לכתוב כצירוף קמור לא טריוויאלי,

$$\begin{aligned}(a_0, a_1, a_2, \dots) &= \frac{1}{2}(a_0, a_1, a_2, \dots a_{N-1}, a_N + e_N, a_{N+1} + e_N, \dots) \\ &+ \frac{1}{2}(a_0, a_1, a_2, \dots a_{N-1}, a_N - e_N, a_{N+1} - e_N, \dots)\end{aligned}$$

וניתן לראות כי שתי הסדרות הללו בכדור היחידה.

סימון: למרחב נורמי X, נסמן ב־־X^* את מרחב הפונקציונלים הלינאריים החסומים $X \to \mathbb{C}$, עם הנורמה האופרטורית.

הגדרה: יהיו X, Y מרחבים נורמיים, ויהי $T : X \to Y$ אופרטור לינארי חסום. נגדיר $T^* : Y^* \to X^*$ על ידי $T^*\lambda = \lambda \circ T$.

למה: מתקיים תמיד $\|T^*\|_{\text{op}} \leq \|T\|_{\text{op}}$.

מסקנה: אם מרחבים נורמיים X, Y איזומורפיים או איזומטריים, אז X^*, Y^* איזומורפיים או איזומטריים, בהתאמה. במקרה זה מתקיים $\|T^*\|_{\text{op}} = \|T\|_{\text{op}}$.

מסקנה: ניתן להראות כי $l^1(\mathbb{N}), C_0(\mathbb{N})^*$ מרחבים איזומטריים, וכי $l^\infty(\mathbb{N}), l^1(\mathbb{N})^*$ מרחבים איזומטריים. מכאן כי המרחבים $C_0(\mathbb{N}), l^1(\mathbb{N})$ אינם אפילו איזומורפיים, כי אחרת היינו מקבלים כי $l^\infty(\mathbb{N}), l^1(\mathbb{N})$ איזומטריים, אבל זה לא ייתכן כי אחד מהם ספרבילי והאחר אינו ספרבילי.

טענה: אם X מרחב נורמי סוף ממדי, אז X, X^* איזומורפיים.

סקיצה להוכחה: מספיק לבדוק עבור X בנורמת l^2, כי כל הנורמות שקולות. עבור נורמת l^2 ניתן להשתמש במשפט ההצגה של ריס.

14 משפט האן בנך

משפט: יהי X מרחב נורמי ויהי $Y \subset X$ תת מרחב. אז כל פונקציונל לינארי רציף $\lambda \in Y^*$, ניתן להרחיב לפונקציונל לינארי רציף $\tilde{\lambda} \in X^*$, כך שמתקיים $\left\|\tilde{\lambda}\right\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}$.

הערה: נשים לב כי ברור שמתקיים $\left\|\tilde{\lambda}\right\|_{X^*} \geq \|\lambda\|_{Y^*}$, כי התחום של $\tilde{\lambda}$ מכיל את התחום של λ.

למה: (מרכזית) יהי X מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$, ותהי $\mathrm{p} : X \to \mathbb{R}$ העתקה המקיימת $\mathrm{p}(\alpha x) = \alpha \mathrm{p}(x)$ וכן $\mathrm{p}(x_1 + x_2) \leq \mathrm{p}(x_1) + \mathrm{p}(x_2)$.

יהי $Y \subset X$ תת מרחב, ויהי λ פונקציונל לינארי על Y (לאו דווקא רציף), המקיים $\lambda y \leq \mathrm{p}(y)$ לכל $y \in Y$. אזי ניתן להרחיב את λ לפונקציונל לינארי $\tilde{\lambda}$ על X, כך שמתקיים $\tilde{\lambda} x \leq \mathrm{p}(x)$ לכל $x \in X$.

מסקנה: נראה כיצד משפט האן בנך נובע מהלמה.

- תחילה נדון ב-X מרחב נורמי ממשי. יהי $Y \subset X$ תת מרחב ויהי $\lambda \in Y^*$. נתבונן בהעתקה $\mathrm{p} : X \to \mathbb{R}$ המוגדרת $\mathrm{p}(x) = \|\lambda\|_{\mathrm{op}} \|x\|$. מתקיים כי $|\lambda x| \leq \mathrm{p}(x)$ ובפרט $\lambda x \leq \mathrm{p}(x)$ לכל $x \in X$, ולכן p עומדת בתנאי הלמה עבור λ.

  אם כך יש פונקציונל לינארי $\tilde{\lambda}$ המרחיב את λ, כך שמתקיים גם $\tilde{\lambda} x \leq \mathrm{p}(x) = \|\lambda\|_{\mathrm{op}} \|x\|$, וגם,

  $$-\tilde{\lambda} x = \tilde{\lambda}(-x) \leq \mathrm{p}(-x) = \|\lambda\|_{\mathrm{op}} \|x\|$$

  כלומר $\left|\tilde{\lambda} x\right| \leq \|\lambda\|_{\mathrm{op}} \|x\|$, ולכן $\tilde{\lambda} \in X^*$.

- כעת נדון ב-X מרחב נורמי מרוכב. יהי $Y \subset X$. נסמן $X_{\mathbb{R}}$ כמרחב נורמי ממשי המושרה מ-X, על ידי הכפל הסקלרי של סקלרים ממשיים בלבד המושרה מהכפל הסקלרי המרוכב ב-X. ובאותו אופן $Y_{\mathbb{R}}$ הוא מרחב ממשי המושרה מ-Y.

  יהי $\lambda \in Y^*$. נכתוב $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ עבור $\lambda_1, \lambda_2 \in Y_{\mathbb{R}}^*$.

  - תחילה נשים לב שמצד אחד מלינאריות λ מתקיים לכל $y \in Y$,

    $$i\lambda y = \lambda(iy) = \lambda_1(iy) + i\lambda_2(iy)$$

    ומצד שני מהסימון $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ מתקיים לכל $y \in Y$,

    $$i\lambda y = i(\lambda_1 y + i\lambda y) = i\lambda_1 y - \lambda_2 y$$

    כלומר נובע כי לכל $y \in Y$,

    $$\lambda_2 y = -\lambda_1(iy)$$

  - שנית, נשים לב כי לכל $y \in Y$,

    $$|\lambda_1 x| \leq |\lambda x| \leq \|\lambda\|_{\mathrm{op}} \|x\| = \mathrm{p}(x)$$

    ואם נחשוב על אי שוויון זה ב-$Y_{\mathbb{R}}$, מהמקרה הממשי יש $\tilde{\lambda}_1 \in X_{\mathbb{R}}^*$ המרחיב את λ_1 ומקיים $\left\|\tilde{\lambda}_1\right\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \|\lambda_1\|_{Y_{\mathbb{R}}^*}$.

  - לבסוף, ניזכר בשוויון $\lambda_2 y = -\lambda_1(iy)$, ונקבל מוטיבציה להגדיר $\tilde{\lambda} \in X^*$ על ידי,

    $$\tilde{\lambda} x := \tilde{\lambda}_1 x - i\tilde{\lambda}_1(ix)$$

    נותר לוודא כי $\tilde{\lambda}$ לינארי, מרחיב את λ, חסום ומקיים $\left\|\tilde{\lambda}\right\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}$.

* נשים לב כי הלינאריות λ על $\mathbb{R}$ ברורה כי $\tilde{\lambda}_1 \in X_{\mathbb{R}}^*$. לכן די לבדוק כפל בסקלר i,

$$\tilde{\lambda}(ix) = \tilde{\lambda}_1(ix) - i\tilde{\lambda}_1(-x) = \tilde{\lambda}_1(ix) + i\tilde{\lambda}_1 x = i\tilde{\lambda}x$$

* כמו כן לכל $y \in Y$,

$$\tilde{\lambda}y = \tilde{\lambda}_1 y - i\tilde{\lambda}(iy) = \lambda_1 y + i\lambda_2 y = \lambda y$$

* נחשב את הנורמה של $\tilde{\lambda}$. עבור $x \in X$ כלשהו נסמן $\tilde{\lambda}x = re^{i\theta}$ ל-$r > 0$, ונקבל,

$$\left|\tilde{\lambda}x\right| = r = e^{-i\theta}\tilde{\lambda}x = \tilde{\lambda}\left(e^{-i\theta}x\right) = \tilde{\lambda}_1\left(e^{-i\theta}x\right)$$

כאשר השוויון האחרון הוא כי $\tilde{\lambda}\left(e^{i\theta}x\right) \in \mathbb{R}$. מכאן נובע,

$$\left|\tilde{\lambda}x\right| = \left|\tilde{\lambda}_1\left(e^{-i\theta}x\right)\right| \le \left\|\tilde{\lambda}_1\right\|_{\text{op}} \left\|e^{-i\theta}x\right\| = \left\|\tilde{\lambda}_1\right\|_{\text{op}} \|x\|$$

כלומר $\left\|\tilde{\lambda}\right\|_{\text{op}} \le \left\|\tilde{\lambda}\right\|_{\text{op}}$ (אי השוויון ההפוך ברור). ■

הוכחת הלמה:

1. אם $X = Y$ אין מה להוכיח. להלן נניח כי $X \neq Y$.
2. נניח שקיים $x_0 \in X \backslash Y$. נסמן $X_0 = \text{Span}_{\text{Alg}}(Y, x_0)$, ונתחיל להרחיב את λ לפונקציונל $\lambda_0 : X_0 \to \mathbb{C}$.
יהי $x \in X_0$. נכתוב $x = y + tx_0$ לאיזה t סקלר באופן יחיד, ונדרוש שתתקיים לינאריות, כלומר $\lambda_0 y = \lambda y + t\lambda_0 x_0$.
נסמן $\lambda_0 x_0 = \beta$, ונחפש β כזה שעבורו יתקיים,

$$\lambda y + t\beta = \lambda_0(y + tx_0) \le \text{p}(y + tx_0)$$

כלומר, נניח לצורך פשטות הסימון כי $t > 0$ ונרצה שיתקיים לכל $t > 0$,

$$\lambda y \pm t\beta \le \text{p}(y \pm tx_0)$$

כלומר לכל $y, y' \in Y$, נדרוש שיתקיים,

$$\lambda y' - \text{p}(y' - tx_0) \le t\beta \le \text{p}(y + tx_0) - \lambda y$$

מהומוגניות λ ניתן לנרמל, ולכן די לבדוק זאת עבור $t = 1$, כלומר,

$$\lambda y' - \text{p}(y' - x_0) \le \beta \le \text{p}(y + x_0) - \lambda y$$

אם כך יהיו $y, y' \in Y$,

$$\begin{aligned}\lambda y + \lambda y' &= \lambda(y + y') \le \text{p}(y + y') \\ &= \text{p}(y + x_0 + y' - x_0) \le \text{p}(y + x_0) + \text{p}(y' - x_0)\end{aligned}$$

ונקבל כי,

$$\lambda y' - \text{p}(y' - x_0) \le \text{p}(y + x_0) - \lambda y$$

אבל זה מתקיים שרירותית לכל $y, y' \in Y$, ולכן קיים β שמקיים את התנאי. כלומר יש הרחבה של λ לפונקציונל λ_0 על X_0.

3. כעת נתבונן במשפחת ההרחבות של λ שמקיימות את התנאי ביחס ל-p. כלומר,

$$\Lambda = \left\{\left(W, \tilde{\lambda}\right) \mid Y \subset W \subset X,\ \tilde{\lambda} : W \to \mathbb{C},\ \tilde{\lambda}\mid_Y = \lambda,\ \forall_{w \in W},\ \tilde{\lambda} w \leq \mathrm{p}\left(w\right)\right\}$$

נשים לב כי במצב ש-$X \neq Y$, אז מחלק 2 נובע כי Λ לא ריקה. נגדיר יחס סדר חלקי על Λ, על ידי $\left(W, \tilde{\lambda}\right) \leq \left(W', \tilde{\lambda}'\right)$ אם ורק אם $W \subset W'$ וגם $\tilde{\lambda}'\mid_W = \tilde{\lambda}$.

לכל שרשרת סדורה מלא $\left\{\left(W_\alpha, \tilde{\lambda}_\alpha\right)\right\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \Lambda$ יש איבר מקסימלי $\left(W, \tilde{\lambda}\right)$ המתקבל על ידי $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$ ועל ידי $\tilde{\lambda} w = \tilde{\lambda}_\alpha w$ עבור α אינדקס כזה המקיים $w \in W_\alpha$.

אם כך מהלמה של צורן יש ב-Λ איבר מקסימלי $\left(W_{\max}, \tilde{\lambda}_{\max}\right)$. נשים לב כי אם היה $W_{\max} \neq X$, היינו יכולים לקבוע $x_0 \in X \backslash W_{\max}$, ובאמצעות חזרה על התהליך שבסעיף 2 לקבל הרחבה גדולה מ-$\left(W_{\max}, \tilde{\lambda}_{\max}\right)$, בסתירה למקסימליות.

לכן נובע $W_{\max} = X$, ונקבל כי $\tilde{\lambda}_{\max}$ הוא הרחבה של λ לכל X, המקיימת $\tilde{\lambda} \leq \mathrm{p}$, כנדרש. ■

מסקנה: לכל מרחב נורמי $X \neq \{0\}$ מתקיים $X^* \neq \{0\}$. כלומר יש פונקציונל לינארי $\lambda \in X^*$. יתרה מזו, לכל $x_0 \in X$ יש $\lambda \in X^*$ המקיים $\lambda x_0 = \|x_0\|$ וגם $\|\lambda\|_* = 1$.

הוכחה: יהי $x_0 \in X$. נגדיר על $\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(x_0\right)$ פונקציונל $\lambda\left(t x_0\right) := t\left\|x_0\right\|$. זה פונקציונל לינארי ב-$\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(x_0\right)^*$ בעל נורמה $\|\lambda\|_* = 1$. ממשפט האן בנך ניתן להרחיב אותו לכל X ולשמר את הנורמה. ■

טענה: יהי X מרחב נורמי. נגדיר העתקה טבעית $\iota : X \to \left(X^*\right)^*$ על ידי $\iota x\left(\lambda\right) = \lambda x$. תמיד ι איזומטריה.

הוכחה: צריך להראות כי $\|\iota x\|_{**} = \|x\|$. מצד אחד מתקיים $|\iota x\left(\lambda\right)| = |\lambda x| \leq \|\lambda\|_* \|x\|$, ולכן $\|\iota x\|_{**} \leq \|x\|$.

מצד שני, לכל $x_0 \in X$ ראינו שיש $\lambda_0 \in X^*$ המקיים $\lambda_0 x_0 = \|x_0\|$ וגם $\|\lambda_0\|_* = 1$, ולכן נובע כי לכל $x_0 \in X$ עבור λ_0 שלו,

$$\|\iota x_0\|_{**} \geq |\iota x_0\left(\lambda_0\right)| = |\lambda_0 x_0| = \|x_0\|$$

ומכאן כי $\|\iota x_0\|_{**} \geq \|x_0\|$. ■

הגדרה: מרחב נורמי X ייקרא **רפלקסיבי**, אם $\iota : X \to \left(X^*\right)^*$ היא על (בכל מקרה ι איזומטריה ולכן גם חח"ע).

הערה: מרחב נורמי רפלקסיבי הוא בנך, כי לכל Y נורמי, Y^* הוא בנך.

דוגמאות:

1. כל המרחבים הנורמיים ממימד סופי הם רפלקסיביים (הנורמה לא משנה, כי כל הנורמות שקולות).
2. L^p, l^p רפלקסיביים לכל $1 < p < \infty$.
3. $C_0\left(\mathbb{N}\right)$ אינו רפלקסיבי: נשים לב כי $C_0\left(\mathbb{N}\right)^*, l^1\left(\mathbb{N}\right)$ איזומטריים, וכן $l^\infty\left(\mathbb{N}\right), l^1\left(\mathbb{N}\right)^*$ איזומטריים. אבל $l^\infty\left(\mathbb{N}\right), C_0\left(\mathbb{N}\right)$ אינם איזומורפיים (כי אחד מהם ספרבילי והאחר לא).
4. $l^1\left(\mathbb{N}\right)$ אינו רפלקסיבי: ידוע כי $l^1\left(\mathbb{N}\right)^*, l^\infty\left(\mathbb{N}\right)$ איזומטריים. נראה כי $l^1\left(\mathbb{N}\right), l^\infty\left(\mathbb{N}\right)^*$ אינם איזומטריים על ידי ι.
יהי $C\left(\mathbb{N}\right) \subset l^\infty\left(\mathbb{N}\right)$ תת מרחב הסדרות המתכנסות. יהי $\lambda \in C\left(\mathbb{N}\right)^*$ פונקציונל הגבול. ניתן לראות כי λ אכן לינארי וחסום, ולכן ממשפט האן בנך יש לו הרחבה לפונקציונל $\tilde{\lambda} \in l^\infty\left(\mathbb{N}\right)$.
נשים לב כי $\tilde{\lambda}\mid_{C_0\left(\mathbb{N}\right)} \equiv 0$, כלומר $\tilde{\lambda}\mid_{C_0\left(\mathbb{N}\right)} = 0 \in C_0\left(\mathbb{N}\right)^* \cong l^1\left(\mathbb{N}\right)$. כלומר מצאנו פונקציונל לינארי לא טריוויאלי ב-$l^\infty\left(\mathbb{N}\right)^*$ שהוא טריוויאלי על $l^1\left(\mathbb{N}\right)$ (תחת ההתאמה ι).

הגדרה: יהי X מרחב נורמי ויהי $Y \subset X$ תת מרחב. נסמן,

$$Y^{\perp} = \{\lambda \in X^* \mid \lambda\mid_Y = 0\} \subset X^*$$

ניתן לראות כי $Y^{\perp}$ תת מרחב לינארי של X^*.

טענה: יהי X מרחב נורמי ויהי $Y \subset X$ תת מרחב. לכל $x_0 \in X \backslash Y$,

$$\inf_{y \in Y} \|x_0 - y\| = \max_{\lambda \in Y^{\perp},\, \|\lambda\|_{Y^*} = 1} \{|\lambda x_0|\}$$

הוכחה: יהי $x_0 \in X \backslash Y$. נסמן $d = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$ ונסמן $m = \max_{\lambda \in Y^{\perp},\, \|\lambda\|_{Y^*}=1} \{|\lambda x_0|\}$.

- בכיוון אחד, יהי $\lambda \in Y^{\perp}$ עם $\|\lambda\|_{Y^*} = 1$. לכל $y \in Y$,

$$|\lambda x_0| = |\lambda (x_0 - y)| \leq \|\lambda\|_{Y^*} \|x_0 - y\| = \|x_0 - y\|$$

זה קורה לכל $y \in Y$, ולכן גם לאינפימום על פני $y \in Y$. כלומר $m \leq d$.

- בכיוון שני, תחילה אם $d = 0$ הטענה טריוויאלית. אז נניח $d > 0$, ונתבונן בתת המרחב $Z = \mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}} (Y, x_0) = Y \oplus \mathbb{C} \cdot x_0$.

נגדיר פונקציונל לינארי $\lambda \in Z^*$ על ידי $\lambda (y + \alpha x_0) = \alpha d$ לאיבר כללי $y + \alpha x_0 \in Z$ לאיזה $\alpha \in \mathbb{C}$. קל לראות כי זה אכן פונקציונל לינארי, וכן $\lambda x_0 = d$. כמו כן ברור כי $\lambda \in Y^{\perp}$.

נותר להראות כי $\|\lambda\|_{Z^*} = 1$, ומכך נוכל להסיק על ידי משפט האן בנך שיש $\tilde{\lambda} \in X^*$ המרחיב את λ ומקיים $\left\|\tilde{\lambda}\right\|_{X^*} = 1$, מה שיסיים את ההוכחה ש-$m \geq d$.

אם כך, מצד אחד מתקיים לכל $\alpha \neq 0$,

$$\|y + \alpha x_0\| = |\alpha| \left\| \frac{1}{\alpha} y + x_0 \right\| \geq |\alpha|\, d = |\lambda (y + \alpha x_0)|$$

ולכן $\|\lambda\|_{Z^*} \leq 1$.

מצד שני, נקבע סדרה $(y_n) \subset Y$ המקיימת $y_n - x_0 \to d$. אזי לכל n,

$$d = |\lambda x_0| = |\lambda (y_n - x_0)| \leq \|\lambda\|_{Z^*} \|y_n - x_0\|$$

נשאיף את $n \to \infty$ ונקבל כי $d \leq \|\lambda\|_{Z^*} d$, כלומר $\|\lambda\|_{Z^*} \geq 1$. ■

הערה: טענה זו מכלילה טענה קודמת, לפיה לכל $0 \neq x_0 \in X$ יש $\lambda \in X^*$ עם $\|\lambda\|_* = 1$, שעבורו $\lambda x_0 = \|x_0\|$. טענה זו מתקבלת מהנוכחית עבור בחירת $Y = \{0\}$.

מסקנה: יהי X מרחב נורמי. תהי $A \subset X^*$ קבוצה צפופה. אם עבור $x_0 \in X$ מתקיים $\lambda x_0 = 0$ לכל $\lambda \in A$, אזי $x_0 = 0$.

הוכחה: אם $x_0 \neq 0$, אז יש $\lambda \in X^*$ המקיים $\lambda x_0 = 1$. מצפיפות A ניתן למצוא $\mu \in A$ שעבורו גם $\mu x_0 \neq 0$. ■

מסקנה: יהי X מרחב נורמי ויהי $Y \subset X$ תת מרחב. אזי $x_0 \in \overline{Y}$ אם ורק אם לכל $\lambda \in Y^{\perp}$ מתקיים $\lambda x_0 = 0$.

טענה: אם X^* מרחב נורמי ספרבילי, אזי X מרחב נורמי ספרבילי.

הערה: בכיוון ההפוך הטענה לא נכונה. למשל $l^{1*} \cong l^{\infty}$, אבל l^1 ספרבילי ו-l^{∞} אינו ספרבילי.

הוכחה: נקבע $\{\lambda_n\} \subset X^*$ קבוצה בת מניה צפופה. לכל n נקבע $x_n \in X$ עם $\|x_n\| = 1$, כך שמתקיים $\|\lambda_n x_n\| \geq \frac{1}{2}\|\lambda_n\|_*$.

נתבונן בתת המרחב $Y = \mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}(\{x_n\}) \subset X$, ונראה כי $Y \subset X$ צפוף. זה יספיק כדי להראות כי X ספרבילי, היות שיש קבוצה בת מניה צפופה ב-Y (אם לוקחים צירופים לינאריים במקדמים רציונליים).

ממסקנה קודמת, די להראות שכל $\lambda \in Y^\perp$ מקיים $\lambda \equiv 0$. יהי $\lambda \in Y^\perp$. נבחר $\lambda_{n_k} \to \lambda$ סדרה מתוך $\{\lambda_n\}$, ואז מתקיים,

$$0 \longleftarrow \|\lambda - \lambda_{n_k}\|_* \geq |(\lambda - \lambda_{n_k})(x_{n_k})| = |\lambda x_{n_k}| \geq \frac{1}{2}\|\lambda_{n_k}\|_*$$

כלומר נובע כי $\|\lambda_{n_k}\|_* \to 0$ כאשר $k \to \infty$, כלומר $\|\lambda\|_* = 0$ ולכן $\lambda = 0$. ■

טענה: יהי X מרחב נורמי ותהי $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ תת קבוצה כלשהי, כך שלכל $\lambda \in X^*$ מתקיים $\sup_{\alpha\in A}|\lambda x_\alpha| < \infty$. אזי $\sup_{\alpha\in A}\|x_\alpha\| < \infty$.

הוכחה: נתבונן בהעתקה הטבעית $\iota : X \to X^{**}$ המוגדרת על ידי $\iota x(\lambda) = \lambda x$. ראינו כי היא איזומטריה, ולכן $\sup_{\alpha\in A}\|\iota x_\alpha\|_{**} = \sup_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|$. נראה כי ביטוי זה סופי.

נשים לב כי לכל $\iota x_\alpha \in X^{**}$ מתקיים $|\iota x_\alpha(\lambda)| = |\lambda x_\alpha|$, ומההנחה בטענה נובע כי ביטוי זה חסום במידה שווה ב-$\lambda \in X^*$. כל מרחב דואלי הוא בנך, ולכן ממשפט החסימות במידה שווה נובע כי $\sup_{\alpha\in A}\|\iota x_\alpha\|_{**} < \infty$, כנדרש. ■

14.1 הרחבת מושג הגבול (גבול בנך)

מבוא: נתבונן בפונקציונל הגבול $\lim : C(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$, המעתיק סדרה מתכנסת לגבול שלה. נשים לב כי $\|\lim\|_* = 1$, כי $\frac{|\lim \mathbf{x}|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\sup_n x_n} \leq 1$ לכל $\mathbf{x} = (x_n) \in C(\mathbb{N})$, ועבור הסדרה הקבועה $\mathbf{x} = (x_n) = (1)$ החסם מושג.

נרצה להגדיר פונקציונל מהצורה $L : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$, כך שלכל $\mathbf{x} = (x_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$ יתקיימו הדברים הבאים,

1. L חיובי. כלומר אם $\mathbf{x} \geq 0$ (בכל קואורדינטה) אז $L\mathbf{x} \geq 0$.
2. לכל $\mathbf{x} \in l^\infty$,
$$L\mathbf{x} = LS\mathbf{x}$$
כאשר $S : l^\infty(\mathbb{N}) \to l^\infty(\mathbb{N})$ האופרטור $(S\mathbf{x})_n = x_{n+1}$ עבור $n > 1$.
3. לכל $\mathbf{x} \in l^\infty$,
$$\liminf \mathbf{x} \leq L\mathbf{x} \leq \limsup \mathbf{x}$$

הערה: נשים לב כי אם יש כזה L, אז הוא מרחיב את $\lim$ מעל $C(\mathbb{N})$, כי אם $\mathbf{c} = (c_n) \in C(\mathbb{N})$, אז $\lim \mathbf{c} = \liminf \mathbf{c} = \limsup \mathbf{c}$, ולכן $L\mathbf{c} = \lim \mathbf{c}$.

כמו כן אם יש כזה L, אז $\|L\|_* = 1$, כי $\frac{|L\mathbf{x}|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\limsup x_n}{\sup_n x_n} \leq 1$ לכל $\mathbf{x} \in l^\infty(\mathbb{N})$, ועבור הסדרה הקבועה $\mathbf{x} = (x_n) = (1)$ החסם מושג.

הערה: יכולנו לדרוש שיתקיים $L(\mathbf{x}\mathbf{y}) = L\mathbf{x}L\mathbf{y}$, אולם אז לא ניתן לשמור על התכונה $L\mathbf{x} = LS\mathbf{x}$.

בנייה: נבנה את L בצורה הבאה. נתבונן בתת המרחב $W = \{S\mathbf{x} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in l^\infty\}$.

- נתבונן בסדרה הקבועה $\mathbf{1} = (1) \in l^\infty$, ונשים לב כי $\mathbf{1} \notin W$, שכן אם היה $\mathbf{1} = S\mathbf{x} - \mathbf{x}$ לאיזה $\mathbf{x} = (x_n) \in l^\infty$, אז נובע כי $x_{n+1} - x_n = 1$ לכל n, ולכן $(x_n) \notin l^\infty$.

- כמו כן נשים לב שמתקיים $\inf_{\mathbf{w}\in W}\|\mathbf{w}+\mathbf{1}\|=1$. תחילה, לכל $\mathbf{w}=S\mathbf{x}-\mathbf{x}\in W$ לאיזה $\mathbf{x}\in l^{\infty}$, מתקיים,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}-\mathbf{1}\| &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|x_{n+1}-x_n-1| \\ &\geq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_{n+1}-x_n)-1\right| = \left|\frac{x_{N+1}-x_1}{N}-1\right| \to 1\,,\ \ N\to\infty\end{aligned}$$

ולכן $\inf_{\mathbf{w}\in W}\|\mathbf{w}+\mathbf{1}\|\geq 1$. אבל עבור הסדרה הקבועה $\mathbf{0}=(0)\in W$ מתקיים $\|\mathbf{0}-\mathbf{1}\|=\mathbf{1}$, והחסם מושג.

- נשים לב כי $\mathbf{1}\in l^{\infty}\backslash W$, ולכן על ידי מסקנה קודמת נקבל כי,

$$\max_{\lambda\in W^{\perp},\,\|\lambda\|_{W^*}=1}\{|\lambda\mathbf{1}|\}=\inf_{\mathbf{w}\in W}\|\mathbf{1}-\mathbf{w}\|=1$$

כלומר יש $L\in l^{\infty *}$ המקיים $L\in W^{\perp}$. נראה שמתקיימות הדרישות:

1. יהי $\mathbf{x}\in l^{\infty}$. אם $\mathbf{x}=0$ אז $L\mathbf{x}=0$. נניח $\mathbf{x}>0$, ונתבונן באיבר $\mathbf{y}=(y_n)=\left(1-\frac{x_n}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}}\right)$. מתקיים $0\leq y_n\leq 1$, ואם כך,

$$L\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}}=L(\mathbf{1}-\mathbf{y})=1-L\mathbf{y}\geq 1-\|\mathbf{y}\|_{\infty}\geq 0$$

ומכאן כי $L\mathbf{x}\geq 0$.

2. נשים לב כי המשמעות של $L\in W^{\perp}$ היא שאם $\mathbf{w}=S\mathbf{x}-\mathbf{x}\in W$ אז $LS\mathbf{x}-L\mathbf{x}=0$. כלומר לכל $\mathbf{x}\in l^{\infty}$ מתקיים $LS\mathbf{x}=L\mathbf{x}$.
3. כדי להראות תכונה זו, ניתן להראות כי $\inf\mathbf{x}\leq L\mathbf{x}\leq\sup\mathbf{x}$, ועל ידי שימוש אינדוקטיבי בתכונה $L\mathbf{x}=LS\mathbf{x}$ ניתן להראות את תכונה 3. ■

הערה: הפונקציונל המרחיב L אינו יחיד בהכרח.

תרגיל: אם $\mathbf{x}=(x_n)\in l^{\infty}$ מקיים $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n\to c$, אזי $L\mathbf{x}=c$.

מסקנה: עבור האיבר $\mathbf{x}=(0,1,0,1,\dots)\in l^{\infty}$, מתקיים $L\mathbf{x}=1/2$. באותו אופן ניתן לראות ישירות או על ידי תכונה 2, כי עבור $S\mathbf{x}=(1,0,1,0,\dots)$ מתקיים $LS\mathbf{x}=1/2$. עם זאת, $\mathbf{x}\cdot S\mathbf{x}=(0,0,0,0,\dots)$ ולכן $1/4=L\mathbf{x}\cdot LS\mathbf{x}\neq L(\mathbf{x}\cdot S\mathbf{x})=0$.

14.2 משפט האן בנך (גרסה גאומטרית)

הגדרה: יהי X מרחב לינארי ויהי $Y\subset X$ תת מרחב לינארי. נאמר כי Y הוא **מקסימלי**, אם הוא לא מוכל באף תת מרחב ממש אחר.

הערה: לתת מרחב מקסימלי מתייחסים לעתים כאל בעל "קו־ממד 1", היות שבמצב כזה לכל $x_0\in X\backslash Y$, כל $x\in X$ ניתן להצגה יחידה בצורה $x=y+\alpha x_0$ עבור $y\in Y,\ \alpha\in\mathbb{C}$.

הגדרה: אם $Y\subset X$ תת מרחב, אז לכל $x_0\in X$ (ייתכן $x_0\in Y$), תת המרחב x_0+Y נקרא **מישור**. במקרה ש-Y מקסימלי, תת המרחב x_0+Y נקרא **על־מישור**.

טענה: יהי X מרחב לינארי ויהי $\lambda\not\equiv 0$ פונקציונל לינארי, אזי $\ker\lambda$ הוא תת מרחב מקסימלי.

הוכחה: מההנחה $\lambda\not\equiv 0$ נובע שקיים $x_0\in X$ המקיים ללא הגבלת הכלליות $\lambda x_0=1$. כל $x\in X$ ניתן להציג בצורה יחידה $x=x-x_0\lambda x+x_0\lambda x$ כאשר ברור כי $x-x_0\lambda x\in\ker\lambda$, ולכן $\ker\lambda$ מקסימלי. ■

מסקנה: אם $\lambda \not\equiv 0$ פונקציונל לינארי על מרחב X, אזי לכל $c \in \mathbb{C}$ יש על־מישור $\{x \in X \mid \lambda x = c\}$.

הגדרה: יהי X מרחב לינארי ותהי $S \subset X$ תת קבוצה. נקודה $x_0 \in S$ נקראת **נקודת תוך** של S (internal point), אם בכל כיוון של x_0 יש סביבה שלמה של X שמוכלת בתוך S. כלומר:

לכל $x \in X$ (כיוון) יש $\delta > 0$ (רדיוס), כך שמתקיים $x_0 + tx \in S$ לכל $|t| < \delta$.

הערה: אם עבור $x_0 \in S$ קיים $\delta > 0$ כזה שמתאים לכל $x \in X$, אז יש סביבה של x_0 שמוכלת בתוך S. זה לא בהכרח המצב במקרה של נקודת תוך.

הגדרה: יהי X מרחב לינארי ותהי $S \subset X$ תת קבוצה. נאמר כי S **בולעת**, אם $0 \in S$ נקודת תוך.

הסיבה למינוח זה היא שבמקרה זה ניתן להציג $X = \bigcup_n nS$, היות שלכל $x \in X$ יש $\frac{1}{n} > 0$ המקיים $0 + \frac{1}{2n}x \in S$, כלומר $x \in 2nS$.

הגדרה: יהי X מרחב לינארי ויהיו $M, N \subset X$ תת קבוצות. נאמר כי M, N **נפרדות**, אם יש על־מישור שמפריד ביניהן. כלומר, יש פונקציונל לינארי $\lambda \not\equiv 0$ יחד עם סקלר $\gamma \in \mathbb{C}$, כך שמתקיים,

$$\mathrm{Re}\lambda\left(M\right) \leq \gamma \leq \mathrm{Re}\lambda\left(N\right)$$

(העל־מישור הוא $\{x \mid \lambda x = \gamma\}$).

משפט: יהי X מרחב לינארי ויהיו $M, N \subset X$ תת קבוצות קמורות וזרות, ונניח שקיימת $p \in M$ נקודת תוך. אזי M, N נפרדות.

דוגמה: נראה כיצד המשפט אינו נכון כאשר אין נקודת תוך כנ"ל. יהי X מרחב לינארי בעל ממד בן מניה, ויהי $\{x_i\}$ בסיס המל. נגדיר את הקבוצה $S = \left\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \mid N \in \mathbb{N},\, a_N > 0\right\}$. ניתן לראות כי זו קבוצה קמורה וכי $0 \notin S$. נראה כי $S, \{0\}$ לא נפרדות.

נניח כי λ פונקציונל מפריד. אז $\lambda 0 = 0$, ולכן $\mathrm{Re}\lambda\left(S\right) \leq 0$ או $\mathrm{Re}\lambda\left(S\right) \geq 0$. נניח ללא הגבלת הכלליות $\mathrm{Re}\lambda\left(S\right) \geq 0$.

לכל N, נסתכל על הצירופים הלינאריים $rx_N + x_{N+1} \in S$ לכל $r \in \mathbb{R}$. נשים לב כי מההנחה נובע שמתקיים לכל $r \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \lambda\left(rx_N + x_{N+1}\right) = r\lambda x_N + \lambda x_{N+1}$$

כלומר $r\lambda x_N \geq -\lambda x_{N+1}$, ובפרט עבור $r = 1$ ועבור $r = -1$, ולכן בהכרח $\lambda x_N = 0$.

ניתוח זה תקף לכל N, ולכן $\lambda \equiv 0$. כלומר λ לא יכול להיות פונקציונל מפריד.

הגדרה: לכל $K \subset X$ קבוצה קמורה ובולעת, נשים לב כי $X = \bigcup_n nK$.

נגדיר את **פונקציונל מינקובסקי** $P_K : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ על ידי,

$$P_K x = \inf\left\{t \geq 0 \mid x \in tK\right\}$$

טענה: (**תכונות של פונקציונל מינקובסקי**) לכל $K \subset X$ קבוצה קמורה ובולעת, מתקיימים הדברים הבאים:

1. $P_K\left(x + y\right) \leq P_K x + P_K y$ לכל $x, y \in X$.
2. $P_K\left(\alpha x\right) = \alpha P_K x$ לכל $\alpha \geq 0$.
3. $P_K x \leq 1$ לכל $x \in K$.
4. $x \in K$ נקודת תוך אם ורק אם $P_K x < 1$ (ממש).

הוכחה:

1. יהיו $x,y\in X$. נשים לב שלכל $\alpha,\beta>0$ המקיימים $P_Kx<\alpha,\ P_Ky<\beta$, מתקיים כי $\frac{1}{\alpha}x,\frac{1}{\beta}y\in K$. לכן נקבל כי ניתן להציג,

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta}=\frac{x}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{y}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}\in K$$

כאשר זה צירוף קמור של איברי K, ומקמירות זה גם איבר של K. אם כך נובע כי $P_K\left(x+y\right)\le\alpha+\beta$, לכל $\alpha,\beta>0$ כנ"ל, כלומר $P_K\left(x+y\right)\le P_Kx+P_Ky$.

2. יהי $\beta>0$ המקיים $P_Kx<\beta$. נשים לב כי באופן טריוויאלי, $\frac{1}{\beta}x\in K$ אם ורק אם $\frac{1}{\alpha\beta}\alpha x\in K$, ומכאן מתקבלים שני אי שוויונים הפוכים.

3. טריוויאלי

4. בכיוון אחד, תהי $x_0\in S$ נקודת תוך. בפרט עבור $x=x_0\in X$ יש $\delta>0$ המקיים $x_0\left(1+|t|\right)=x_0+|t|\,x_0\in K$ עבור כל $|t|<\delta$, ובפרט עבור $\frac{1}{2}\delta$ מתקיים $x_0\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)\in K$, ומכאן כי $P_Kx\le\frac{1}{1+\frac{1}{2}\delta}<1$.

   בכיוון שני, נניח כי $P_Kx<1$. נקבע $\epsilon>0$ המקיים $P_Kx<1-\epsilon$, ולכן $\frac{1}{1-\epsilon}x\in K$. נתון כי S בולעת, כלומר $0\in S$ נקודת תוך, ולכן לכל $y\in X$ יש $\delta>0$ כך שאם $|t|<\delta$ אז $ty\in K$. נקבע y כנ"ל, ונשים לב כי,

$$x+\epsilon ty=\left(1-\epsilon\right)\frac{x}{1-\epsilon}+\epsilon ty$$

   וקיבלנו צירוף קמור של איברי K, ומקמירות נובע כי $x+\epsilon ty\in K$, כלומר x נקודת תוך. ■

הוכחת המשפט: נבחין כי מלינאריות נובע כי פונקציונל $\lambda\not\equiv0$ מפריד את M,N אם ורק אם הוא מפריד את $M-N$, $\{0\}$ (כאשר $M-N=\{m-n\mid m\in M,n\in N\}$).

עוד נבחין כי M,N נפרדות, אם ורק אם $N-\{p\}$, $M-\{p\}$ נפרדות, עבור $p\in M$ נקודת תוך. לכן נניח ללא הגבלת הכלליות כי $0\in M$ נקודת תוך, כלומר M בולעת.

תהי $x_0\in N$ כלשהי. נבחין כי $K=\{x_0\}+M-N$ קבוצה קמורה ובולעת (כי $0\in M$ נקודת תוך, ולכן $0=x_0+0-x_0\in K$ נקודת תוך, על ידי אותו δ). כמו כן $x_0\notin K$, כי M,N זרות.

- נניח תחילה כי X מרחב לינארי ממשי.

  נתבונן בפונקציונל מינקובסקי P_K. מכך ש-$x_0\notin K$ נובע כי $P_Kx_0\ge1$. נתבונן בתת המרחב $\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\{x\}\right)$ ונגדיר עליו פונקציונל לינארי $\lambda\left(\alpha x_0\right)=\alpha P_Kx_0$.

  נראה כי $\lambda x\le P_Kx$ לכל $x\in\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\{x_0\}\right)$: יהי $x=\alpha x_0\in\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\{x_0\}\right)$. אם $\alpha>0$ (נזכור כי המרחב הלינארי ממשי), אז $\lambda\left(\alpha x_0\right)=\alpha P_Kx_0=P_K\left(\alpha x_0\right)$. אם $\alpha>0$, אז $\lambda\left(\alpha x_0\right)=\alpha P_Kx_0\le0\le P_K\left(\alpha x_0\right)$.

  אם כך מהלמה של האן בנך (זו שהוכחנו במסגרת משפט האן בנך), מכך שמתקיים $\lambda\le P_K$ נובע שניתן להרחיב את λ לפונקציונל $\tilde{\lambda}$ על כל X, המקיים $\tilde{\lambda}x\le P_Kx$ לכל $x\in X$. נראה כי $\tilde{\lambda}$ מפריד את K , $\{0\}$.

  מצד אחד, אם $x\in K$ אז $\tilde{\lambda}x\le P_Kx\le1$. מצד שני, עבור x_0 מתקיים $\tilde{\lambda}x_0=\lambda x_0\ge1$. כלומר מתקיים $\tilde{\lambda}\left(K\right)\le1\le\tilde{\lambda}\left(x_0\right)$, וכפי שהזכרנו זה אומר כי $\tilde{\lambda}$ מפריד את M,N, כנדרש.

- נניח כעת כי X מרחב לינארי מרוכב. נתבונן במרחב הלינארי הממשי $X_{\mathbb{R}}$ (כאשר מצמצמים את הכפל בסקלר לסקלרים ממשיים בלבד). בפרט $M,N\subset X_{\mathbb{R}}$ כמרחב ממשי, ולכן יש פונקציונל לינארי ממשי λ המפריד את M,N מעל $X_{\mathbb{R}}$. ניתן לראות כי $\Lambda x:=\lambda x-i\lambda\left(ix\right)$ הוא פונקציונל לינארי מרוכב המקיים $\mathrm{Re}\Lambda=\lambda$, ולכן Λ מפריד את M,N מעל X. ■

משפט: (גרסה גאומטרית למשפט האן בנך) יהי X מרחב לינארי, ותהי $K\subset X$ קבוצה קמורה שכל נקודותיה הן תוך. נניח כי $D\subset X$ מישור זר ל-K. אזי יש על־מישור המכיל את D וזר ל-K.

הוכחה: נניח ללא הגבלת הכלליות כי $0\in D$ (אחרת נזיז את D בקבוע). לכן מהמשפט הקודם יש פונקציונל לינארי Λ המפריד את D,K. כלומר $\mathrm{Re}\Lambda\left(K\right)\le\gamma\le\mathrm{Re}\Lambda\left(D\right)$. נסמן $\lambda=\mathrm{Re}\Lambda$, ונראה כי $\ker\lambda$ הוא על מישור המכיל את D וזר ל-K.

- נראה כי $D\subset\ker\lambda$. מלינאריות $\lambda 0=0$, אבל $0\in D$ ולכן $\gamma\leq 0$. נניח בשלילה שיש $x\in D$ עם $\lambda x=r\neq 0$, אזי לכל t מתקיים $\lambda\left(tx\right)=t\lambda x=tr$. נבחר $t>0$ מספיק קטן שעבורו $tr<\gamma$ וגם $trx\in D$ (כי D תת מרחב), ונקבל כי $\lambda\left(tx\right)=tr<\gamma$, בסתירה להנחה כי $\lambda\left(D\right)\geq\gamma$.
- נראה כי $\ker\lambda$ זר ל-K. נשים לב כי $\lambda\left(K\right)\leq\gamma\leq 0$, ולכן נותר רק לשלול את האפשרות $\lambda x=0$ לאיזה $x\in K$. נניח בשלילה כי יש $x\in K$ שעבורו $\lambda x=0$. תהי $y\in X$ שעבורה $\lambda y>0$ (יש כזאת כי $\lambda\not\equiv 0$), אזי יש $\delta>0$ שעבורו $x+\frac{1}{2}\delta y\in K$, ולכן $\lambda\left(x+\frac{1}{2}\delta y\right)=\lambda x+\frac{1}{2}\delta\lambda y=\frac{1}{2}\delta\lambda y>0$, אבל ראינו כי $\lambda\left(K\right)\leq 0$, ולכן זו סתירה. ■

משפט: יהי X מרחב נורמי, ויהיו $K_1,K_2\subset X$ קבוצות קמורות וזרות, ונניח כי K_1 מכילה כדור פתוח. אזי K_1,K_2 נפרדות על ידי פונקציונל לינארי רציף.

למה 1: פונקציונל לינארי $\lambda:X\to\mathbb{C}$ הוא רציף אם ורק אם $\ker\lambda\subset X$ קבוצה סגורה.

בפרט, אם λ אינו רציף אז $\ker\lambda\subset X$ קבוצה צפופה (כי $\ker\lambda\subsetneq\overline{\ker\lambda}$, ומהיות $\ker\lambda$ תת מרחב מקסימלי, בהכרח $\overline{\ker\lambda}=X$).

הוכחה: בכיוון אחד, אם λ רציף אז $\ker\lambda=\lambda^{-1}\left(\left\{ 0\right\} \right)$ קבוצה סגורה. בכיוון שני, אם $\ker\lambda$ קבוצה סגורה, אז $Y=\left\{ x\in X\mid\lambda x=1\right\}$ קבוצה שלא מכילה את 0. לכן יש $r>0$ כך שהכדור $B_r\left(0\right)$ זר ל-Y. ניתן להראות שנובע כי לכל $\left\Vert x\right\Vert <r$ מתקיים $\left|\lambda x\right|<1$, ולכן λ רציף. ▲

למה 2: פונקציונל לינארי $\lambda:X\to\mathbb{C}$ שאינו רציף, מקיים לכל קבוצה פתוחה $U\subset X$ כי $\lambda\left(U\right)=\mathbb{C}$.

הוכחה: תחילה נשים לב שמהיות λ לא רציף נובע כי $\overline{\ker\lambda}=X$, ולכן לכל קבוצה פתוחה $U\subset X$ מתקיים $U\cap\ker\lambda\neq\emptyset$. כלומר $0\in\lambda\left(U\right)$.

יהי $x_0\in U$ שעבורו $\lambda x_0=0$. יהי $c\in\mathbb{C}$. יהי $x\in X$ שעבורו $\lambda x\neq 0$ וגם $x_0+c\frac{x}{\lambda x}\in U$ (אם לא היה כזה, היינו מקבלים כי λ מתאפס בסביבה שלמה של x_0, ולכן $\lambda\equiv 0$), ונקבל כי,

$$\lambda\left(x_0+z\frac{x}{\lambda x}\right)=\lambda x_0+z\frac{1}{\lambda x}\lambda x=z$$

כנדרש. ▲

הוכחה: היות שכל נקודת פנים היא בפרט נקודת תוך, ומכך שב-K_1 יש נקודת פנים, על ידי משפט קודם נובע שניתן להפריד את K_1,K_2 על ידי פונקציונל לינארי λ, כלומר $\mathrm{Re}\lambda\left(K_1\right)\leq\gamma\leq\mathrm{Re}\lambda\left(K_2\right)$.

נניח בשלילה כי λ לא רציף. נשים לב כי K_1 מכילה קבוצה פתוחה, ולכן לפי למה 2 היינו מקבלים $\mathrm{Re}\lambda\left(K_1\right)=\mathbb{C}$, ובפרט לא חסום על ידי γ, וזו סתירה. ■

15 מרחבי מנה

הגדרה: יהי X מרחב לינארי ויהי $M\subset X$ תת מרחב. נגדיר יחס שקילות על X, על ידי $x\sim y$ אם ורק אם $x-y\in M$. לא קשה לראות שזה יחס שקילות (היות ש-M תת מרחב).

לכל $x\in X$, נסמן את מחלקת השקילות שלו $[x]$, ונסמן את אוסף מחלקות השקילות על ידי ${}^{X}/_{M}$.

נגדיר על ${}^{X}/_{M}$ מבנה של מרחב לינארי על ידי,

$$[x]+[y]=[x+y]$$

$$\alpha\left[x\right]=\left[\alpha x\right]$$

ניתן להראות כי זה מוגדר היטב (היות ש-M תת מרחב לינארי).

הגדרה: יהי X מרחב נורמי ויהי $M \subset X$ תת מרחב. נגדיר על X/M מבנה של מרחב נורמי על ידי,

$$\|[x]\| = \inf_{y \sim x} \{\|y\|\} = \inf_{m \in M} \{\|x - m\|\} = d(x, M)$$

טענה:

1. הנורמה המושרית היא אכן נורמה.
2. אם X מרחב בנך אז X/M מרחב בנך בנורמה המושרית.
3. ההעתקה הקנונית $\pi : X \to X/M$, $x \mapsto [x]$, מעתיקה את כדור היחידה הפתוח של X על כדור היחידה הפתוח של X/M.

הוכחה:

1. ההומוגניות ברורה. נראה שמתקיים אי שוויון המשולש,

$$\begin{aligned} \|[x] + [y]\| &= \inf_{y \in [x+y]} \{\|y\|\} = \inf_{x' \sim x, y' \sim y} \{\|x' + y'\|\} \\ &\leq \inf_{x' \sim x} \{\|x'\|\} + \inf_{y' \sim y} \{\|y'\|\} = \|[x]\| + \|[y]\| \end{aligned}$$

כמו כן נניח כי $\|[x]\| = 0$, כלומר $d(x, M) = 0$, ונרצה להראות כי $[x] = 0 \in X/M$, כלומר $x \in M$. מהיות M תת מרחב סגור נובע כי תת הקבוצה $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\} = \{y \in X \mid x - y \in M\}$ היא סגורה, ולכן יש סדרה $(x_n) \subset [x]$ המקיימת $\|x_n\| \to \|x\| = 0$ בנורמה של X, ולכן $0 \in [x]$, כלומר $x = x - 0 \in M$.

2. תהי $([x_n]) \subset X/M$ סדרת קושי. מספיק להראות שיש תת סדרה של $([x_n])$ שמתכנסת. לכל $k \geq 1$ נבחר x_{n_k} כך שמתקיים $\left\|[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]\right\| \leq 2^{-k}$, כלומר, לפי הגדרת הנורמה במרחב המנה, קיים $m_k \in M$ כך שמתקיים $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + m_k\right\| \leq 2^{-k}$.
נסמן $v_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + m_k$, ונקבל כי,

$$u_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i = x_{n_k} - x_{n_1} + \sum_{i=1}^{n-1} m_i$$

סדרת קושי של X, ולכן יש לה גבול $u_k \to u \in X$. אם כך נובע כי $(x_{n_k}) \to u + x_1$, שכן מתקיים,

$$\|[x_{n_k}] - [u + x_{n_1}]\| = \|[u_k + x_{n_1}] - [u + x_{n_1}]\| \leq \|u_n - u\| \to 0\,, \quad k \to \infty$$

3. נשים לב כי אם $\|x\| \leq 1$ לאיזה $x \in X$, אז מתקיים,

$$\|[x]\| = \inf_{m \in M} \{\|x - m\|\} \leq \|x - 0\| = \|x\| \leq 1$$

■

טענה: יהיו X, Y מרחבים נורמיים, ויהי $T : X \to Y$ אופרטור לינארי רציף ועל. אז Y איזומטרי ל-$X/\ker T$, על ידי $Tx \mapsto [x]$.

טענה: כל מרחב בנך ספרבילי, איזומטרי למרחב מנה של $l^1(\mathbb{N})$.

למה: אם X מרחב בנך ו-$A \subset X$ קבוצה צפופה בכדור היחידה הפתוח $B_1(0) \subset X$, אז לכל $x \in B_1(0)$ יש סדרה $\lambda = (\lambda_n) \in l^1(\mathbb{N})$ המקיימת $\|\lambda\| < 1$, כך שמתקיים $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ עבור $(x_n) \subset A$.

הוכחה: נסמן $B := B_1(0)$ הכדור הפתוח, ונקבע $x_0 \in B$. יש $\delta > 0$ מספיק קטן שעבורו $(1+\delta)x_0 \in B$.
יהי $0 < \epsilon < 1$, ויהי $x_1 \in A$ שמקיים $\|(1+\delta)x_0 - x_1\| < \epsilon$. נסמן $y_1 = (1+\delta)x_0 - x_1$, ואז $\|y_1\| < \epsilon$.
יהי $x_2 \in A$ שמקיים $\left\|\frac{1}{\epsilon}y_1 - x_2\right\| < \epsilon$. נסמן $y_2 = \frac{1}{\epsilon}y_1 - x_2$, ואז $\|y_2\| < \epsilon$.
באופן כללי, נבחר באינדוקציה x_n כך שהאיבר $y_n = \frac{1}{\epsilon}y_n - x_n$ מקיים $\|y_n\| < \epsilon$.
בסך הכל נקבל,

$$\begin{aligned}(1+\delta)x &= x_1 + y_1 = x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon y_2 \\ &= x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3 + \cdots + \epsilon^{n-1}x_n + \dots\end{aligned}$$

ניתן לראות כי סדרת הסכומים החלקיים של הטור היא סדרת קושי, ולכן הוא מתכנס. כלומר מתקיים $x = \frac{1}{1+\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k x_k$. אם כך עבור $\lambda_n = \frac{1}{1+\delta}\epsilon^{n-1}$ מתקיים,

$$\|\lambda\| = \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| = \frac{1}{1-\epsilon}\cdot\frac{1}{1+\delta}$$

ואם נבחר $\epsilon > 0$ קטן דיו, נקבל כי $\|\lambda\| < 1$, כנדרש. ▲

הוכחה: נניח כי X מרחב בנך ספרבילי. נקבע $A = \{x_i\} \subset X$ תת קבוצה צפופה בכדור היחידה. נגדיר העתקה $\pi : l^1(\mathbb{N}) \to X$ על ידי $\pi\lambda = \sum \lambda_i x_i$. נשים לב כי $\|\pi\lambda\| \leq \sum|\lambda_i| = \|\lambda\| < \infty$. כמו כן ניתן לראות כי π לינארית ורציפה. מהלמה נובע כי π העתקה על. לכן $X, {}^{l^2(\mathbb{N})}/_{\ker\pi}$ איזומורפיים. נשאיר כתרגיל להראות כי π היא גם איזומטריה. ■

הגדרה: יהי X מרחב בנך. לתת מרחב $M \subset X$ הגדרנו $M^{\perp} = \{\lambda \in X^* \mid \forall_{m\in M},\, \lambda m = 0\}$. לתת מרחב $N \subset X^*$ נגדיר,

$${}^{\perp}N = \{x \in X \mid \forall_{\lambda\in N},\, \lambda x = 0\}$$

טענה: יהי X מרחב בנך. לכל תת מרחב $M \subset X$ ולכל תת מרחב $N \subset X^*$, מתקיים $\overline{M} = {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ ומתקיים $\overline{N} = \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$.

טענה: יהי X מרחב בנך ויהי $M \subset X$ תת מרחב סגור. אזי,

1. יש איזומטריה על $M^* \to {}^{X^*}/_{M^{\perp}}$.
2. יש איזומטריה על $M^{\perp} \to \left({}^{X}/_{M}\right)^*$.

הוכחה:

1. נגדיר העתקה $\sigma : M^* \to {}^{X^*}/_{M^{\perp}}$ באופן הבא: בהינתן $\lambda \in M^*$, ממשפט האן בנך ניתן להרחיב אותו ל-$\tilde{\lambda} \in X^*$ מבלי לשנות את הנורמה. אם כך נגדיר $\sigma\lambda = \left[\tilde{\lambda}\right]$. ברור כי σ לינארית.

- נראה כי σ מוגדרת היטב: יהיו $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ זוג הרחבות של λ. אז $\left(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2\right)|_M = \lambda - \lambda \equiv 0$, ולכן $\left[\tilde{\lambda}_1\right] = \left[\tilde{\lambda}_2\right]$.
- נראה כי σ על: בהינתן $[x^*] \in {}^{X^*}/_{M^{\perp}}$, אז עבור $x^*|_M \in M^*$ מתקיים $\sigma x^*|_M = [x^*]$.

- נראה כי σ איזומטריה: יהי $m^* \in M^*$, נרצה להראות כי עבור $x^* \in X^*$ הרחבה שלו,

$$\|[x^*]\|_{X^*/M^\perp} = \|\sigma m^*\|_{X^*/M^\perp} = \|m^*\|_{M^*}$$

מצד אחד, באופן כללי מתקיים,

$$\|m^*\|_{M^*} \leq \inf_{y^* \in [x^*]} \|y^*\|_{X^*} = \|[x^*]\|_{X^*/M^\perp}$$

מצד שני, ממשפט האן בנך יש x^* הרחבה של m^*, עם $\|x^*\|_{X^*} = \|m^*\|_{M^*}$, ולכן להרחבה זו $\|m^*\|_{M^*} \geq \|[x^*]\|_{X^*/M^\perp}$.

2. תהי $\pi : X \to {}^{X}/_{M}$ העתקת המנה הטבעית. נגדיר העתקה $\sigma : \left({}^{X}/_{M}\right)^* \to M^\perp$ על ידי $\sigma\lambda = \lambda \circ \pi$. נשאיר כתרגיל להראות לינאריות, על ואיזומטריה. ■

טענה: יהי X מרחב בנך.

1. X רפלקסיבי אם ורק אם X^* רפלקסיבי.
2. X רפלקסיבי וספרבילי אם ורק אם X^* רפלקסיבי וספרבילי.
3. אם X רפלקסיבי, אז כל תת מרחב סגור שלו רפלקסיבי.
4. אם $Y \subset X$ תת מרחב סגור, אז X רפלקסיבי אם ורק אם $Y, {}^{X}/_{Y}$ שניהם רפלקסיביים.

16 הטופולוגיה החלשה (מרחבים נורמיים)

הגדרה: יהי X מרחב נורמי. נאמר כי סדרה $(x_n) \subset X$ **מתכנסת חלש** לאיבר $x \in X$, אם לכל $x^* \in X^*$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x)$. בדומה למרחבי מכפלה פנימית, נסמן במקרה זה $x_n \xrightarrow{w} x$.

טענה: יהי X מרחב נורמי, ונניח כי $x_n \xrightarrow{w} x$. אזי,

1. (x_n) חסומה (בנורמה)
2. $x \in \overline{\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}(\{x_n\})}$
3. $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$

הוכחה:

1. לכל $x^* \in X^*$ הסדרה $(x^*(x_n))$ מתכנסת ולכן חסומה. ממשפט החסימות במידה שווה נובע כי $(\iota x_n) \subset X^{**}$ סדרה חסומה עבור $\iota : X \to X^{**}$ ההעתקה הטבעית, ומהיות ι איזומטריה נובע כי (x_n) חסומה.
2. נסמן $Y = \mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}(\{x_n\})$. נניח בשלילה כי $x \notin \overline{Y}$. ממסקנה ממשפט האן בנך יש פונקציונל $\lambda \in X^*$ שמקיים $\lambda x = \|x\|$ וגם $\lambda\restriction_{\overline{Y}} \equiv 0$, ולכן (λx_n) לא מתכנסת ל-x, בסתירה להתכנסות חלשה $x_n \xrightarrow{w} x$.
3. ממשפט האן בנך יש $x^* \in X^*$ שעבורו $x^*(x) = \|x\|$ וגם $\|x^*\|_{X^*} = 1$. אם כך נובע,

$$\|x\| = |x^*(x)| = \lim_{n\to\infty} |x^*(x_n)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

כאשר אי השוויון נובע מכך שמתקיים $|x^*(x_n)| \leq \|x^*\| \|x_n\| = \|x_n\|$. ■

טענה: יהי X מרחב בנך רפלקסיבי ותהי $K \subset X$ תת קבוצה. אזי K חסומה אם רק אם לכל סדרה $(x_n) \subset K$ יש תת סדרה מתכנסת חלש.

הוכחה:

- בכיוון אחד, אם K לא חסומה אז יש סדרה $(x_n) \subset K$ שמקיימת $\|x_n\| \to \infty$. אם הייתה לסדרה זו תת סדרה שמתכנסת חלש, היא הייתה חסומה, ולכן אין לה תת סדרה שמתכנסת חלש.
- בכיוון שני, נניח כי K חסומה ותהי סדרה $(x_n) \subset K$. נתון כי $\|x_n\| \leq M$ לאיזה קבוע $M > 0$. נתבונן בתת המרחב הסגור $Y = \overline{\operatorname{Span}_{\text{Alg}}(\{x_n\})} \subset X$. מטענה קודמת, מהיות X רפלקסיבי נובע כי Y רפלקסיבי. מהיות Y גם ספרבילי נובע לפי טענה קודמת כי Y^* גם ספרבילי.

  נקבע $(y_n^*) \subset Y^*$ קבוצה בת מניה צפופה, ונשתמש בטיעון אלכסון: $(y_1^*(x_n))$ סדרה חסומה (כי (x_n) חסומה), ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $(y_1^*(x_{n,1}))$. בשלב הבא, $(y_2^*(x_{n,1}))$ סדרה חסומה (מאותה הסיבה), ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $(y_2^*(x_{n,2}))$. נמשיך באינדוקציה ונקבל שלכל k יש תת סדרה $(x_{n,k})$ שמתכנסת על הפונקציונלים $y_1^*, \ldots, y_k^*$. נקבל תת סדרה $(x_{n,n})$ שמתכנסת על כל $y_k^* \in Y^*$. כלומר מתקיים,

  $$\lim_{n\to\infty} y_k^*(x_{n,n}) = \lim_{n\to\infty} \iota x_{n,n}(y_k^*) := \lambda y_k^*$$

  כאשר $\iota : X \to X^{**}$ האיזומטריה הטבעית, שהיא גם על מהנחת הרפלקסיביות.

  נשים לב כי $(y_k^*) \subset Y^*$ צפופה, וכן $\|\iota x_{n,n}\| = \|x_{n,n}\| \leq M$, ולכן לכל $y_0^* \in Y^*$ קיים הגבול,

  $$\lim_{n\to\infty} \iota x_{n,n}(y_0^*) = \lambda y_0^*$$

  הפונקציונל $\lambda \in Y^{**}$ הוא לינארי וחסום, ומרפלקסיביות Y^* נובע שקיים $y_0 \in Y$ כך שלכל $y^* \in Y^*$ מתקיים $\lambda y^* = y^*(y_0)$.

  כעת בהינתן $x^* \in X^*$, אם נסמן $y^* = x^* |_Y$ נקבל,

  $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x^*(x_{n,n}) &= \lim_{n\to\infty} y^*(x_{n,n}) = \lim_{n\to\infty} \iota x_{n,n}(y^*) \\ &= \lambda y^* = y^*(x_0) = x^*(x_0)\end{aligned}$$

  זה קורה לכל $x^* \in X^*$, ולכן $x_{n,n} \xrightarrow{w} y_0$. ■

מסקנה: אם X מרחב בנך רפלקסיבי, אז כל סדרת קושי חלשה מתכנסת חלש בתוך X.

הוכחה: תהי $(x_n) \subset X$ סדרת קושי חלשה. כלומר לכל $x^* \in X^*$ מתקיים כי $(x^*(x_n))$ סדרת מספרים מתכנסת. ממשפט החסימות במידה שווה נובע כי (x_n) חסומה, ולכן מהטענה הקודמת יש תת סדרה (x_{n_k}) מתכנסת חלש לאיזה $x_0 \in X$. כעת קל לראות כי $x_n \xrightarrow{w} x$, כנדרש. ■

למה: יהי X מרחב בנך, ותהי $K \subset X$ קבוצה קמורה וסגורה. אז K סגורה להתכנסות חלשה. כלומר אם $(x_n) \subset K$ סדרה מתכנסת חלש $x_n \xrightarrow{w} x_0 \in X$, אז $x_0 \in K$.

הוכחה: אם בשלילה $x_0 \notin K$, אז נפריד את הקבוצה הקמורה והסגורה K מהקבוצה הקמורה והקומפקטית $\{x_0\}$ על ידי פונקציונל לינארי רציף ϕ, המקיים $\phi(x_0) < \inf \phi(K)$. מכאן ינבע כי $\phi(x_n)$ לא מתכנסת ל-$\phi(x_0)$, בסתירה להנחה. ▲

חלק VII
משפט ההעתקה הפתוחה; משפט הגרף הסגור

17 משפט ההעתקה הפתוחה

משפט: יהיו X,Y מרחבי בנך. יהי $T:X\to Y$ אופרטור לינארי רציף שהוא על Y. אזי T העתקה פתוחה (כלומר מעביר קבוצה פתוחה לקבוצה פתוחה).

הוכחה: מספיק להראות שלכל $x\in X$ וכדור פתוח $x\in B_r(x)\subset X$, מתקיים כי $TB_r(x)$ מכילה כדור פתוח המכיל את Tx.

נשים לב כי $B_r(x)=x+B_r(0)$, ולכן מלינאריות $TB_r(x)=Tx+TB_r(0)$, ואם כך די להראות כי $TB_r(0)$ מכיל כדור פתוח המכיל את $0\in Y$.

ללא הגבלת הכלליות נניח $r=1$ (מלינאריות ניתן להכפיל בקבוע), ונסמן $B:=B_1(0)\subset X$. נראה כי TB מכילה כדור פתוח המכיל את $0\in Y$.

נשים לב B בולעת, כלומר ניתן לכתוב $X=\bigcup_n nB$. כמו כן נתון כי T על, ולכן,

$$Y=TX=\bigcup_n nTB$$

ולכן גם $Y=\bigcup_n n\overline{TB}$. אבל Y מרחב בנך, ולכן ממשפט בייר נובע שיש n שעבורו $n\overline{TB}$ בעלת פנים לא ריק. מלינאריות T נובע כי $\overline{TB}$ בעלת פנים לא ריק.

- נראה כי $0\in\overline{TB}$ נקודה פנימית.

  נשים לב כי כל אחת מהקבוצות $B,TB,\overline{TB}$ היא סימטרית (כלומר מכילה את x אם ורק אם היא מכילה את $-x$).
  כמו כן כל אחת מהקבוצות $B,TB,\overline{TB}$ היא קמורה (כי B קמורה ו-T לינארית, וסגור של קבוצה קמורה הוא קבוצה קמורה).

  נשים לב שאם $y\in\overline{TB}$ נקודה פנימית כלשהי, נאמר $B_\rho(y)\subset\overline{TB}$, אז מסימטריות נובע כי $\pm y\in\overline{TB}$, ומקמירות נובע כי,

$$0=\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot(-y)\in\overline{TB}$$

- נראה כי $0\in TB$ נקודה פנימית.

  נסמן $D=B_1(0)\subset Y$. ראינו כי $0\in\overline{TB}$ נקודה פנימית, אז יש $\delta>0$ מספיק קטן שעבורו $\delta D\subset\overline{TB}$.
  לכל $y\in\delta D$, מצפיפות TB בתוך $\overline{TB}$, מלמה שהראינו לעיל נובע שיש סדרה $\lambda=(\lambda_i)$ עם $\|\lambda\|_{l^1}\le 1$, ויש סדרה $(Tx_i)\subset TB$ כך שמתקיים $y=\sum_i\lambda_iTx_i$. מהיות X מרחב בנך נובע כי מוגדר האיבר $x=\sum_i\lambda_ix_i$, ונקבל כי,

$$\|x\|\le\sum_i|\lambda_i|\,\|x_i\|<\sum_i|\lambda_i|=\|\lambda\|_{l^1}\le 1$$

  כלומר $x\in B$, ומרציפות T נובע כי,

$$Tx=T\left(\sum_i\lambda_ix_i\right)=\sum_i\lambda_iTx_i=y$$

  כלומר $y\in TB$. אם כך קיבלנו כי $\delta D\subset TB$, ואכן $0\in TB$ נקודה פנימית, כנדרש. ■

מסקנה: אם X,Y מרחבי בנך, $T:X\to Y$ אופרטור לינארי רציף, חח"ע ועל, אז T הומאומורפיזם.

הוכחה: מחח"ע ועל T, יש אופרטור הופכי $T^{-1}Y\to X$. לינאריות T^{-1} נובעת ישירות מלינאריות T, ורציפות T^{-1} נובעת מהיות T פתוחה. ▲

מסקנה: נסמן $\mathbb{T}={}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}$. יהי $l^{\infty}(\mathbb{Z})=\{(a_n)\mid \sup_n|a_n|<\infty\}$ עם נורמת הסופרימום, ונתבונן בתת המרחב $C_0(\mathbb{Z})$ של הסדרות שגבולן 0 (בשני הצדדים). יהי $T:L^1(\mathbb{T})\to C_0(\mathbb{Z})$ האופרטור $T:f\mapsto\left(\hat{f}(n)\right)$, כאשר $\hat{f}(n)=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx$ מקדם פורייה ה-n של f.

נשים לב כי אכן $\left(\hat{f}(n)\right)\in C_0(\mathbb{Z})$, מהלמה של רימן לבג. נשים לב עוד כי T רציפה, היות שמתקיים $\left|\hat{f}(n)\right|\le\|f\|_1$. נשאיר כתרגיל להראות כי T חח"ע (כלומר, פונקציה של $L^1([0,1])$ נקבעת על ידי מקדמי פורייה שלה).

מתקיים כי T אינה על (כלומר, לא כל סדרה $(a_n)\in C_0(\mathbb{Z})$ היא סדרת מקדמי פורייה של איזו פונקציה $f\in L^1([0,1])$). לו בשלילה T הייתה על, לפי המסקנה הקודמת היא הייתה הומאומורפיזם של $L^1(\mathbb{T})$ על $C_0(\mathbb{Z})$.

אבל מצב זה לא ייתכן, כי $C_0(\mathbb{Z})^*\cong l^1(\mathbb{Z})$ מרחב ספרבילי, בעוד ש-$L^1([0,1])^*\cong L^{\infty}([0,1])$ לא ספרבילי.

מסקנה: אם X,Y מרחבי בנך, $T:X\to Y$ אופרטור לינארי חח"ע ורציף, אזי $TX\subset Y$ תת מרחב סגור, אם ורק אם יש $c>0$ שעבורו $\|Tx\|\ge c\|x\|$ לכל $x\in X$.

הוכחה: בכיוון ראשון, אם $TX\subset Y$ תת מרחב סגור, אז מהיות Y בנך נובע כי הוא מרחב בנך. לכן $T:X\to TX$ אופרטור לינארי רציף, חח"ע ועל, ולכן יש הומאומורפיזם $X\cong TX$. כלומר $T^{-1}:TX\to X$ אופרטור רציף ולכן חסום, כלומר מתקיים,

$$\|x\|=\left\|T^{-1}Tx\right\|\le\left\|T^{-1}\right\|_{\text{op}}\|Tx\|$$

והקבוע $c=\frac{1}{\|T^{-1}\|_{\text{op}}}$ מקיים את הנדרש.

בכיוון שני, אם לאיזה $c>0$ מתקיים $\|Tx\|\ge c\|x\|$ לכל $x\in X$, נראה כי TX סגור. נניח כי $Tx_n\to y\in Y$ עבור $(x_n)\subset X$. אזי,

$$\|x_n-x_m\|\le\frac{1}{c}\|T(x_n-x_m)\|\to 0$$

ולכן $(x_n)\subset X$ סדרת קושי. מהיות X בנך יש לה גבול $x\in X$, ומרציפות T נובע כי $y=Tx$, כלומר $y\in TX$. לכן TX סגורה. ▲

מסקנה: אם X,Y מרחבי בנך, אז יש אופרטור לינארי רציף $T:X\to Y$ על Y, אם ורק אם Y הומאומורפי למרחב מנה של X (כלומר $Y\cong{}^{X}/_{M}$ עבור $M\subset X$ תת מרחב סגור).

הוכחה: בכיוון ראשון, אם $\tau:{}^{X}/_{M}\to Y$ הומאומורפיזם עבור $M\subset X$ סגור, נתבונן בהטלה הטבעית $\pi:X\to{}^{X}/_{M}$ ונגדיר $T:X\to Y$ על ידי $T=\tau\circ\pi$. נשים לב כי π,τ שתיהן רציפות ועל הטווחים המתאימים, ולכן T אופרטור רציף ועל.

בכיוון שני, אם $T:X\to Y$ אופרטור לינארי רציף ועל, נתבונן בתת המרחב הסגור $M:=\ker T\subset X$, וההעתקה $\tau:{}^{X}/_{M}\to Y$ המוגדרת $\tau:[x]\mapsto Tx$ היא לינארית, רציפה, חח"ע ועל, וממסקנה קודמת היא הומאומורפיזם. ▲

מסקנה: יהי X מרחב לינארי, ויהיו $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ זוג נורמות על X, שביחס לשתיהן X מרחב בנך. אם יש קבוע $c>0$ המקיים $\|\cdot\|_2\le c\|\cdot\|_1$, אז שתי הנורמות שקולות.

הוכחה: נתבונן בהעתקת הזהות $\text{Id}:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$. מההנחה נובע כי $\|\text{Id}x\|_2\le c\cdot\|x\|_1$, ולכן Id העתקה רציפה. בבירור Id חח"ע ועל, ולכן היא הומאומורפיזם, כלומר $\text{Id}^{-1}:(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$ רציפה. כלומר $\left\|\text{Id}^{-1}x\right\|_1\le C\|x\|_2$ לאיזה $C>0$. מכאן כי $\frac{1}{C}\|\cdot\|_1\le\|\cdot\|_2\le c\|\cdot\|_1$, כלומר הנורמות שקולות. ▲

17.1 הטלות במרחבי בנך

סימון: לאופרטור לינארי $T : X \to Y$, נסמן $R(T) = \{Tx \mid x \in X\}$ ונסמן $N(T) = \{x \in X \mid Tx = 0\}$.

הגדרה: יהי X מרחב נורמי ויהי $Y \subset X$ תת מרחב סגור. נאמר כי Y הוא **מחובר ישר** של X, אם קיים תת מרחב סגור $Z \subset X$, כך שכל $x \in X$ ניתן להצגה יחידה $x = y + z$ עבור $y \in Y, z \in Z$.

הגדרה: יהי X מרחב נורמי. אופרטור לינארי ורציף $P : X \to X$ נקרא **אופרטור הטלה**, אם מתקיים $P \circ P = P$.

טענה: אם $P : X \to X$ אופרטור הטלה, אז $R(P) \subset X$ תת מרחב סגור.

הוכחה: מהיות P אופרטור הטלה נובע כי $P|_{R(P)} = \mathrm{Id}$. לכן $R(P) = N(\mathrm{Id} - P)$. אבל $\mathrm{Id} - P$ רציף (כי P רציף), וכל גרעין של אופרטור רציף הוא תת מרחב סגור. ▲

טענה: יהי X מרחב בנך ויהי $Y \subset X$ תת מרחב סגור. Y מחובר ישר של X אם ורק אם קיים אופרטור הטלה $P : X \to X$ שמקיים $R(P) = Y$.

הוכחה: בכיוון ראשון, אם יש אופרטור הטלה P כנ"ל, נתבונן בתת המרחב הסגור $Z := N(P) \subset X$, ונקבל כי כל $x \in X$ ניתן לכתוב $x = Px + (x - Px)$ כאשר $Px \in Y,\ x - Px \in Z$. כמו כן הצגה זו יחידה כי $R(P) \cap N(P) = \{0\}$.

בכיוון שני, נניח כי Y מחובר ישר של X ביחס לאיזה תת מרחב סגור $Z \subset X$. נגדיר מרחב חדש בצורה הבאה,

$$Y \oplus Z := \{(y, z) \mid y \in Y, z \in Z\}$$

עם הנורמה,

$$\|(y, z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$$

מהיות Y, Z מרחבי בנך נובע כי $Y \oplus Z$ מרחב בנך.

נגדיר $T : Y \oplus Z \to X$ על ידי $T(y, z) = y + z$. ברור כי T אופרטור לינארי. נשים לב כי מהיות Y מחובר ישר נובע כי כל $x \in X$ ניתן להצגה יחידה בצורה $x = y + z$ עבור $y \in Y, z \in Z$, ולכן T חח"ע ועל. כמו כן T רציף כי,

$$\|T(y, z)\| = \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| = \|(y, z)\|_1$$

אם כך ממסקנה קודמת נובע כי T הומאומורפיזם, כלומר יש $c > 0$ שעבורו,

$$\|y\| + \|z\| = \|(y, z)\|_1 \leq c\,\|T(y, z)\| = c\,\|y + z\|$$

אם כך נגדיר $P : X \to Y$ על ידי $P(y + z) = y$. זה אופרטור לינארי, קל לראות כי $P \circ P = P$, וכן הוא רציף כי,

$$\|P(y + z)\| = \|y\| \leq \|y\| + \|z\| \leq c\,\|y + z\|$$

כנדרש. ■

הגדרה: מרחב נורמי X נקרא **סכום ישר** של זוג תתי מרחבים סגורים $Y, Z \subset X$, אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. כל $x \in X$ ניתן להצגה יחידה $x = y + z$ עבור $y \in Y, z \in Z$.
2. הנורמה של X שקולה לנורמה של $Y \oplus Z$ המוגדרת $\|(y, z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$.

הערה: בניגוד למרחבי הילברט, לא כל תת מרחב סגור $Y \subset X$ הוא מחובר ישר של X. עם זאת, אם $Y \subset X$ תת מרחב סוף ממדי, אז הוא כן מחובר ישר. יתר על כן, אם $\dim Y = n < \infty$ אז יש הטלה $P : X \to Y$ המקיימת $\|P\| \leq n$.

18 משפט הגרף הסגור

הגדרה: יהיו X,Y מרחבים נורמיים. אופרטור לינארי $T:D(T)\to Y$ לאיזו קבוצה $D(T)\subset X$ נקרא **אופרטור סגור**, אם מתקיים התנאי הבא:

לכל סדרה $(x_n)\subset D(T)$, אם מתקיים גם $x_n\to x\in X$ וגם $Tx_n\to y\in Y$, אזי $x\in D(T)$ וגם $Tx=y$.

הערה: נשים לב כי אם $(x_n)\subset D(T)$ מקיימת $x_n\to x\in X$, לא ניתן להסיק דבר לגבי התכנסות Tx_n, ואפילו אם נתון כי $x\in D$.

טענה: אופרטור לינארי $T:D(T)\to Y$ הוא אופרטור סגור, אם ורק אם הגרף שלו,

$$\Gamma(T):=\left\{\begin{pmatrix}x\\Tx\end{pmatrix}\mid x\in D(T)\right\}\subset X\oplus Y$$

קבוצה סגורה במרחב $X\oplus Y$, עם הנורמה $\|(x,y)\|_1=\|x\|_X+\|y\|_Y$.

הוכחה: בכיוון ראשון, אם T אופרטור סגור, אז בהינתן סדרה $\binom{x_n}{Tx_n}\to\binom{x}{y}\in X\oplus Y$, כלומר $\|x_n\|+\|Tx_n\|\to\|x\|+\|y\|$, נובע כי $x_n\to x\in X$ וכי $Tx_n\to y\in Y$, ולכן מהגדרת אופרטור סגור נובע כי $y=Tx$, כלומר $\binom{x}{y}=\binom{x}{Tx}\in\Gamma(T)$, ולכן $\Gamma(T)$ קבוצה סגורה.

בכיוון שני, אם $\Gamma(T)$ קבוצה סגורה, אז בהינתן $x_n\to x\in X$ עבור $(x_n)\subset D(T)$ כך שמתקיים גם $Tx_n\to y\in Y$, אז מתקיים $\|(x_n,Tx_n)\|=\|x_n\|+\|Tx_n\|\to\|x\|+\|y\|=\|(x,y)\|$, ומסגירות $\Gamma(T)$ נובע כי $\binom{x_n}{Tx_n}\to\binom{x}{y}\in\Gamma(T)$, כלומר $y=Tx$. ■

טענה: אם $T:D(T)\to R(T)$ אופרטור לינארי חח"ע, אז T אופרטור סגור אם ורק אם $T^{-1}:R(T)\to D(T)$ אופרטור סגור.

הוכחה: בכיוון ראשון, נתבונן באופרטור $T^{-1}:R(T)\to D(T)$. נניח כי $Tx_n\to Tx\in R(T)$ וכי $x_n=T^{-1}Tx_n\to w\in D(T)$. צריך להראות כי $T^{-1}w=T^{-1}Tx=x$. אבל מהיות T סגור, על ידי ההנחה $x_n\to w\in D(T)$ וגם $Tx_n\to Tx$ נובע כי $w=Tx$, ולכן $T^{-1}w=T^{-1}Tx=x$. ההוכחה בכיוון השני מתקבלת באותו אופן. ■

טענה: אם $T:D(T)\to\mathbb{C}$ פונקציונל סגור, אז הוא חסום.

הוכחה: אם בשלילה T לא חסום אז הקבוצה $\{x\in D(T)\mid Tx=1\}\subset D(T)$ צפופה (ההוכחה דומה להוכחה שהגרעין של אופרטור לא חסום צפוף). כמו כן נשים לב כי קבוצה זו סגורה כי T אופרטור סגור. אבל 0 לא נמצא בקבוצה זו, כלומר מצאנו קבוצה סגורה וצפופה ב-X שלא מכילה את 0, וזו סתירה. ■

טענה: אם $T:D(T)\to Y$ אופרטור חסום וכן $D(T)\subset X$ סגורה, אז T אופרטור סגור.

אם בנוסף Y מרחב בנך, אז גם הכיוון ההפוך נכון: אם T סגור וחסום, אז $D(T)$ סגורה.

הוכחה: נניח כי $x_n\to x\in X$ עבור $(x_n)\subset D(T)$, וכי $Tx_n\to y\in Y$. מהיות $D(T)$ סגורה נובע כי $x\in D(T)$, ומהיות T חסום ולכן רציף נובע כי $Tx_n\to Tx$, כלומר $Tx=y$, כנדרש.

כעת נניח כי Y מרחב בנך, ונניח כי T סגור וחסום. תהי $x_n\to x\in X$ עבור $(x_n)\subset D(T)$. מהיות T חסום ולכן רציף נובע כי $(Tx_n)\subset Y$ סדרת קושי, ולכן $Tx_n\to y\in Y$. מהיות T סגור נובע כי $x\in D(T)$, כנדרש. ■

למה: יהיו X,Y מרחבי בנך, ויהי $T:X\to Y$ אופרטור לינארי חסום וחח"ע. אם $R(T)\subset Y$ לא סגור, אז T^{-1} העתקה שהיא סגורה ולא חסומה.

הוכחה: נתון כי $D(T)=X$ ולכן זו קבוצה סגורה. נתון גם כי T חסום, ולכן מטענה קודמת T אופרטור סגור.

אם כך לפי טענה קודמת, $T^{-1}:R(T)\to X$ אופרטור סגור. אבל נתון כי $R(T)=D\left(T^{-1}\right)$ לא סגור, ולכן לפי טענה קודמת T^{-1} לא חסום. ▲

דוגמה: יהי $T : L^1(\mathbb{T}) \to C_0(\mathbb{Z}) \subset l^\infty(\mathbb{Z})$ האופרטור הלינארי $T : f \mapsto \left(\hat{f}(n)\right)$ שהגדרנו כבר לעיל. ראינו כי T חח"ע ורציף, וכן כי $R(T) \neq C_0(\mathbb{Z})$.

עם זאת ניתן לראות כי $\overline{R(T)} = C_0(\mathbb{Z})$, שכן כל הסדרות שיש בהן מספר סופי של קואורדינטות שונות מאפס שייכות ל-$R(T)$ (כי הן מתקבלות מהפולינומים הטריגונומטריים הסופיים).

לכן מהלמה האחרונה נובע כי $T^{-1} : R(T) \subset C_0(\mathbb{Z}) \to L^1(\mathbb{T})$ אופרטור סגור ולא רציף.

משפט: (**משפט הגרף הסגור**) יהיו X, Y מרחבי בנך. כל אופרטור לינארי סגור $T : X \to Y$, הוא רציף.

הוכחה: מהיות X, Y מרחבי בנך נובע כי $X \oplus Y$ מרחב בנך. נתון כי T אופרטור סגור, כלומר $\Gamma(T) \subset X \oplus Y$ קבוצה סגורה במרחב בנך, ולכן $\Gamma(T)$ מרחב בנך.

יהי $S : \Gamma(T) \to X$ האופרטור $S : (x, Tx) \mapsto x$. אז S אופרטור לינארי, רציף, חח"ע ועל, ולכן ממסקנה של משפט ההעתקה הפתוחה S הומאומורפיזם. כלומר $S^{-1} : X \to \Gamma(T)$ אופרטור חסום, ויש $c > 0$ המקיים $\left\|S^{-1}x\right\|_1 \leq c\|x\|$ לכל $x \in X$. מכאן כי,

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|_1 = \left\|S^{-1}x\right\|_1 \leq c\|x\|$$

כלומר T רציף. ■

משפט: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, ויהי $T : D(T) \to \mathbf{H}$ אופרטור לינארי עבור $D(T) \subset \mathbf{H}$ תת מרחב צפוף. נניח כי T **סימטרי** (כלומר $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ לכל $x, y \in \mathbf{H}$), אזי T רציף.

הוכחה: ממשפט הגרף הסגור די להראות כי T אופרטור סגור. אם כך נניח כי $x_n \to x \in \mathbf{H}$ עבור $(x_n) \subset D(T)$, וכן $Tx_n \to y \in \mathbf{H}$. נראה כי $Tx = y$.

לכל $w \in \mathbf{H}$, מצד אחד מתקיים,

$$\langle T(x_n - x), w\rangle = \langle Tx_n - Tx, w\rangle \to \langle y - Tx, w\rangle\ ,\ \ n \to \infty$$

ומצד שני, מהיות T סימטרי מתקיים,

$$\langle T(x_n - x), w\rangle = \langle x_n - x, w\rangle \to \langle 0, w\rangle = 0\ ,\ \ n \to \infty$$

כלומר נובע כי $\langle y - Tx, w\rangle = 0$ לכל $w \in \mathbf{H}$, ולכן $Tx = y$, כנדרש. ■

דוגמה: נתבונן במרחב הילברט $\mathbf{H} = L^2([0,1])$. נתבונן בתת המרחב הצפוף $D := \{f \in \mathbf{H} \mid f \in C^\infty,\ f(0) = f(1)\} \subset \mathbf{H}$, ויהי $\partial^2 : D \to \mathbf{H}$ האופרטור $\partial^2 : f \mapsto -\frac{d^2}{dx^2}f(x)$. ניתן לראות כי,

$$\left\langle \partial^2 f, g\right\rangle = \int_0^1 \left(-\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right) g(x)\, dx = \left\langle f, \partial^2 g\right\rangle$$

על ידי שימוש פעמיים באינטגרציה בחלקים. לכן מהמשפט נובע כי ∂^2 רציף.

18.1 אופרטורים סגירים

הגדרה: יהיו X, Y מרחבים לינאריים, ויהי $T : D(T) \to Y$ אופרטור לינארי עבור $D(T) \subset X$. אופרטור לינארי $S : D(S) \to Y$ עבור $D(S) \subset X$ נקרא **הרחבה** של T, אם $D(T) \subset D(S)$, וגם $S|_{D(T)} = T$.

הגדרה: יהיו X, Y מרחבים נורמיים, ויהי $T : D(T) \to Y$ אופרטור לינארי עבור $D(T) \subset X$. אומרים כי T **אופרטור סגיר**, אם הוא ניתן להרחבה לאופרטור סגור.

למה: יהיו X,Y מרחבים נורמיים. יהי $W\subset X\oplus Y$ תת מרחב. אזי W הוא גרף של איזה אופרטור לינארי $T:D(T)\to Y$ עבור $D(T)\subset X$, אם ורק אם W לא מכיל נקודות מהצורה $(0,y)$ עבור $0\neq y\in Y$.

הוכחה: בכיוון ראשון, אם $W=\Gamma(T)$ לאיזה אופרטור $T:D(T)\to Y$, אז בהינתן $(0,y)\in W$ מתקיים $y=T0=0$, כלומר $y=0$.

בכיוון שני, אם W לא מכיל נקודות מהצורה $(0,y)$ עבור $0\neq y\in Y$, אז לכל $x\in X$ יש $y\in Y$ יחיד שעבורו $(x,y)\in W$ (כי אם $(x,y),(x,y')\in W$, אז $(0,y-y')=(x,y)-(x,y')\in W$, ומההנחה נובע כי $y-y'=0$, כלומר $y=y'$). אם כך נוכל להגדיר $T:X\to Y$ על ידי $Tx=y$ כך ש-$(x,y)\in W$. ▲

למה: יהיו X,Y מרחבים נורמיים, ויהי $T:D(T)\to Y$ אופרטור לינארי עבור $D(T)\subset X$. אזי T סגיר אם ורק אם מתקיים התנאי הבא:

לכל סדרה $(x_n)\subset D(T)$ המקיימת $x_n\to 0$ וגם $Tx_n\to y\in Y$, מתקיים $y=0$.

הוכחה: בכיוון ראשון, נניח כי T סגיר על ידי הרחבה $S:D(S)\to Y$. כלומר S אופרטור סגור ולכן $\Gamma(S)\subset X\oplus Y$ קבוצה סגורה. נשים לב כי $\Gamma(T)\subset\Gamma(S)$, ומהיות $\Gamma(S)$ סגורה נובע כי $\overline{\Gamma(T)}\subset\Gamma(S)$. כעת אם T אופרטור סגור אז $\overline{\Gamma(T)}$ לא מכיל נקודות מהצורה $(0,y)$ עבור $0\neq y\in Y$ (כי $\Gamma(S)$ לא מכיל כאלה), ולכן הוא גרף של איזה אופרטור לינארי. כלומר נובע כי אם $(x_n,Tx_n)\to(0,y)$ אז $y=0$.

בכיוון שני, אם מתקיים התנאי הנ"ל, אז נובע כי הקבוצה $\overline{\Gamma(T)}$ לא מכילה נקודות מהצורה $(0,y)$ עבור $0\neq y\in Y$, ולכן מהלמה נובע כי $\overline{\Gamma(T)}$ גרף של איזה אופרטור סגור, כלומר T סגיר. ▲

דוגמה: נגדיר אופרטורים $T,S:D\to l^2(\mathbb{N})$ עבור $D=\left\{(x_n)\mid\sum_n n^4|x_n|^2<\infty\right\}\subset l^2(\mathbb{N})$,

$$T(x_n)=\begin{cases}-n^2x_n & n>1\\ \sum_{k=1}^{\infty}kx_k & n=1\end{cases}$$

$$S(x_n)=\begin{cases}n^2x_n & n>1\\ 0 & n=1\end{cases}$$

נשים לב כי T אופרטור מוגדר היטב,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}kx_k &= \sum_{k=1}^{\infty}k^2x_k\frac{1}{k}\\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}x^4|x_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}<\infty\end{aligned}$$

ומשיקול דומה נובע כי גם S אופרטור מוגדר היטב.

נשאיר כתרגיל להראות כי T,S אופרטורים סגורים. מצד שני, מתקיים כי,

$$(T+S)(x_n)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}kx_k,0,0,\ldots,0,\ldots\right)$$

נתבונן בסדרות $\frac{1}{n}e_n=\left(0,\ldots,0,\frac{1}{n},0,\ldots,0,\ldots\right)$ כאשר $\frac{1}{n}$ באינדקס ה-n, ונקבל כי,

$$(T+S)\left(\frac{1}{n}e_n\right)=(1,0,0,\ldots,0,\ldots)=e_1$$

וזאת על אף שמתקיים $\frac{1}{n}e_n\to 0$ כאשר $n\to\infty$. כלומר נובע כי $T+S$ אופרטור שאינו סגיר.

חלק VIII

מרחבים וקטוריים טופולוגיים

הגדרה: מרחב וקטורי טופולוגי הוא זוג (V,τ), כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{F}=\mathbb{R},\mathbb{C}$, עם טופולוגיה τ על V, כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

1. העתקת החיבור $V\times V\to V$ המוגדרת $(x,y)\mapsto x+y$, היא העתקה רציפה בשני המשתנים בטופולוגיה τ.
2. העתקת הכפל בסקלר $\mathbf{F}\times V\to V$ המוגדרת $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ היא העתקה רציפה בשני המשתנים בטופולוגיה τ.

טענה: במרחב וקטורי טופולוגי (V,τ), לכל $x_0\in V$, ההעתקה $x\mapsto x+x_0$ היא הומאומורפיזם של V על עצמו. כמו כן לכל $0\neq\lambda_0\in\mathbf{F}$, ההעתקה $x\mapsto\lambda x$ היא הומאומורפיזם של V על עצמו.

טענה: אם V,W מרחבים וקטוריים טופולוגיים, אופרטור לינארי $T:V\to W$ הוא רציף, אם ורק אם הוא רציף בנקודה אחת.

טענה: במרחב וקטורי טופולוגי (V,τ), כל סביבת אפס היא בולעת. כלומר, אפס היא נקודת תוך של כל סביבת אפס.

הוכחה: נניח כי $0\in U\in\tau$ סביבת אפס. נראה שלכל $x_0\in V$ יש $\delta>0$ כך שאם $|t|<\delta$ אז $tx_0\in U$.

נקבע $x_0\in V$ כלשהי, ונתבונן בהעתקה הרציפה $S:\mathbf{F}\to V$ המוגדרת $S\lambda=\lambda x_0$. נשים לב כי $0\in S^{-1}U\subset\mathbf{F}$, אבל $S^{-1}U$ קבוצה פתוחה של $\mathbf{F}$, ולכן יש $\delta>0$ כך שמתקיים $B_\delta\left(0\right)\subset S^{-1}U$. כלומר מתקיים $SB_\delta\left(0\right)\subset U$. במילים אחרות, עבור $|t|<\delta$ מתקיים כי $t\in B_\delta\left(0\right)$, ולכן $St=tx_0\in U$, כנדרש. ■

טענה: מרחב וקטורי טופולוגי (V,τ) הוא האוסדורף, אם ורק אם לכל בסיס של סביבות אפס $\{W_\alpha\}_\alpha$, מתקיים כי $\bigcap_\alpha W_\alpha=\{0\}$.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי. תת קבוצה $A\subset V$ נקראת **מאוזנת**, אם לכל $|\lambda|\leq1$, $\lambda A\subset A$.

תזכורת: בסיס לטופולוגיה τ הוא משפחת קבוצות β, כך שלכל $U\in\tau$ יש $B\in\beta$ עם $B\subset U$.

טענה: במרחב וקטורי טופולוגי (V,τ), משפחת סביבות האפס המאוזנות מהווה בסיס לסביבות אפס.

מסקנה: משפחת הקבוצות הפתוחות המתקבלת מהזזות ($W\mapsto W+x_0$) של סביבות האפס המאוזנות, הוא בסיס לטופולוגיה τ.

הוכחה: תהי $0\in W\in\tau$ סביבת אפס. נתבונן בהעתקה הרציפה $S:(\lambda,x)\mapsto\lambda x$. ברור כי $0\in S^{-1}W\subset\mathbf{F}\times V$, וזו קבוצה פתוחה, ולכן יש $\delta>0$ ויש סביבת אפס $0\in W_0\in\tau$, כך שמתקיים $S\left(B_\delta\left(0\right)\times W_0\right)\subset W$. כלומר לכל $|t|<\delta$ ולכל $x_0\in W_0$, מתקיים $S\left(t,x_0\right)=tx_0\in W$.

אם כך נקבל כי הקבוצה הפתוחה $U=\bigcup_{|\lambda|\leq\delta}\lambda W_0$ היא סביבת אפס (בבירור), היא מאוזנת (כי לכל $|\eta|\leq1$ מתקיים $\eta U=\bigcup_{|\lambda|\leq\delta}\eta\lambda W_0\subset U$) המכילה את W (כפי שנובע מהבנייה של W_0). ■

טענה: במרחב וקטורי טופולוגי (V,τ), משפחת סביבות האפס הקמורות והמאוזנות מהווה בסיס לסביבות האפס הקמורות.

הוכחה: תהי $0\in U\in\tau$ סביבת אפס קמורה. מהטענה הקודמת, יש $0\in W\in\tau$ מאוזנת המוכלת בתוך U. לכן $\lambda W\subset W$ לכל $|\lambda|\leq1$. בפרט אם $|\lambda|=1$ אז $W\subset\lambda^{-1}W$. כלומר, לכל $|\alpha|=1$ מתקיים $W\subset\alpha W\subset\alpha U$. נתבונן בקבוצה $A=\bigcap_{|\alpha|=1}\alpha U$, ומהיות W פתוחה נובע כי $W\subset A^o$. בנוסף A קמורה (כחיתוך של קמורות), ולכן גם A^o קמורה. נראה כי A מאוזנת. יהי $|\lambda|\leq1$, אז נכתוב $\lambda=re^{i\theta}$ לאיזה $0\leq r\leq1$, ונקבל כי,

$$\lambda A=re^{i\theta}A=\bigcap_{|\alpha|=1}re^{i\theta}\alpha U=\bigcap_{|\alpha|=1}\alpha rU\subset\bigcap_{|\alpha|=1}\alpha U=A$$

כאשר ההכלה נובעת מכך ש-U סביבת אפס קמורה, ולכן $rU\subset U$ לכל $0\leq r\leq1$, כי $ru=ru+(1-r)\cdot0$ לכל $u\in U$.

לא קשה לראות כי באופן כללי, מהיות A מאוזנת נובע כי A^o מאוזנת, ולכן $A^o\subset U$ סביבת אפס קמורה ומאוזנת. ■

למה: יהי V מרחב וקטורי, ותהי τ טופולוגיה כלשהי על V, אינווריאנטית להזזות (כלומר $U\in\tau\Longrightarrow U+x_0\in\tau$ לכל $x_0\in V$). נניח עוד כי τ מכילה בסיס לסביבות אפס $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\tau$ שכל קבוצותיו הן בולעות ומאוזנות.

אזי (V,τ) הוא מרחב וקטורי טופולוגי, אם ורק אם מתקיים התנאי הבא: לכל $\alpha\in A$ יש $\beta\in A$ כך שמתקיים $W_\beta+W_\beta\subset W_\alpha$.

הוכחה:

- בכיוון ראשון, אם (V,τ) מרחב וקטורי טופולוגי אז אופרטור החיבור רציף, ולכן לכל $\alpha\in A$ יש $\beta_1,\beta_2\in A$ כך שמתקיים $W_{\beta_1}+W_{\beta_2}\subset W_\alpha$. אזי מהיות $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ בסיס (ולכן סגור לחיתוכים סופיים) נובע כי יש $\beta\in A$ שעבורו $W_\beta=W_{\beta_1}\cap W_{\beta_2}$. אם כך מתקיים $W_\beta+W_\beta\subset W_{\beta_1}+W_{\beta_2}\subset W_\alpha$, כנדרש.
- בכיוון שני, נניח שמתקיים התנאי בלמה.
  - נראה את הרציפות של החיבור. מהיות τ אינווריאנטית להזזות, נובע כי די לבדוק רציפות של החיבור על סביבות אפס. כלומר אם $S:V\times V\to V$ היא ההעתקה $(x,y)\mapsto x+y$, יש להראות כי $0\in S^{-1}W_\alpha$ מכילה סביבת אפס לכל $\alpha\in A$. אבל מהתנאי שבלמה נובע כי יש $\beta\in A$ שעבורו $W_\beta+W_\beta\subset W_\alpha$, כלומר $0\in W_\beta+W_\beta\subset S^1W_\alpha$.
  - נראה את הרציפות של הכפל בסקלר.
  תחילה נשים לב שבאינדוקציה, לכל n יש $\beta\in A$ כך שמתקיים $W_\beta+W_\beta+\cdots+W_\beta=2^nW_\beta\subset W_\alpha$. מהיות W_α מאוזנת נובע כי $\lambda W_\alpha\subset W_\alpha$ לכל $|\lambda|<1$. מכאן כי $\lambda 2^nW_\beta\subset\lambda W_\alpha\subset W_\alpha$ עבור $\beta\in A$ כנ"ל.
  תהי $S:\mathbf{F}\times V\to V$ ההעתקה $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$. יהיו $\lambda_0\in\mathbf{F},x_0\in V$ כלשהם, ויהי $\alpha_0\in A$ כלשהו. נקבע $\alpha_1\in A$ שעבורו $W_{\alpha_1}+W_{\alpha_1}\subset W_{\alpha_0}$. בפרט W_{α_1} בולעת, ולכן יש $\delta>0$ שעבורו $\delta x_0\in W_{\alpha_1}$. אם כך מהטיעון שהזכרנו, יש $\alpha_2\in A$ כך שמתקיים $(|\lambda_0|+\delta)W_{\alpha_2}\subset W_{\alpha_1}$).
  נטען כי הסביבה הפתוחה $B_\delta(\lambda_0)\times(x_0+W_{\alpha_2})\subset\mathbf{F}\times V$ מקיימת את הנדרש. ואכן, לכל $x\in x_0+W_{\alpha_2}$ ולכל $\lambda\in\mathbf{F}$ המקיים $|\lambda-\lambda_0|<\delta$,

$$\lambda x-\lambda x_0=\lambda(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)x_0\in(\lambda_0+\delta)W_{\alpha_2}+W_{\alpha_1}\subset W_{\alpha_1}+W_{\alpha_1}\subset W_{\alpha_0}$$

  כלומר $B_\delta(\lambda_0)\times(x_0+W_{\alpha_2})\subset S^{-1}W_{\alpha_0}$, כנדרש. ■

בניה קנונית של מרחב וקטורי טופולוגי: **(סמי נורמות)** תהי $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה כלשהי של סמי נורמות על מרחב וקטורי V.[7] תהי τ הטופולוגיה החלשה ביותר על V, שביחס אליה ההעתקות $T_\alpha:V\to\mathbb{R}_{\geq0}$ המוגדרות $T_\alpha:x\mapsto\|x\|_\alpha$ כולן רציפות. אזי V הוא מרחב וקטורי טופולוגי.

הוכחה: נשים לב כי הקבוצות מהצורה,

$$W_{\alpha;\delta}=T_\alpha^{-1}B_{\delta_i}(0)=\{x\in V\mid T_\alpha x=\|x\|_\alpha<\delta\}$$

עבור בחירה שרירותית של $\alpha\in A,\ \delta\in\mathbb{R}_{\geq0}$, מהוות תת בסיס לטופולוגיה τ (כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של קבוצות מהטיפוס הנ"ל מהווה בסיס של τ).

נשים לב כי כל קבוצה $W_{\alpha;\delta}$ היא סביבת אפס (כי $\|0\|_\alpha=0$), מאוזנת ובולעת (מהומוגניות). כמו כן מתקיים התנאי שבלמה האחרונה, על ידי $W_{\alpha;\delta/2}+W_{\alpha;\delta/2}\subset W_{\alpha;\delta}$ (מאי שוויון המשולש). ■

הערה: במקרה שמרחב וקטורי טופולוגי (V,τ) מתקבל ממשפחה של סמי נורמות, אז τ האוסדורף אם ורק אם לכל $0\neq x\in V$ יש $\alpha\in A$ שעבורה $\|x\|_\alpha>0$.

הערה: אם A בת מניה וגם τ האוסדורף, אז τ מטריזבילית, על ידי המטריקה,

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\|x-y\|_i}{1+\|x-y\|_i}$$

מטריקה זו היא אינווריאנטית להזזות, אבל אינה הומוגנית.

[7] כלומר $\|\cdot\|_\alpha:V\to\mathbb{R}_{\geq0}$ העתקה הומוגנית, המקיימת את אי שוויון המשולש, אולם ייתכן $\|x\|_\alpha=0$ עבור $0\neq x\in V$. למשל $\|f\|=\left|\int f\right|$.

19 הטופולוגיה החלשה (מרחבים וקטוריים טופולוגיים)

בניה קנונית של מרחב וקטורי טופולוגי: (הטופולוגיה החלשה) תהי $\{(V_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ משפחה של מרחבים וקטוריים טופולוגיים, ויהי W מרחב לינארי, עם העתקות לינאריות $T_\alpha : W\to V_\alpha$ לכל $\alpha\in A$.

נגדיר טופולוגיה על W להיות הטופולוגיה החלשה ביותר שביחס אליה ההעתקות $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כולן רציפות.

תת בסיס של סביבות אפס לטופולוגיה המתקבלת בצורה זו, מורכב מקבוצות מהטיפוס,

$$W_{\alpha;U} := T_\alpha^{-1}U_\alpha$$

לכל $\alpha\in A$, כאשר $0\in U_\alpha\in\tau_\alpha$ סביבת אפס כלשהי. גם כאן ניתן לראות כי הבסיס המתקבל מחיתוכים סופיים של קבוצות מטיפוס זה מקיים את התנאי שבלמה, ולכן מתקבל מרחב וקטורי טופולוגי.

מקרה פרטי: תהי Φ משפחה כלשהי של פונקציונלים לינאריים מהצורה $W\to\mathbb{C}$, לאיזה מרחב וקטורי W. תהי $\sigma(W,\Phi)$ הטופולוגיה החלשה ביותר על W שעבורה כל איברי Φ רציפים, וכפי שהראינו לעיל מתקבל מרחב וקטורי טופולוגי $(W,\sigma(W,\Phi))$.

תת בסיס של סביבות אפס בטופולוגיה זו, הוא של קבוצות מהטיפוס $W_{\phi;\delta}=\phi^{-1}B_\delta(0)=\{x\mid |\phi(x)|<\delta\}$, עבור כל פונקציונל $\phi\in\Phi$.

הערה: הטופולוגיה החלשה מתקבלת גם כמקרה פרטי של הטופולוגיה המתקבלת מסמי נורמות, על ידי משפחת הסמי נורמות $\|x\|_\phi=|\phi(x)|$ לכל $\phi\in\Phi$.

הערה: נשים לב כי Φ היא תת קבוצה של מרחב הפונקציונלים $W\to\mathbb{C}$, ולכן ניתן לקחת את הסגור הלינארי שלה בתוך מרחב זה ולקבל תת מרחב לינארי, שנסמן $\overline{\Phi}$. עם זאת נשים לב כי $\sigma(W,\Phi)=\sigma\left(W,\overline{\Phi}\right)$, כי לכל $\phi_1,\phi_2\in\Phi$, מרציפותם ביחס לטופולוגיה $\sigma(W,\Phi)$ נובעת גם הרציפות של $\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2$ ביחס לאותה הטופולוגיה.

הערה: הטופולוגיה החלשה $\sigma(W,\Phi)$ היא האוסדורף אם ורק אם Φ מפרידת נקודות (כלומר, לכל $x,y\in W$ יש $\phi\in\Phi$ עם $\phi(x)\neq\phi(y)$).

מקרה פרטי חשוב: עבור מרחב נורמי X, **הטופולוגיה החלשה** שלו היא הטופולוגיה $\omega=\omega(X)=\sigma(X,X^*)$, עבור X^* המרחב הדואלי של X. זוהי הטופולוגיה של התכנסות חלשה אותה תארנו לעיל באופן כללי.

מקרה פרטי חשוב: עבור מרחב נורמי X, נתבונן במרחב הדואלי X^*. אזי ניתן להגדיר שתי טופולוגיות על X^*:

- **הטופולוגיה החלשה:** $\omega=\sigma(X^*,X^{**})$.
- **הטופולוגיה החלשה־כוכב:** $\omega^*=\sigma(X^*,\iota X)$, עבור $\iota:X\to X^{**}$ האיזומטריה הטבעית ($\iota x(\phi):=\phi(x)$).

הערה: נשים לב כי $\iota X\subset X^{**}$, אז בפרט כל הפונקציונלים של ιX הם ω־רציפים, ולכן ω חזקה מ-ω^* (כלומר $\omega^*\subset\omega$).

הערה: אם X מרחב רפלקסיבי אז ברור כי $\omega=\omega^*$. בנוסף, ניתן להראות כי זה גם תנאי הכרחי. כלומר, אם $\omega^*\subsetneq\omega$ אז X לא רפלקסיבי.

עובדה זו נובעת מכך שבאופן כללי, אם Φ משפחת פונקציונלים על X, אז הפונקציונלים היחידים שרציפים בטופולוגיה $\sigma(X,\Phi)$ הם Φ, ולא אחרים.

דוגמה: נראה דוגמה לכך שהטופולוגיות ω,ω^* אינן מטריזביליות. כלומר התכנסות חלשה בדרך כלל אינה מושרית ממטריקה. נשים לב כי במרחב מטריזבילי מתקיימת התכונה הכללית הבאה:

- אם X מרחב מטרי, ו-$(x_n)\subset X$ סדרה שנחתכת עם כל סביבה של איזשהו $x_0\in X$, אז יש תת סדרה של (x_n) המתכנסת ל-x_0.

נראה אם כך כי במרחב הרפלקסיבי $l^2(\mathbb{N})$ תכונה זו אינה מתקיימת.

תהי $(\mathbf{x}_n)\subset l^2(\mathbb{N})$ הסדרה $\mathbf{x}_n=(0,\dots,0,\sqrt{n},0,\dots)$ עבור $\sqrt{n}$ בקואורדינטה ה-n. נשים לב כי $\|\mathbf{x}_n\|_{l^2}=\sqrt{n}$ לכל n, ולכן (x_n) אינה מתכנסת ל-0, וכך גם כל תת סדרה שלה.

מאידך, נראה כי 0 נמצאת בסגור החלש של $(\mathbf{x}_n)$. סביבת אפס בטופולוגיה החלשה של $l^2(\mathbb{N})$ היא מהצורה $U := U_{\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k;\delta} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\mathbf{x} \mid |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_i\rangle| < \delta\}$, עבור $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k \in l^2(\mathbb{N})$ ועבור $\delta > 0$. אם בשלילה קיימת U מהצורה הנ"ל שעבורה $\mathbf{x}_n \notin U$ לכל n, זה אומר שלכל n יש $1 \le j \le k$ עם,

$$\delta \le |\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_j\rangle| = \sqrt{n}\,|\mathbf{y}_{j,n}|$$

כאשר $\mathbf{y}_{j,n}$ היא הקואורדינטה ה-n של $\mathbf{y}_j$. כלומר, $|\mathbf{y}_{j,n}| \ge {}^{\delta}\!/\!\sqrt{n}$. אבל נשים לב כי,

$$\infty > \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{y}_{i,n}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} |\mathbf{y}_{i,n}|^2 \ge \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{y}_{j,n}|^2 \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{n} = \infty$$

ולכן זה לא ייתכן.

20 מרחבי פרשה (Frechet)

הגדרה: מרחב וקטורי טופולוגי (V,τ) נקרא **מרחב פרשה** (Frechet) אם τ מתקבלת ממטריקה d על V שהיא אינוואריאנטית להזזות, שעבורה (V,d) מרחב מטרי שלם.

דוגמה: יהי $\Xi = (X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב מידה. יהי $0 < p < 1$. נתבונן במרחב $L^p(\Xi) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_p < \infty \right\}$, עבור $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$. נשים לב שלכל $f,g \in L^p(\Xi)$ מתקיים $\int |f+g|^p \, d\mu \le \int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu$, אז נגדיר מטריקה,

$$d(f,g) = \int |f-g|^p \, d\mu$$

ומתקבל כי (Ξ,d) מרחב פרשה. עם זאת, בהמשך נראה כי מטריקה זו אינה מגיעה מסמי נורמות (ההעתקה $f \mapsto \int |f|^p \, d\mu$ אינה הומוגנית ולכן אינה נורמה).

דוגמה: יהי $\Xi = (X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב מידה סופי. נתבונן במרחב כל הפונקציות המדידות מודולו יחס של שוויון כמעט תמיד, $L^0(\Xi)$. נגדיר מטריקה $d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$. אז $d(f,g) < \infty$ כי μ מידה סופית. ניתן גם להראות כי זה מרחב פרשה, אולם זה קצת קשה יותר.

דוגמה: נסמן $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. יהי X מרחב הפונקציות האנליטיות על $\mathbb{D}$. לכל $K \subset \mathbb{D}$ קומפקטית, נגדיר סמי נורמה על ידי $\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)|$ (בכל מצב בו K אינה קבוצה סופית, זו ממש נורמה, כי פונקציה אנליטית המתאפסת על קבוצה בת מניה, היא אפס). נשים לב שקיים אוסף בן מניה של קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}$ שמקרבות כל קבוצה קומפקטית $K \subset \mathbb{D}$, וכמו כן נשים לב כי יש הפרדת נקודות בטופולוגיה המושרית, ולכן כפי שהראינו לעיל הטופולוגיה המושרית מטריזבילית.

במצב זה, יש התכנסות $f_n \to f$ בטופולוגיה הנ"ל, אם ורק אם $f_n \to f$ במידה שווה על כל קבוצה קומפקטית $K \subset \mathbb{D}$. לכן אם $(f_n) \subset X$ אנליטיות וגם $f_n \to f$, אז בהכרח גם f אנליטית.

הגדרה: יהי (V,τ) מרחב וקטורי טופולוגי. קבוצה $E \subset V$ נקראת **חסומה**, אם לכל סביבת אפס $0 \in U \in \tau$, יש $n \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים $E \subset nU$.[8]

דוגמה: יהי V מרחב וקטורי טופולוגי, ותהי $\Phi \subset V^*$. נתבונן בטופולוגיה $\sigma(V,\Phi)$. אז קבוצה $E \subset V$ חסומה בטופולוגיה זו, אם ורק אם $\sup_{x\in E} |\phi(x)| < \infty$ לכל $\phi \in \Phi$.

בכיוון אחד, אם E חסומה, אז לכל $\phi \in \Phi$ נתבונן בסביבת אפס $0 \in U_\phi = \{x \mid |\phi(x)| < 1\} \in \tau$, ואז לאיזה $n > 0$ מתאים מתקיים $E \subset nU_\phi$, כלומר $\sup_{x\in E} |\phi(x)| \le n$.

[8] הראינו לעיל שקיים בסיס של קבוצות אפס מאוזנות, ולכן למעשה מספיק לקחת $n > 0$.

בכיוון שני, אם $\sup_{x\in E}|\phi(x)|<\infty$ לכל $\phi\in\Phi$, נשים לב כי סביבת אפס בסיסית של $\sigma(V,\Phi)$ היא מהצורה $U_{\phi;r}:=\{x\in V\mid|\phi(x)|<r\}$ עבור $\phi\in\Phi$ ועבור $r>0$. אבל היות שמתקיים $s_\phi:=\sup_{x\in E}|\phi(x)|<\infty$ נובע כי $E\subset nU_{\phi;r}$ לאיזה n גדול מספיק.

משפט: (**משפט החסימות במידה שווה למרחבי פרשה**) יהי (V,τ) מרחב פרשה, ויהי Y מרחב וקטורי טופולוגי כלשהו. תהי $\{T_\alpha:V\to Y\}_{\alpha\in A}$ משפחה של אופרטורים לינאריים רציפים, כך שלכל $x\in V$ מתקיים כי $E_x=\{T_\alpha x\}_{\alpha\in A}\subset Y$ חסומה. אזי $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ חסומה במידה שווה, כלומר לכל סביבת אפס $0\in U\subset Y$, מתקיים כי $\bigcap_{\alpha\in A}T_\alpha^{-1}U$ מכילה סביבת אפס של V.

הוכחה: נקבע $0\in U\subset Y$ סביבת אפס. תהי $0\in W\subset Y$ סביבת אפס מאוזנת המקיימת $W+W\subset U$.

למה: אם $S\subset V$ תת קבוצה כלשהי, אז $\overline{S}=\bigcap\{S+U\mid U\text{ is a balanced neighborhoods of zero}\}$.

הוכחה: מתקיים $x\in\overline{S}$ אם ורק אם לכל סביבת אפס U מתקיים $(x+U)\cap S\neq\emptyset$, אם ורק אם $x\in S-U$ לכל סביבת אפס U. נשים לב כי באופן כללי U היא סביבת אפס אם ורק אם $-U$ סביבת אפס, ולכן למעשה $x\in\overline{S}$ אם ורק אם $x\in S+U$ לכל U סביבת אפס. ▲

נובע מהלמה כי $\overline{W}\subset W+W\subset U$ (עבור $S=W$), ולכן יש $W_0\subset W$ סביבת אפס מאוזנת המקיימת $W_0+W_0\subset W$, ומכאן כי,

$$\overline{W}_0+\overline{W}_0\subset(W_0+W_0)+(W_0+W_0)\subset W+W\subset U$$

כלומר $\overline{W}_0$ היא סביבת אפס מאוזנת וסגורה המקיימת $\overline{W}_0+\overline{W}_0\subset U$.

מההנחה כי E_x חסומה לכל $x\in V$, נובע כי יש n_x המקיים $T_\alpha x\in n_xW_0$ לכל $\alpha\in A$. מהיות W_0 מאוזנת נובע כי לכל $x\in V$ יש $0<|\lambda|\leq 1$, כך שמתקיים $\lambda T_\alpha x=T_\alpha(\lambda x)\subset n\lambda W_0$ לכל $\alpha\in A$. כלומר, לכל $x\in V$ יש $\lambda\neq 0$ מספיק קטן המקיים $\lambda x\in T_\alpha^{-1}W_0$ לכל $\alpha\in A$. נתבונן בקבוצה $F=\bigcap_{\alpha\in A}T_\alpha^{-1}\overline{W}_0$, וזו קבוצה סגורה ומאוזנת (כחיתוך של קבוצות סגורות ומאוזנות), וכפי שהראינו היא גם בולעת. כלומר ניתן לכתוב $V=\bigcup_n nF$, וממשפט הקטגוריה של בייר נובע שיש n כך של-nF יש פנים לא ריק, ולכן ל-F יש פנים לא ריק.

נתבונן בקבוצה $F-F$, ונשים לב כי,

$$F-F\subset\bigcap_{\alpha\in A}T_\alpha^{-1}\left(\overline{W}_0-\overline{W}_0\right)\subset\bigcap_{\alpha\in A}T_\alpha^{-1}\left(\overline{W}_0+\overline{W}_0\right)\subset\bigcap_{\alpha\in A}T_\alpha^{-1}U$$

ניתן להראות כי $F-F$ היא סביבת אפס ב-V, כנדרש. ■

21 משפט בנך אלאוגלו

משפט: יהי X מרחב נורמי. יהי $B_{X^*}:=\{\phi\in X^*\mid\|\phi\|\leq 1\}\subset X^*$ כדור היחידה הסגור, ותהי $\omega^*=\sigma(X^*,\iota X)$. אז (B_{X^*},ω^*) מרחב קומפקטי.

הוכחה: לכל $x\in X$ נגדיר את הקבוצה,

$$D_x=\{z\in\mathbb{C}\mid|z|\leq\|x\|\}\subset\mathbb{C}$$

נתבונן במרחב המכפלה $D=\prod_{x\in X}D_x\subset\mathbb{C}^{|X|}$. כל D_x היא מרחב קומפקטי והאוסדורף בתוך $\mathbb{C}$, ולכן ממשפט טיכונוף D קומפקטי והאוסדורף בטופולוגיית המכפלה.

תהי $\tau:B_{X^*}\to D$ ההעתקה $\tau:\phi\mapsto(\phi(x))_{x\in X}$. ברור כי τ לינארית וחח"ע. כמו כן ניתן לראות כי τ היא ω^*־רציפה, כי בהינתן קבוצת תת בסיס של טופולוגיית המכפלה, $B_{x',\delta}:=\left\{(d_x)_{x\in X}\mid d_{x'}\in B_\delta(0)\right\}\subset D$ לאיזה $x'\in X$ ולאיזה $\delta>0$,

ניתן לראות כי $\tau^{-1}\left(B_{x',\delta}\right)=\bigcup_{\|\phi\|<1}\phi^{-1}\left(B_{\delta}\left(x'\right)\right)$. אם כך נובע ממסקנה ממשפט ההעתקה הפתוחה כי τ הומאומורפיזם על תמונתה. אם כך מספיק להראות כי $\mathrm{Im}\tau\subset D$ סגורה, ומהיות D קומפקטי והאוסדורף ינבע כי $\mathrm{Im}\tau$ קומפקטית, ולכן B_{X^*} קומפקטי.

נשים לב כי $D\ni\left(d_x\right)_{x\in X}$ הוא בתוך $\mathrm{Im}\tau$, אם ורק אם $\tau\phi=\left(d_x\right)_{x\in X}$ לאיזה $\phi\in B_{X^*}$. כלומר לכל $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ ולכל $x_1,x_2\in X$,

$$d_{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}=\phi\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\right)=\lambda_1\phi\left(x_1\right)+\lambda_2\phi\left(x_2\right)=\lambda_1d_{x_1}+\lambda_2d_{x_2}$$

ונובע כי,

$$\mathrm{Im}\tau=\bigcap_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\\x_1,x_2\in X}}\left\{\left(d_x\right)_{x\in X}\mid d_{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}-\lambda_1d_{x_1}-\lambda_2d_{x_2}=0\right\}$$

נשים לב כי מרציפות ϕ נובע כי כל קבוצה בחיתוך היא סגורה (תמונה הפוכה של $\{0\}$ תחת העתקה רציפה), ולכן החיתוך כולו סגור, כנדרש. ■

מסקנה: קבוצה $K\subset X^*$ היא ω^*־סגורה וחסומה בנורמה של X^*, אם ורק אם היא ω^*־קומפקטית.

מצד אחד, אם K ω^*־סגורה וחסומה בנורמה, נאמר ללא הגבלת הכלליות $K\subset B_{X^*}$, אז באופן כללי קבוצה סגורה בתוך קבוצה קומפקטית במרחב האוסדורף, היא קומפקטית, כלומר K קומפקטית. את הצד השני נראה בהמשך.

טענה: יהי X מרחב נורמי. $\left(B_{X^*},\omega^*\right)$ מטריזבילי אם ורק אם X מרחב נורמי ספרבילי.

הוכחה:

- בכיוון אחד, נניח כי X ספרבילי על ידי $\left(x_n\right)\subset X$ סדרה צפופה (בנורמה). נזכור כי הראינו שטופולוגיה המושרית ממשפחה בת מניה של סמי נורמות היא מטריזבילית. לכן די להראות כי יש תת בסיס בן מניה של הפתוחות ב-B_{X^*}.
נשים לב כי תת בסיס של סביבות אפס ב-ω^* הוא כל הקבוצות מהצורה $U_{x;\delta}=\left\{\phi\in X^*\mid\left|\phi\left(x\right)\right|<\delta\right\}$ עבור איזה $x\in X$ ועבור $\delta>0$. אם כך די להראות שכל קבוצה מהצורה $U_{x;\delta}\cap B_{X^*}$ מכילה קבוצה מהצורה $U_{x_n;\epsilon}$ עבור איזה n ועבור $\epsilon>0$ קטן דיו (לבסוף נוכל לבחור $\epsilon>0$ רציונלי קטן דיו ולקבל בסיס בן מניה).
נקבע n שעבורו $\left\|x-x_n\right\|<\delta/2$. נשים לב כי $\iota x\left(\phi\right)=\phi\left(x\right)$ היא איזומטריה לינארית, ונקבל כי,

$$\delta/2>\left\|x_n-x\right\|=\left\|\iota x_n-\iota x\right\|=\sup_{\phi\in B_{X^*}}\left\{\left|\iota x_n\left(\phi\right)-\iota x\left(\phi\right)\right|\right\}$$

נובע כי,

$$\left|\iota x\left(\phi\right)\right|<\left|\iota x_n\left(\phi\right)\right|+\delta/2$$

ולכן נקבל את הנדרש על ידי,

$$U_{x_n;\delta/2}\cap B_{X^*}\subset U_{x;\delta}\cap B_{X^*}$$

- בכיוון שני, נניח כי ω^* על B_{X^*} היא מטריזבילית. אם כך יש לה בסיס בן מניה מהצורה $U_j\cap B_{X^*}$, עבור $U_j:=\bigcap_{i=1}^{n}\left\{\phi\in X^*\mid\left|\phi\left(x_{i,j}\right)\right|<\delta_{i,j}\right\}$, ביחס לסדרות בנות מניה $\left(x_{i,j}\right)\subset X$, $\delta_{i,j}>0$.
נתבונן בתת המרחב $W:=\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\left(x_{i,j}\right)\right)\subset X$, ונראה כי הוא צפוף. אם בשלילה זה לא המצב, אז ממסקנה ממשפט האן בנך יש $0\neq\phi\in B_{X^*}$ עם $\|\phi\|=1$, כך שמתקיים $\phi\mid_W\equiv0$. כלומר $\phi\in U_j$ לכל j. אבל ממטריזביליות נובע כי הטופולוגיה היא האוסדורף, והראינו לעיל כי תנאי זה שקול לכך שחיתוך בסיס סביבות אפס הוא טריוויאלי, ולכן בהכרח $\phi=0$, סתירה. ■

מסקנה: אם X מרחב נורמי ספרבילי, אז ממטריזביליות $\left(B_{C(K)^*},\omega^*\right)$ יחד עם היותו קומפקטי ממשפט בנך אלאוגלו, נובעת קומפקטיות סדרתית: לכל סדרה $(\phi_n)\subset B_{X^*}$ יש תת סדרה מתכנסת ב-ω^*.

מסקנה: אם K מרחב מטרי קומפקטי, אז מרחב הפונקציות הרציפות $C(K)$ הוא מרחב בנך ספרבילי (ממשפט סטון ויירשטראס). לכן $B_{C(K)^*}$ קומפקטי סדרתית ב-ω^*.

נשים לב כי ממשפט ההצגה של ריס למידות, כל מידת בורל רגולרית והסתברות μ על K, ניתנת לזיהוי עם פונקציונל $\mu^*\in C(K)^*$, שמקיים בפרט $\mu^*1=1$ וכן לכל $0\le f$ עבור $\mu^*f\ge 0$ כל $f\ge 0$.

אם כך בהינתן סדרה של מידות בורל רגולריות והסתברות (μ_n) על K, מקומפקטיות סדרתית של $\left(B_{C(K)^*},\omega^*\right)$ והזיהוי $\mu_n\hookrightarrow\mu_n^*\in B_{C(K)^*}$, יש תת סדרה מתכנסת $\mu_{n_k}\xrightarrow{*}\mu$, כלומר לכל $f\in C(K)$ מתקיים $\int fd\mu_{n_k}=\mu_{n_k}^*f\to\mu^*f=\int fd\mu$.

מסקנה: אם K מרחב מטרי קומפקטי לא ריק, $T:K\to K$ העתקה רציפה, אז יש מידת בורל רגולרית והסתברות μ שהיא T-אינווריאנטית. כלומר מקיימת $\mu\left(T^{-1}E\right)=\mu(E)$ לכל $E\subset K$ מדידה.

הוכחה: תהי $x_0\in K$ כלשהי. לכל N טבעי נגדיר מידה $\mu_N(E)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}1_{\{T^nx_0\in E\}}$. ניתן לראות כי אלה מידות בורל רגולריות והסתברות, ולכן יש לסדרה (μ_N) גבול חלקי μ. ניתן להראות כי,

$$\left|\mu_N(E)-\mu_N\left(T^{-1}E\right)\right|\le 2/N$$

ולכן נובע כי עבור μ מתקיים $\mu(E)=\mu\left(T^{-1}E\right)$, כנדרש. ▲

מסקנה: לכל מרחב בנך X קיים מרחב מטרי קומפקטי האוסדורף K, כך ש-X איזומטרי לתת מרחב של $C(K)$.

הוכחה: נגדיר $K=B_{X^*}\subset X^*$. הראינו במשפט בנך אלאוגלו כי הוא קומפקטי. הוא גם האוסדורף, כי הפונקציונלים הלינאריים מפרידים נקודות כפי שנובע ממשפט האן בנך.

נגדיר העתקה $X\to C(K)$ על ידי $x\mapsto\phi_x$, כאשר $\phi_x(x^*)=x^*(x)$ לכל $x^*\in K$. כבר הראינו שזו איזומטריה לינארית, ולכן X איזומטרי לתמונה של העתקה זו, שהיא תת מרחב של $C(K)$. ▲

22 קמירות מקומית

הגדרה: מרחב וקטורי טופולוגי נקרא **קמור מקומית**, אם יש לו בסיס של סביבות אפס, המורכב מקבוצות קמורות.

למה: מרחב וקטורי טופולוגי (V,τ) הוא קמור מקומית, אם ורק אם הטופולוגיה τ מושרית ממשפחה של סמי נורמות.

הוכחה: מצד אחד, אם הטופולוגיה מושרית ממשפחה של סמי נורמות $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$, אז אוסף כל הקבוצות מהצורה $U_{\alpha_1,\dots,\alpha_k;\delta}:=\bigcap_{i=1}^{k}\left\{x\in V\mid\|x\|_{\alpha_i}<\delta\right\}$ עבור $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in A$ ועבור $\delta>0$, מהוות בסיס של סביבות אפס קמורות. ניתן גם לראות כי זה למעשה בסיס לסביבות אפס של קבוצות בולעות ומאוזנות, וכן מתקיים $U_{\alpha_1,\dots,\alpha_k;\delta/2}+U_{\alpha_1,\dots,\alpha_k;\delta/2}\subset U_{\alpha_1,\dots,\alpha_k;\delta}$, ולכן מהלמה היסודית שהוכחנו לעיל נובע כי הטופולוגיה המושרית מזה היא של מרחב וקטורי טופולוגי.

מצד שני, נניח כי V קמור מקומית. לכל $0\in U\in\tau$ סביבת אפס קמורה, נגדיר את פונקציונל מינקובסקי שלה,

$$P_Ux:=\inf\left\{t\mid t^{-1}x\in U\right\}$$

נשים לב כי זו העתקה מוגדרת היטב, היות שההעתקה $(t,x)\mapsto tx$ רציפה ומעבירה $(0,x)\mapsto 0$, ולכן יש סביבה פתוחה $0\in W\subset\mathbb{R}$ כך שאם $t\in W$ אז $tx\in U$.

הראינו שעבור U קמורה ובולעת, P_U הומוגני ומקיים $P_U(x_1+x_2)\le P_Ux_1+P_Ux_2$, כלומר P_U הוא סמי נורמה. אם כך משפחת הסמי נורמות $\left\{\|\cdot\|_U\right\}$ עבור כל U סביבת אפס קמורה ובולעת, משרה את הטופולוגיה של המרחב. ■

משפט: אם X מרחב וקטורי טופולוגי, $K_1,K_2\subset X$ זוג קבוצות קמורות, זרות, ולאחת מהן פנים לא ריק, אז יש פונקציונל לינארי רציף המפריד ביניהן.

הערה: הראינו משפט זהה לעיל עבור מרחבים נורמיים, ואותה ההוכחה נכונה גם כאן.

מסקנה: אם X מרחב וקטורי טופולוגי קמור מקומית, $K_1,K_2\subset X$ זוג קבוצות קמורות וזרות, כך שאחת מהן סגורה והשנייה קומפקטית, אזי הן נפרדות ממש, כלומר יש פונקציונל לינארי רציף f המקיים,

$$\sup_{x\in K_1}\{\mathrm{Re}f(x)\}<\inf_{x\in K_2}\{\mathrm{Re}f(x)\}$$

הוכחה:

- נתבונן בקבוצה K_2-K_1. זו בבירור קבוצה קמורה. נראה כי K_2-K_1 סגורה.
לשם כך נשתמש במושג של "רשת" (ראו נספח). תהי $\left\{x_\alpha^2-x_\alpha^1\right\}_{\alpha\in A}\subset K_2-K_1$ (כאשר האינדקס העליון מסמן השתייכות לקבוצה K_i) רשת המתכנסת ל-$x_0\in V$. נראה כי $x_0\in K_2-K_1$.
נתון כי K_2 קומפקטית, אז לרשת $\left\{x_\alpha^2\right\}_{\alpha\in A}\subset K_2$ יש תת רשת מתכנסת, $\left\{x_\beta^2\right\}_{\beta\in B}\to x_2\in K_2$.
נתבונן ברשת $\left\{x_\beta^2-x_\beta^1\right\}_{\beta\in B}\subset K_2-K_1$, ונשים לב כי זו תת רשת של הרשת המקורית, ולכן גם היא מתכנסת ל-x_0.
אם כך נובע כי $x_\beta^2-x_\beta^1\to x_0$ וגם $x_\beta^2\to x_2$, ונובע כי $x_\beta^1\to x_2-x_0$. נתון כי K_1 סגורה ולכן $x_1:=x_2-x_0\in K_1$, כלומר $x_0=x_2-x_1\in K_2-K_1$, כנדרש.
- קיבלנו כי K_2-K_1 קבוצה קמורה וסגורה, שלא מכילה את אפס (כי $K_2\cap K_1=\emptyset$). לכן מקמירות מקומית יש סביבה קמורה $0\in U\in\tau$ זרה ל-K_2-K_1. מהמשפט שהזכרנו נובע שקיים פונקציונל לינארי f המקיים,

$$\sup_{x\in U}\{\mathrm{Re}f(x)\}<\inf_{x\in K_2-K_1}\{\mathrm{Re}f(x)\}$$

אבל $0\in U$ נקודה פנימית, ולכן נובע כי,

$$0=\mathrm{Re}f(0)<\inf_{x\in K_2-K_1}\{\mathrm{Re}f(x)\}$$

כנדרש. ■

מסקנה: יהי (V,τ) מרחב וקטורי טופולוגי האוסדורף וקמור מקומית. תהי $K\subset V$ קמורה וסגורה, ותהי $x_0\in V\backslash K$. הקבוצה $\{x\}$ סגורה, קומפקטית וקמורה, ולכן יש פונקציונל לינארי רציף f המקיים $\mathrm{Re}f(x_0)>\sup_{x\in K}\{\mathrm{Re}f(x)\}$.

22.1 נספח: רשתות

מבוא: באופן כללי אין קשר חד משמעי בין קומפקטיות לבין קומפקטיות סדרתית. המושג של "רשת" נועד להכליל את המושג של סדרה, בכדי לאפשר לדבר על קומפקטיות רשתית (אנלוגי לקומפקטיות סדרתית), שהקשר שלה לקומפקטיות הדוק, כפי שנראה להלן. על כל המושגים וההגדרות כדאי לחשוב כהכללות של מושג הסדרה וההתכנסות של סדרה.

הגדרה: קבוצה סדורה חלקית $(A,\leq)$ (שנחשוב עליה כעל קבוצת אינדקסים) נקראת **מכוונת**, אם לכל $\alpha,\beta\in A$ יש $\gamma\in A$ כך שמתקיים $\alpha\leq\gamma$ וגם $\beta\leq\gamma$.

הגדרה: במרחב טופולוגי (X,τ), **רשת** היא קבוצה מהצורה $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, כאשר A קבוצה סדורה חלקית מכוונת.

הערה: אם $A=\mathbb{N}$ ביחס הסדר הרגיל, אז $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ היא סדרה.

הגדרה: תהי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית מכוונת. תת קבוצה $B\subset A$ נקראת **קו סופית**, אם לכל $\alpha\in A$ יש $\beta\in B$ עם $\alpha\leq\beta$.

הגדרה: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ותהי $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$ רשת. נאמר כי הרשת **מתכנסת** לנקודה $x_0\in X$, אם לכל סביבה פתוחה $x_0\in U\in\tau$ יש $\alpha\in A$, כך שלכל $\alpha\leq\beta$ מתקיים $x_\beta\in U$.

טענה: במרחב טופולוגי (X,τ), רשת $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$ מתכנסת ל-$x_0\in X$, אם ורק אם לכל סביבה פתוחה $x_0\in U\in\tau$, ולכל קבוצה קו סופית $B\subset A$, מתקיים כי $\{x_\beta\}_{\beta\in B}\cap U\neq\emptyset$.

טענה: במרחב טופולוגי האוסדורף, גבול של רשת הוא יחיד.

טענה: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. תהי $x_0\in X$ ותהי $Y\subset X$. מתקיים $x_0\in\overline{Y}$ אם ורק אם יש קבוצה סדורה חלקית מכוונת $(A,\leq)$ יחד עם רשת $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$ שגבולה הוא x_0.

הגדרה: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ויהיו $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A},\{y_\beta\}_{\beta\in B}\subset X$ רשתות. אומרים כי $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ היא **תת רשת** של $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, אם יש העתקת אינדקסים $\mathbf{F}:B\to A$ המקיימת $y_\beta=x_{\mathbf{F}\beta}$ לכל $\beta\in B$, כך שגם מתקיים התנאי הבא: לכל $\alpha\in A$ יש $\beta\in B$, שהוא בעל התכונה כי אם $\beta\leq\gamma$ אז $\alpha\leq\mathbf{F}\gamma$, לכל $\gamma\in B$.

הערה: אם $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ו-$B\subset A$ קבוצה קו סופית, אז אינדוקס מחודש על ידי B (עם $\mathbf{F}$ העתקת ההכלה הטבעית) מניב תת רשת. עם זאת, יש לשים לב שלא כל תת רשת מתקבלת בצורה זו.

משפט: מרחב טופולוגי X הוא קומפקטי, אם ורק אם הוא קומפקטית רשתית; כלומר, לכל רשת ב-X יש תת רשת מתכנסת.

23 משפט קריין מילמן

הגדרה: יהי X מרחב לינארי, ותהי $K\subset X$ קבוצה קמורה. תת קבוצה קמורה ולא ריקה $K_0\subset K$ נקראת **פאה** של K, אם היא מקיימת את התכונה הבאה: לכל $x,y\in K$, צירוף קמור $tx+(1-t)\,y$ שייך ל-K_0 אם ורק אם $x,y\in K_0$.

תכונות:

1. כל K קמורה היא פאה של עצמה.
2. בהינתן $x_0\in K$, $\{x_0\}$ היא פאה אם ורק אם x_0 נקודת קיצון.[9]
3. חיתוך לא ריק של פאות הוא פאה.
4. אם $K_0\subset K$ פאה וגם $K_1\subset K_0$ פאה, אז $K_1\subset K$ פאה.
5. במרחב נורמי X, לכל פונקציונל לינארי רציף $\phi:X\to\mathbb{R}$, הקבוצה $K_0=\{x\in X\mid\phi(x)=\sup\phi\}$ היא פאה של X.

סימון: יהי X מרחב לינארי, ותהי $K\subset X$ קבוצה קמורה.

- $\mathrm{Ext}K$ הוא אוסף נקודות הקיצון של K.
- $\mathrm{Conv}K$ הוא הקמור של K; בהתאמה, $\overline{\mathrm{Conv}}K$ הוא הסגור של הקמור של K.

משפט: (**משפט קריין מילמן**) יהי (V,τ) מרחב וקטורי טופולוגי האוסדורף וקמור מקומית. לכל קבוצה קמורה $K\subset V$,

$$K=\overline{\mathrm{Conv}}\mathrm{Ext}K$$

הוכחה:

[9] כלומר x_0 אינה מתקבלת כצירוף קמור של איברים מ-K השונים ממנה.

- תהי $\mathcal{K}$ משפחת כל הפאות הסגורות של K. מתקיים כי $K \in \mathcal{K}$, ולכן $\mathcal{K}$ לא ריקה.
לכל $B \in \mathcal{K}$ ולכל פונקציונל לינארי רציף f, נגדיר את הקבוצה,

$$B_f = \left\{ x \in B \mid \mathrm{Re} f(x) = \max_{x \in B} \{\mathrm{Re} f(x)\} \right\} \subset B$$

מתקיים כי B, B_f שתיהן קומפקטיות (שתיהן סגורות בתוך קבוצה קומפקטית K), וכמו כן B_f בבירור לא ריקה, ולכן היא פאה.

- לכל $C \in \mathcal{K}$, תהי $\mathcal{K}_C$ משפחת הפאות של K שמוכלות בתוך C. מתקיים כי $C \in \mathcal{K}_C$ ולכן $\mathcal{K}_C$ לא ריקה.
נסדר את $\mathcal{K}_C$ חלקית על ידי הכלה, ונשים לב שלכל שרשרת יורדת של פאות $\{C_\alpha\} \subset \mathcal{K}_C$, יש חסם מלעיל $\bigcap_\alpha C_\alpha$ (חיתוך זה אינו ריק מקומפקטיות K). אם כך מהלמה של צורן יש ב-$\mathcal{K}_C$ איבר מינימלי, שנסמן $\tilde{C}$.
נשים לב שלכל פונקציונל לינארי רציף f, לפי אותה בנייה שהזכרנו יש את הפאה $\tilde{C}_f \subset \tilde{C}$. נשים לב כי מהכלה זו נובע $\tilde{C}_f \in \mathcal{K}_C$, ולכן ממינימליות $\tilde{C} \subset \tilde{C}_f$. כלומר $\tilde{C} = \tilde{C}_f$ לכל פונקציונל לינארי רציף f, ובמילים אחרות, כל פונקציונל לינארי רציף f, הוא קבוע על כל איברי $\tilde{C}$ (מהגדרת $\tilde{C}_f$).
אבל מהיות המרחב קמור מקומית והאוסדורף נובע כי הפונקציונלים הלינאריים הרציפים מפרידים נקודות, ולכן בהכרח $\tilde{C}$ היא יחידון. פאה שהיא יחידון היא פשוט נקודת קיצון, כלומר $\tilde{C}$ היא יחידון המכיל נקודת קיצון.
כלומר, מצאנו שלכל פאה יש נקודת קיצון יחידה, המתקבלת כתת הפאה המינימלית ביחס להכלה.

כעת נראה את השוויון המבוקש במשפט. תחילה, נשים לב כי K קמורה המכילה את $\mathrm{Ext}K$, ולכן $\mathrm{Conv}\mathrm{Ext}K \subset K$. נתון כי K גם סגורה, ולכן נובעת מכך ההכלה $\overline{\mathrm{Conv}}\mathrm{Ext}K \subset K$.

עבור ההכלה ההפוכה, נניח בשלילה כי $x_0 \in K$ אינה בתוך $\overline{\mathrm{Conv}}\mathrm{Ext}K$. לכן יש פונקציונל לינארי רציף f המקיים את ההפרדה,

$$\mathrm{Re} f(x_0) > \sup_{x \in \overline{\mathrm{Conv}}\mathrm{Ext}K} \{\mathrm{Re} f(x)\}$$

נתבונן בקבוצה $K_f = \{x \in K \mid \mathrm{Re} f(x_0) = \sup_{x \in K} \{\mathrm{Re} f(x)\}\} \subset K$. נשים לב כי $K_f \subset K$ היא פאה סגורה שלא מכילה את x_0 ולא נחתכת עם $\overline{\mathrm{Conv}}\mathrm{Ext}K$.

אבל K_f היא פאה ולכן יש לה איזושהי נקודת קיצון, כפי שהראינו לעיל, ולכן זו סתירה. ■

הערה: נראה דוגמה לכך שבמשפט הכרחי לקחת את הסגור. כלומר דוגמה שבה הקמור של $\mathrm{Ext}K$ אינו סגור.
נתבונן במרחב $l^2(\mathbb{N})$, ובקבוצה $K = \{x \mid x_i \geq 0, \sum_i x_i n < \infty\}$. מתקיים כי $\mathrm{Ext}K = M = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} e_n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$. ניתן להראות כי $\mathbf{x} := \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{1}{n} e_n \in \overline{\mathrm{Conv}}M$ על אף ש-$\mathbf{x} \notin \mathrm{Conv}M$.

מסקנה: אם X מרחב מטרי קומפקטי, $T : X \to X$ רציפה, אז ראינו שיש מידת בורל רגולרית והסתברות μ על X שהיא T-אינווריאנטית. נסמן את אוסף כל המידות הנ"ל $\mathcal{M}_T(X)$. אזי $\mathcal{M}_T(X) \subset C(X)^*$ קמורה וסגורה. נקודות הקיצון של $\mathcal{M}_T(X)$ הן המידות הארגודיות. כלומר, המידות המקיימות את התכונה כי אם $\nu\left(E \triangle T^{-1} E\right) = 0$, אז $\nu(E) \in \{0,1\}$.
ממשפט קריין מילמן נובע כי כל מידה ארגודית נמצאת בקמור הסגור של $\mathcal{M}_T(X)$.

מסקנה: יהי X מרחב בנך רפלקסיבי. תהי $K \subset X$ קבוצה סגורה וחסומה וקמורה. אזי $K = \overline{\mathrm{Conv}}\mathrm{Ext}K$, כאשר סגור זה הוא בטופולוגיה הנורמית.

הוכחה: מהיות X בנך, קבוצה קמורה וסגורה היא סגורה חלש. אם כך K סגורה חלש וחסומה בנורמה, ולכן היא קומפקטית חלש.
אם כך ממשפט קריין מילמן נובע כי K היא הסגור החלש של $\mathrm{Conv}\mathrm{Ext}K$.

נראה כי למעשה היא גם הסגור החזק. נניח כי עבור $(x_n) \subset K$ מתקיים $x_n \to x$ בנורמה. הראינו כי במרחב רפלקסיבי, קבוצה היא חסומה אם ורק אם היא קומפקטית סדרתית חלש. לכן מהיות x גבול חלקי חלש של K, נובע כי $x \in K$, כנדרש.
■

הערה: בגלל אותה ההוכחה, ניתן לראות כי אם $K\subset X^*$ קמורה, ω^*־סגורה וחסומה, אזי $K=\overline{\text{Conv}}\text{Ext}K$, כאשר סגור זה הוא בטופולוגיה ω^*.

דוגמה: המרחב $C_0\left(\mathbb{N}\right)$ אינו מרחב דואלי של אף מרחב. נניח בשלילה כי $X^*=C_0\left(\mathbb{N}\right)$ לאיזה X. אזי כדור היחידה B_{X^*} בטופולוגיה הנורמית הוא ω^*־סגור של $\text{ConvExt}B_{X^*}$. אבל נשים לב כי $B_{X^*}=\left\{\mathbf{x}\mid x_i\le 1,\ x_i\to 0\right\}$, ולכן ניתן להראות שאין לו כלל נקודות קיצון (תמיד ניתן לבחור קואורדינטה גדולה דיה N כך שיתקיים $|x_i|<{}^1\!/_2$ לכל $i>N$, ואז מתקיים $x_i\pm{}^1\!/_4\in B_{X^*}$).

ניתן להראות כי מרחב הפונקציות הרציפות $[0,1]\to\mathbb{R}$ הוא לא מרחב דואלי של אף מרחב, היות שנקודות הקיצון היחידות שלו הן הפונקציות הקבועות ± 1 (לפי נימוק דומה לזה לעיל).

טענה: יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי, ויהי $M\left(X\right)$ אוסף מידות בורל רגולריות והסתברות על X. הראינו לעיל כי $M\left(X\right)\subset B_{C(X)^*}$ קבוצה קמורה ו-ω^*־סגורה, ולכן היא גם קומפקטית. אזי $\text{Ext}M\left(X\right)$ היא קבוצת כל מידות הדלתא. כלומר, כל המידות מהצורה $\delta_x\left(E\right)=1_{\{x\in E\}}$ עבור $x\in X$.

הוכחה: תהי $\mu\in M\left(X\right)$ נקודת קיצון. תחילה נראה שלכל $E\subset X$ מדידה, $\mu\left(E\right)\in\{0,1\}$. נניח בשלילה כי $0<\mu\left(E\right)<1$. נגדיר זוג מידות,

$$\mu_1\left(F\right)=\frac{\mu\left(E\cap F\right)}{\mu\left(E\right)}\,,\ \ \mu_2\left(F\right)=\frac{\mu\left(E^c\cap F\right)}{\mu\left(E^c\right)}$$

מתקיים כי $\mu=\mu\left(E\right)\cdot\mu_1+\left(1-\mu\left(E\right)\right)\cdot\mu_2$, בסתירה להיות μ נקודת קיצון.

נראה כי $\mu=\delta_x$ לאיזו $x\in X$. נניח כי $x,y\in X$ זוג נקודות שונות המקיימות $x,y\in\text{Supp}\mu$, כאשר,

$$\text{Supp}\mu=\left\{\bigcup\left\{U\subset X\mid U\text{ is open},\ \mu\left(U\right)=0\right\}\right\}^c$$

מהיות X האוסדורף נובע שיש סביבות פתוחות וזרות המפרידות $x\in U,\,y\in V$. לא ייתכן כי גם $\mu\left(U\right)\neq 0$ וגם $\mu\left(V\right)\neq 0$, אחרת היה $\mu\left(U\right)=\mu\left(V\right)=1$ עבור U,V זרות. לכן נניח ללא הגבלת הכלליות כי $\mu\left(U\right)=0$. כלומר נובע כי $\text{Supp}\mu$ היא יחידון x, כלומר $\mu=\delta_x$.

לבסוף, נשים לב שכל δ_x היא נקודת קיצון, כי אם $\delta_x=t\mu+\left(1-t\right)\nu$, אז מתקיים $\text{Supp}\mu,\text{Supp}\nu\subset\text{Supp}\delta_x=\{x\}$, ובפרט μ,ν קבועות. ∎

טענה: יהי X מרחב מטרי קומפקטי והאוסדורף. יהי $T:X\to X$ הומאומורפיזם. יהי $M_T\left(X\right)$ אוסף מידות בורל רגולריות והסתברות שהן T־אינווריאנטיות, שראינו לעיל כי הוא אינו ריק. אזי $\mu\in\text{Ext}M_T\left(X\right)$ אם ורק אם μ ארגודית. כלומר לכל קבוצה מדידה $E\subset X$, אם $\mu\left(E\triangle TE\right)=0$ אז $\mu\left(E\right)\in\{0,1\}$.

הוכחה: תחילה, אם μ מידה לא ארגודית, אז נקבע $E\subset X$ מדידה שעבורה $\mu\left(E\triangle TE\right)=0$ אבל $0<\mu\left(E\right)<1$, ונקבל כי $\mu=\mu\left(E\right)\cdot\mu_1+\left(1-\mu\left(E\right)\right)\cdot\mu_2$, כאשר $\mu_1\left(F\right)=\frac{\mu(E\cap F)}{\mu(E)},\,\mu_2\left(F\right)=\frac{\mu(E^c\cap F)}{\mu(E^c)}$. לא קשה לראות כי $\mu_1,\mu_2\in M_T\left(X\right)$, ולכן μ אינה נקודת קיצון.

מצד שני, נניח כי μ ארגודית. יהי $U_T:L^2\left(X\right)\to L^2\left(X\right)$ האופרטור $U_Tf=f\circ T$. אזי U_T אופרטור אוניטרי, ולכן מהמשפט הארגודי נובע כי $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}U_T^nf\to\int fd\mu$ לכל $f\in L^2\left(X\right)$. נניח כי $\mu=t\nu+\left(1-t\right)\eta$ צירוף קמור. נשים לב כי מתקיים מהמשפט הארגודי הנ"ל כי,

$$\int\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}U_T^nf-\int fd\mu\right|^2d\mu\to 0\,,\ \ N\to\infty$$

אבל נשים לב כי ν,η רציפות בהחלט ביחס ל-μ, ולכן נובע כי,

$$\int\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}U_T^nf-\int fd\mu\right|^2d\nu\to 0\,,\ \ N\to\infty$$

מהיות ν T-אינווריאנטית נובע מכך כי,

$$\begin{aligned}\int f d\nu &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int f d\nu = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int U_T^n f d\mu = \int \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U_T^n f d\nu \\ &\to \int\left(\int f d\mu\right) d\nu = \int f d\mu\,,\ \ N\to\infty\end{aligned}$$

כלומר בפרט לכל f רציפה מתקיים $\int f d\nu = \int f d\mu$, כלומר $\nu = \mu$, והצירוף הקמור הוא טריוויאלי. כלומר μ נקודת קיצון, כנדרש. ■

23.1 מרכז כובד

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף קמור מקומית. תהי μ מידת הסתברות בורל רגולרית על $B\subset X$ כלשהי. נקודה $x_0\in X$ נקראת **מרכז הכובד** של μ, אם לכל $\phi\in X^*$ מתקיים $\phi(x_0)=\int_B \phi(x)\,d\mu(x)$. במקרה זה מסמנים $x_0=\int_B x d\mu$.

טענה: מרכז כובד הוא יחיד, אם קיים (כי הפונקציונלים הלינאריים מפרידים נקודות).

טענה: מרכז הכובד הוא ב-$\overline{\mathrm{Conv}}B$, אם קיים (אחרת, ממשפט קריין מילמן יש פונקציונל שמפריד, ומתקבלת סתירה לתכונת מרכז הכובד).

טענה: יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף קמור מקומית. תהי $B\subset X$ קבוצה קומפקטית, כך שמתקיים כי $K:=\overline{\mathrm{Conv}}B$ גם היא קומפקטית. אזי לכל μ מידת בורל רגולרית והסתברות על B, יש מרכז כובד $x_0\in X$.

הוכחה: לכל $\phi\in X^*$ נגדיר,

$$B_\phi=\left\{y\in X\mid \phi(y)=\int\limits_B \phi(x)\,d\mu(x)\right\}$$

אז B_ϕ לא ריקה, כי אם $\alpha:=\int_B\phi(x)\,d\mu(x)$ ולאיזה $y\in X$ מתקיים $\phi(y)\neq 0$, אז $\phi\left(\frac{\alpha}{\phi(y)}y\right)=\alpha$. כמו כן מרציפות ϕ נובע כי B_ϕ סגורה.

נראה כי $K\cap\bigcap_{\phi\in X^*}B_\phi$ לא ריקה. אבל מקומפקטיות K, על ידי תכונת החיתוך הסופי, די להראות כי כל חיתוך סופי $K\cap\bigcap_{i=1}^n B_{\phi_i}$ הוא לא ריק. לשם כך תהי $T:X\to\mathbb{C}^n$ ההעתקה,

$$Tx=(\phi_1(x),\ldots,\phi_n(x))$$

זו העתקה לינארית, ומהיות K קמורה וקומפקטית נובע כי גם TK קמורה וקומפקטית. כמו כן $B\subset K$ ולכן $TB\subset TK$.

נתבונן בנקודה $\overline{y}:=\left(\int_B\phi_1(x)\,d\mu(x),\ldots,\int_B\phi_n(x)\,d\mu(x)\right)$, ונרצה להראות כי $\overline{y}\in TK$, ובזאת נסיים. נשים לב כי מתכונות האינטגרל ניתן להראות כי $\overline{y}\in\overline{\mathrm{Conv}}TB$ (שכן באופן כללי, $\int_B\phi(x)\,d\mu(x)\in\overline{\mathrm{Conv}}\phi(B)$), ולכן גם $\overline{y}\in\overline{\mathrm{Conv}}TK$. אבל TK קמורה, וכמו כן היא קומפקטית במרחב האוסדורף ולכן גם סגורה, ולכן $\overline{y}\in TK$, כנדרש. ■

טענה: יהי X מרחב וקטורי טופולוגי האוסדורף קמור מקומית, ותהי $B\subset X$ קומפקטית. אזי $K:=\overline{\mathrm{Conv}}B$ שווה למשפחת כל נקודות מרכזי הכובד של מידות בורל רגולריות והסתברות על B.

הוכחה: מצד אחד, אם $x_0\in X$ היא מרכז כובד, אז היא ב-K (אחרת ניתן להפריד על ידי פונקציונל).

מצד שני, תהי $x_0 \in K$, ונמצא מידת הסתברות ש-x_0 היא מרכז הכובד שלה. נקבע רשת $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathrm{Conv}B$ המקיימת $x_\alpha \to x_0$. מההנחה שהרשת היא בתוך $\mathrm{Conv}B$ נובע כי ניתן לכתוב $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha,i} y_{\alpha,i}$ כצירוף קמור, עבור $y_{\alpha,i} \in B$. עבור α, נגדיר מידה μ על B על ידי,

$$\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha,i} \delta_{y_{\alpha,i}}$$

ומתקיים כי,

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha,i} y_{\alpha,i} = \int\limits_B x d\mu_\alpha$$

וכמו כן μ_α מידת הסתברות בורל רגולרית על B, שהיא קומפקטית והאוסדורף, ולכן ממשפט בנך אלאוגלו נובע שיש תת רשת שנסמן $\{\mu_\gamma\}_{\gamma\in C}$ עבור $C \subset A$, שהיא ω^*-מתכנסת $\mu_\gamma \to \mu_0$. נראה כי μ_0 היא המידה המבוקשת.

נשים לב שלכל $\phi \in X^*$ מתקיים,

$$\begin{aligned} \phi(x_0) &= \lim_\gamma \phi(x_\gamma) = \lim_\gamma \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma,i} \phi(y_{\gamma,i}) \\ &= \lim_\gamma \int\limits_B \phi(x) f\mu_\gamma(x) = \int\limits_B \phi(x) d\mu_0 \end{aligned}$$

כנדרש. ■

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף קמור מקומית. תהי $K \subset X$ קבוצה קומפקטית וקמורה. אזי ממשפט קריין מילמן נובע כי הקבוצה,

$$K = \overline{\mathrm{Conv}}\mathrm{Ext}K = \overline{\mathrm{ConvExt}}K$$

שווה לאוסף מרכזי הכובד של מידות בורל רגולריות הסתברות על $\overline{\mathrm{Ext}}K$.

חלק IX

אופרטורים על מרחבי הילברט

תזכורת: אם $\mathbf{H}$ מרחב הילברט, $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי רציף, אז מתקיים:

1. $\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|=\|y\|=1}\{|\langle Tx,y\rangle|\}$.
2. יש $T^*:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי רציף ויחיד, כך שמתקיים $\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$ לכל $x,y\in\mathbf{H}$, וכן $\|T\|=\|T^*\|$.
אם $T=T^*$, אומרים כי T הוא **אופרטור סימטרי**.

למה: יהי $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי רציף וסימטרי. מתקיים,

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\{|\langle Tx,x\rangle|\}$$

הוכחה: נסמן $m=\sup_{\|x\|=1}\{|\langle Tx,x\rangle|\}$. מצד אחד, בבירור מתקיים $m\le\|T\|$. מצד שני, נשים לב שלכל $x,y\in\mathbf{H}$,

$$\langle T(x\pm y),x\pm y\rangle=\langle Tx,x\rangle\pm 2\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle+\langle Ty,y\rangle$$

נחסר את המשוואה בסימן שלילי מהמשוואה בסימן חיובי, ונקבל כי,

$$\langle T(x+y),x+y\rangle-\langle T(x-y),x-y\rangle=4\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle$$

נשים לב שלכל $z\in\mathbf{H}$ מתקיים $\frac{\langle Tz,z\rangle}{\|z\|^2}=\left\langle T\frac{z}{\|z\|},\frac{z}{\|z\|}\right\rangle\le m$, כלומר $\langle Tz,z\rangle\le m\|z\|$, ולכן,

$$\begin{aligned}4\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle &= \langle T(x+y),x+y\rangle-\langle T(x-y),x-y\rangle\\ &\le m\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)=2m\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נובע משוויון המקבילית. כלומר עבור $\|x\|=\|y\|=1$ נקבל,

$$\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle\le m$$

לבסוף, נבחר זווית θ כך שיתקיים $\mathrm{Re}e^{i\theta}\langle Tx,y\rangle=|\langle Tx,y\rangle|$, ונקבל כי,

$$|\langle Tx,y\rangle|=\mathrm{Re}\left\langle T\left(e^{i\theta}x\right),y\right\rangle\le m$$

כנדרש. ■

הגדרה: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט ספרבילי. יהי $\{\varphi_k\mid k\in\mathbb{N}\}\subset\mathbf{H}$ בסיס אורתונורמלי. אופרטור לינארי רציף $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ נקראת **אלכסוני** ביחס לבסיס $\{\varphi_k\}$, אם לכל $k\in\mathbb{N}$ קיים $\lambda_k\in\mathbb{C}$, כך שמתקיים $T\varphi_k=\lambda_k\varphi_k$. במקרה זה, כל φ_k נקרא **וקטור עצמי** של T, וכל λ_k נקרא **ערך עצמי** של T ביחס ל-φ_k.

הערה: בתנאים הנ"ל, כל $x\in\mathbf{H}$ ניתן לכתוב על ידי $x=\sum_k a_k\varphi_k$ עבור $a_k\in\mathbb{C}$, ונקבל מרציפות ואורתונורמליות כי,

$$Tx=\sum_k a_k\lambda_k\varphi_k$$

דוגמה: נתבונן במרחב $L^2(\mathbb{T})$ עבור $\mathbb{T} = {}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$, ובאופרטור $T_h f(x) = f(x+h)$ עבור $h \in \mathbb{C}$. נקבע בסיס אורתונורמלי $\varphi_k(x) = e^{2\pi ikx}$ עבור $k \in \mathbb{Z}$, ונקבל כי,

$$T_h\varphi_k(x) = \varphi_k(x+h) = e^{2\pi ik(x+h)} = e^{2\pi ihk} \cdot e^{2\pi ikx} := \lambda_k \cdot \varphi_k(x)$$

הערות:

1. אם T אלכסוני ביחס לבסיס $\{\varphi_k\}$ על ידי הערכים העצמיים $\{\lambda_k\}$, אז מתקיים $\|T\| = \sup_k\{|\lambda_k|\}$. מצד אחד,
$$\|T\| \geq \|T\varphi_k\| = |\lambda_k|\,\|\varphi_k\| = |\lambda_k|$$
ולכן $\|T\| \geq \sup_k\{|\lambda_k|\}$. מצד שני, אם נכתוב $x = \sum_k a_k\varphi_k$,
$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \sum_k |a_k|\,\|\lambda_k\varphi_k\|^2 = \sum_k |a_k|\,|\lambda_k|^2\\ &\leq \sup_k\{|\lambda_k|\}\cdot\sum_k |a_k| = \sup_k\{|\lambda_k|\}\cdot\|x\|^2\end{aligned}$$
ועל ידי הוצאת שורש נובע כי $\|T\| \leq \sup_k\{|\lambda_k|\}$.
2. T אלכסוני ביחס לבסיס $\{\varphi_k\}$ על ידי הערכים העצמיים $\{\lambda_k\}$, אם ורק אם T^* אלכסוני ביחס לאותו בסיס על ידי הערכים העצמיים הצמודים $\{\overline{\lambda_k}\}$.
לכן אם T סימטרי אז כל הערכים העצמיים שלו ממשיים, כי $\lambda_k = \overline{\lambda_k}$.
3. אם T הוא הטלה אורתוגונלית על איזה תת מרחב סגור של $\mathbf{H}$, אז T אלכסוני ביחס לבסיס כלשהו, כך שהערכים העצמיים שלו הם רק 0 ו-1.

24 אופרטורים קומפקטיים

הגדרה: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט ספרבילי, ויהי $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ אופרטור לינארי. נסמן את כדור היחידה של $\mathbf{H}$, $B_{\mathbf{H}} = \{x \in \mathbf{H} \mid \|x\| = 1\}$.
אומרים כי T **אופרטור קומפקטי**, אם $\overline{TB_{\mathbf{H}}}$ קבוצה קומפקטית.

הערה: נשים לב כי $B_{\mathbf{H}}$ הוא לא בהכרח קומפקטי. למשל $B_{l^2(\mathbb{N})}$ מכיל את הסדרה (e_i), שאין לה תת סדרה מתכנסת. בפרט $\mathrm{Id} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ אינו בהכרח אופרטור קומפקטי.

הערה: אופרטור קומפקטי הוא חסום: אם הוא לא חסום, אז יש סדרה $(x_n) \subset B_{\mathbf{H}}$ המקיימת $\|Tx_n\| \to \infty$. כלומר $\overline{TB_{\mathbf{H}}}$ אינה קבוצה קומפקטית.

הערה: אם $\dim\mathrm{Im}T < \infty$ אז T אופרטור קומפקטי (כי במקרה זה $\mathrm{Im}T \cong \mathbb{R}^d$, ומרציפות T, לכל סדרה $(x_n) \subset B_{\mathbf{H}}$, הסדרה $(Tx_n) \in \mathbf{H}$ חסומה, ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת).

למה: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט ספרבילי.

1. אם $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ אופרטור לינארי חסום, $S : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ אופרטור קומפקטי, אז TS, ST אופרטורים קומפקטיים.
2. אופרטור לינארי $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ הוא קומפקטי, אם ורק אם יש סדרת אופרטורים לינאריים קומפקטיים $(T_n : \mathbf{H} \to \mathbf{H})$ המקיימת $\|T_n - T\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$. יתרה מזו, במקרה זה ניתן להניח גם כי T_n בעלי דרגה סופית (כלומר $\dim\mathrm{Im}T_n < \infty$).
3. אופרטור לינארי $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ הוא קומפקטי, אם ורק אם $T^* : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ קומפקטי.

הוכחה: (לא נוכיח כאן את חלק 3 של הלמה).

1. יהי $B\subset\mathbf{H}$ כדור היחידה הסגור.

- נראה כי ST אופרטור קומפקטי: T חסום ולכן $TB\subset B_R$ עבור $B_R\subset\mathbf{H}$ כדור סגור ברדיוס $R>0$ כלשהו. מרציפות T גם $\overline{TB}\subset B_R$. מקומפקטיות S נובע כי $\overline{SB_R}$ קבוצה קומפקטית, ומתקיים $STB\subset SB_R\subset\overline{SB_R}$. לכן $\overline{STB}$ קבוצה סגורה המוכלת בקבוצה הקומפקטית $\overline{SB_R}$, ולכן היא קומפקטית.
- נראה כי TS אופרטור קומפקטי: S קומפקטי ולכן $\overline{SB}$ קומפקטית. מרציפות T נובע כי $T\overline{SB}$ קומפקטית, ומתקיים $TSB\subset T\overline{SB}$. לכן $\overline{TSB}$ קבוצה סגורה המוכלת בקבוצה הקומפקטית $T\overline{SB}$, ולכן היא קומפקטית.

2. יהי $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי.

- בכיוון ראשון, נניח כי עבור (T_n) אופרטורים קומפקטיים מתקיים $\|T_n-T\|\to 0$ כאשר $n\to\infty$, ונראה כי T אופרטור קומפקטי. כלומר נראה שלכל סדרה $(Tx_n)\subset\overline{TB}$ יש תת סדרה מתכנסת.
נשתמש בטיעון אלכסון: נתבונן בסדרה $(x_n)\subset B$. נשים לב כי $(T_1x_n)\subset\overline{T_1B}$, ומקומפקטיות T_1 יש תת סדרה $\left(x_n^1\right)\subset(x_n)$ שעבורה $\left(T_1x_n^1\right)\subset\overline{T_1B}$ מתכנסת. באותו אופן, $\left(T_2x_n^1\right)\subset\overline{T_2B}$, ומקומפקטיות יש תת סדרה $\left(x_n^2\right)\subset\left(x_n^1\right)$ שעבורה $\left(T_2x_n^2\right)\subset\overline{T_2B}$ מתכנסת. נמשיך את הבנייה, ונקבל שלכל k, הסדרה $\left(T_kx_k^k\right)\subset\overline{T_kB}$ מתכנסת.
כעת נראה כי $\left(Tx_k^k\right)$ סדרה מתכנסת. נסמן $y_k:=x_k^k$. נשים לב שלכל k,m מתקיים,

$$\begin{aligned}\|Ty_k-Ty_m\| &= \|Ty_k-T_ny_k+T_ny_k-T_ny_m+T_ny_m-Ty_m\|\\ &\le \|Ty_k-T_ny_k\|+\|T_ny_k-T_ny_m\|+\|T_ny_m-Ty_m\|\\ &\le \|T-T_n\|\,\|y_k\|+\|T_n\left(y_k-y_m\right)\|+\|T_n-T\|\,\|y_m\|\end{aligned}$$

וזאת לכל n שרירותי. נשים לב כי לכל n, המחובר האמצעי קטן כרצוננו עבור $k,m\to\infty$ (כי (T_ny_k) סדרה מתכנסת). לבסוף, מהשאיפה $\|T_n-T\|\to 0$ כאשר $n\to\infty$, ניתן לבחור n מספיק גדול כך שהמחובר הראשון והמחובר השלישי קטנים כרצוננו.

- בכיוון שני, יהי T אופרטור קומפקטי כלשהו. נקבע $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{H}$. לכל N נתבונן בתת המרחב $V_N:=\overline{\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\{e_{N+1},e_{N+2},\dots\}\right)}$, ותהי $Q_N:\mathbf{H}\to V_N$ ההטלה האורתוגונלית. נתבונן במרחב הניצב $V_N^{\perp}=\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(e_1,\dots,e_N\right)$, ותהי $P_N:\mathbf{H}\to V_N^{\perp}$ ההטלה האורתוגונלית. נראה כי $\|T-P_NT\|\to 0$ כאשר $N\to\infty$. נשים לב כי $\dim\mathrm{Im}P_N\le N<\infty$ וכי מחלק 1 של הלמה P_NT אופרטור קומפקטי, ולכן בזאת נוכל לסיים.
נשים לב כי לכל $x\in\mathbf{H}$, מתקיים $\|Q_Nx\|\to 0$ כאשר $N\to\infty$, היות שזה איבר הזנב של הטור המתכנס $\|x\|^2=\sum|\langle x,e_k\rangle|^2$ (משוויון בסל). עוד נשים לב כי $Q_N=\mathrm{Id}-P_N$, ולכן $Q_NT=T-P_NT$. אם כך נותר להראות כי $\|Q_NT\|=\|T-P_NT\|\to 0$ כאשר $N\to\infty$.
נניח בשלילה כי $\|Q_NT\|$ לא מתכנס לאפס. לכן יש $c>0$ עם תת סדרה המקיימת $\|Q_{N_k}\|\ge c>0$ לכל k. נניח ללא הגבלת הכלליות כי $\|Q_N\|\ge c>0$ לכל N. לכן לכל N יש איבר $x_N\in B\subset\mathbf{H}$ המקיים $\|Q_NTx_N\|>{}^{c}\!/_{2}$. מקומפקטיות T נובע כי לסדרה $(Tx_N)\subset\overline{TB}$ יש תת סדרה מתכנסת. נניח ללא הגבלת הכלליות כי $Tx_N\to x_0\in\mathbf{H}$. מתקיים,

$$\|Q_Nx_0\|=\|Q_NTx_N-Q_N\left(Tx_N-x_0\right)\|\ge|\|Q_NTx_N\|-\|Q_N\|\,\|Tx_N-x_0\||$$

אבל $\|Tx_N-x_0\|\to 0$ וכן $\|Q_NTx_N\|>{}^{c}\!/_{2}$, ולכן נובע כי עבור N גדול מספיק מתקיים $\|Q_Nx_0\|>{}^{c}\!/_{4}$, בסתירה להנחה כי $\|Q_Nx\|\to 0$ לכל $x\in\mathbf{H}$. ■

הגדרה: נתבונן במרחב $\mathbf{H}=L^2(D)$ עבור $D\subset\mathbb{R}^d$ תחום פתוח כלשהו. נקבע פונקציה $\mathrm{k}\in L^2(D\times D)$, ויהי $T_{\mathrm{k}}:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ האופרטור $T_{\mathrm{k}}f(x)=\int_D\mathrm{k}(x,y)\,f(y)\,dy$. אופרטור זה מכונה **אופרטור הילברט שמידט**. k מכונה **הגרעין** של T_{k}.

הערה: הבנייה טובה באותה מידה גם עבור $L^2(\Xi)$ עבור Ξ מרחב מידה סופי, או גם עבור $L^2(K)$ עבור K מרחב מטרי קומפקטי.

טענה:

1. נקבע $f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. לכל $x \in \mathbb{H}$ תהי $\phi_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ההעתקה $\phi_x(y) = \mathrm{k}(x,y) \cdot f(y)$. אז ϕ_x אינטגרבילית כמעט לכל x, ולכן $T_{\mathrm{k}} f(x) = \int_D \phi_x(y)\,dy$ מוגדר היטב.
2. T_{k} אופרטור רציף, ומתקיים $\left\|T_{\mathrm{k}}\right\| \le \|\mathrm{k}\|_{L^2(D\times D)}$.
3. $\left(T_{\mathrm{k}}\right)^*$ גם הוא אופרטור הילברט שמידט, שגרעינו הוא $\overline{\mathrm{k}(y,x)}$.

הוכחה:

1. מההנחה $\mathrm{k} \in L^2(D\times D)$, על ידי משפט פוביני נובע כי ההעתקה $y \mapsto |\mathrm{k}(x,y)|^2$ אינטגרבילית כמעט לכל x. אם כך נובע כי כמעט לכל x,

$$\int_D |\mathrm{k}(x,y)\cdot f(y)|\,dy \le \left(\int_D |\mathrm{k}(x,y)|^2\,dy\right)^{1/2} \cdot \left(\int_D |f(y)|^2\,dy\right)^{1/2} = \|\mathrm{k}\|_{L^2}\cdot\|f\|_{L^2} < \infty$$

2. נחשב,

$$\begin{aligned}\left\|T_{\mathrm{k}} f\right\|^2_{L^2(D)} &= \int_D \left|\int_D \phi_x(y)\,dy\right|^2 dx \le \int_D \left[\left(\int_D |f(y)|^2\,dy\right)\cdot\left(\int_D |\mathrm{k}(x,y)|^2\,dy\right)\right] dx \\ &= \left(\int_{D\times D} |\mathrm{k}(x,y)|^2\,dydx\right)\cdot\left(\int_D |f(y)|^2\,dy\right) = \|\mathrm{k}\|^2_{L^2(D\times D)}\cdot\|f\|^2_{L^2(D)}\end{aligned}$$

3. נחשב על ידי משפט פוביני,

$$\begin{aligned}\left\langle T_{\mathrm{k}} f(x), g(x)\right\rangle &= \int_D\left(\int_D \mathrm{k}(x,y)\,f(y)\,dy\right) g(x)\,dx \\ &= \int_D\left(\int_D \mathrm{k}(x,y)\,f(y)\,g(x)\,dx\right) dy \\ &= \int_D\left(\int_D \mathrm{k}(x,y)\,g(x)\,dx\right) f(y)\,dy = \left\langle f(y), T_{\mathrm{l}}\, g(y)\right\rangle\end{aligned}$$

■

טענה: אופרטור הילברט שמידט $T_{\mathrm{k}} : L^2(D) \to L^2(D)$ עבור גרעין $\mathrm{k} \in L^2(D\times D)$, הוא אופרטור קומפקטי.

הוכחה: מהלמה לעיל נובע שדי להראות כי הוא גבול אופרטורי של אופרטורים קומפקטיים.

נקבע $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ בסיס אורתונורמלי של $L^2(D)$. קל לראות כי $\{(x,y) \mapsto \varphi_i(x)\,\varphi_j(y) \mid i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ בסיס אורתונורמלי של $L^2(D\times D)$. לכן ניתן לכתוב,

$$\mathrm{k}(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)$$

עבור $a_{ij} \in \mathbb{C}$ המקיימים $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \infty$. נתבונן בגרעינים הבאים,

$$\mathrm{k}_n(x,y) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y)$$

ויהיו $\{T_n\}$ אוסף אופרטורי הילברט שמידט המתאים, כלומר k_n הגרעין של T_n.

- נראה כי T_n אופרטור קומפקטי לכל n. תהי $f \in L^2(D)$. נפתח אותה לפי הבסיס הנתון, $f = \sum_k b_k\varphi_k$ עבור $b_k \in \mathbb{C}$ המקיימים $\sum_k |b_k|^2 < \infty$. אזי מתקיים,

$$\begin{aligned} T_n f(x) &= \int\limits_D \mathrm{k}_n(x,y) f(y)\,dy = \int\limits_D \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y)\sum_k b_k\varphi_k(y)\,dy \\ &= \left[\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\varphi_i(x)\right]\int\limits_D \sum_k b_k\varphi_j(y)\varphi_k(y)\,dy \\ {\scriptstyle(\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle=\delta_{jk})}\quad &= \left[\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\varphi_i(x)\right]\int\limits_D \varphi_j(y)\,dy = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\varphi_i(x) \end{aligned}$$

ולכן נובע כי $\mathrm{Im}T_n = \mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, כלומר $\dim \mathrm{Im}T_n < \infty$, ולכן T_n אופרטור קומפקטי.

- נראה כי $\|T_n - T\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$. נשים לב כי,

$$(T_n - T) f(x) = \int\limits_D (\mathrm{k} - \mathrm{k}_n)(x,y) f(y)\,dy$$

ולכן נובע כי,

$$\|T_n - T\|^2 \le \|\mathrm{k} - \mathrm{k}_n\|_{L^2}^2 = \sum_{\{i>n\}\cup\{j>n\}} |a_{ij}|^2 \to 0\,,\ \ n\to\infty$$

כנדרש. ■

25 המשפט הספקטרלי לאופרטורים סימטריים קומפקטיים

משפט: יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט ספרבילי בעל ממד אינסופי. אז כל אופרטור לינארי קומפקטי וסימטרי $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, הוא לכסין. כלומר יש בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים $\{\varphi_k\}$ של $\mathbf{H}$, כך שלכל φ_k מתקיים $T\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$ עבור $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ערך עצמי מתאים. במקרה זה מתקיים גם $|\lambda_k| \to 0$ כאשר $k \to \infty$.

דוגמאות:

1. יהי $\mathbf{H}$ מרחב הילברט ספרבילי עם בסיס אורתונורמלי $\{\varphi_k\}$. נגדיר $T : \varphi_k :\mapsto \frac{\varphi_k}{k+1}$. אז T אופרטור קומפקטי ולא סימטרי. ניתן להראות כי אין ל-T וקטורים עצמיים כלל.
2. יהי $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ האופרטור $Tf(t) = tf(t)$. אז T אופרטור סימטרי ולא קומפקטי. ניתן להראות כי אין ל-T וקטורים עצמיים כלל.
3. אופרטור הילברט שמידט T_{k} הוא קומפקטי, והוא סימטרי אם $\mathrm{k}(x,y) = \overline{\mathrm{k}(y,x)}$. במקרה זה יש ל-$T_{\mathrm{k}}$ בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים.

למה 1: אם $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי סימטרי, אז לכל $\varphi\in\mathbf{H}$ המקיים $T\varphi=\lambda\varphi$ לאיזה λ, אז $\lambda\in\mathbb{R}$.

הוכחה: נחשב,

$$\begin{aligned}\lambda\left\|\varphi\right\|^2 &= \lambda\left\langle\varphi,\varphi\right\rangle=\left\langle T\varphi,\varphi\right\rangle\\ &= \left\langle\varphi,T\varphi\right\rangle=\overline{\lambda}\left\|\varphi\right\|^2\end{aligned}$$

ולכן $\lambda=\overline{\lambda}$. ▲

הגדרה: לכל אופרטור לינארי $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, ולכן $\lambda\in\mathbf{H}$ ערך עצמי של T, נגדיר את **המרחב העצמי** של T ביחס ל-λ להיות $V_\lambda:=\ker\left(T-\lambda I\right)=\left\{x\in\mathbf{H}\mid Tx=\lambda x\right\}$. קל לראות כי זה תת מרחב של $\mathbf{H}$.

למה 2: אם $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי קומפקטי, וכן $\lambda\in\mathbb{C}$ ערך עצמי של T, אז $\dim V_\lambda<\infty$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $\dim V_\lambda=\infty$. יהי $\{\varphi_k\}$ בסיס אורתונורמלי אינסופי של V_λ. מקומפקטיות T נובע כי לסדרה $(\lambda\varphi_k)=(T\varphi_k)\subset\overline{TB_{\mathbf{H}}}$ יש תת סדרה מתכנסת. נניח ללא הגבלת הכלליות שזו היא עצמה, ולכן $(\lambda\varphi_k)$ היא סדרת קושי. אבל נשים לב כי מאורתונורמליות נובע כי $\left\|\lambda\varphi_k-\lambda\varphi_j\right\|=|\lambda|\left(\left\|\varphi_k\right\|+\left\|\varphi_j\right\|\right)=2\lambda$, וזו סתירה. ▲

למה 3: אם $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי קומפקטי וסימטרי, אז לכל $r>0$, כמעט כל הערכים העצמיים מצויים בתוך $B_r(0)$ (כלומר למעט אולי מספר סופי של מקרים).

בפרט יש מספר בן מניה של ערכים עצמיים, וכמו כן $\dim\operatorname{Span}_{\text{Alg}}\left(\left\{V_\lambda\mid\lambda>r\right\}\right)<\infty$ לכל $r>0$.

הוכחה: נניח בשלילה כי עבור $r>0$, יש אינסוף ערכים עצמיים $\{\lambda_k\}$ מחוץ לכדור $B_r(0)$. נניח כי $\{\varphi_k\}$ הוקטורים העצמיים המתאימים.

- תחילה נשים לב כי עבור $\lambda_k\neq\lambda_j$ מתקיים $\left\langle\varphi_k,\varphi_j\right\rangle=0$, שכן מצד אחד,

$$\left\langle T\varphi_k,\varphi_j\right\rangle=\left\langle\lambda_k\varphi_k,\varphi_j\right\rangle=\lambda_k\left\langle\varphi_k,\varphi_j\right\rangle$$

ומצד שני,

$$\left\langle\varphi_k,T\varphi_j\right\rangle=\left\langle\varphi_k,\lambda_j\varphi_j\right\rangle=\overline{\lambda}_j\left\langle\varphi_k,\varphi_j\right\rangle$$

אבל מסימטריות T נובע כי שני הביטויים שווים. מהנתון $\lambda_k\neq\lambda_j=\overline{\lambda}_j$ נובע כי בהכרח $\left\langle\varphi_k,\varphi_j\right\rangle=0$.

- נניח ללא הגבלת הכלליות כי $\left\|\varphi_k\right\|=1$ לכל k (אחרת ננרמל), ונקבל כי $\{\varphi_k\}$ בסיס אורתונורמלי. מקומפקטיות T נובע כי לסדרה $(\lambda_k\varphi_k)=(T\varphi_k)$ יש תת סדרה מתכנסת, נניח ללא הגבלת הכלליות שזו היא עצמה, ולכן $(\lambda_k\varphi_k)$ היא סדרת קושי. אבל נשים לב כי מאורתונורמליות נובע כי $\left\|\lambda_k\varphi_k-\lambda_j\varphi_j\right\|^2=\left\|\lambda_k\varphi_k\right\|^2+\left\|\lambda_j\varphi_j\right\|^2=|\lambda_k|^2+|\lambda_j|^2>2r^2$, וזו סתירה. ■

למה 4: אם $0\neq T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי קומפקטי וסימטרי, אז $\|T\|$ או $-\|T\|$ הוא ערך עצמי של T.

הוכחה: נשים לב כי מסימטריות T, כפי שהראינו, נובע כי $\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\left|\left\langle Tx,x\right\rangle\right|$. לכן מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות: $\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\left\langle Tx,x\right\rangle$ או $-\|T\|=\inf_{\|x\|=1}\left\langle Tx,x\right\rangle$. ננתח את האפשרות הראשונה ונראה כי אז $\|T\|$ הוא ערך עצמי של T. ניתוח אנלוגי של האפשרות השנייה יראה כי $-\|T\|$ הוא ערך עצמי של T.

- תהי $(x_n)\subset\mathbf{H}$ סדרה עם $\|x_n\|=1$, המקיימת $\left\langle Tx_n,x_n\right\rangle\to\|T\|$. מקומפקטיות T נובע שיש ל-(Tx_n) תת סדרה מתכנסת. נניח ללא הגבלת הכלליות כי הסדרה עצמה מתכנסת, נאמר $\left\|Tx_n-y_0\right\|\to0$ כאשר $n\to\infty$.
- נסמן $\lambda:=\|T\|$, נראה כי $Ty_0=\lambda y_0$, על ידי כך שנראה כי שני הצדדים הם הגבול של $T\lambda x_n$:
  - מצד אחד, נשים לב כי $\left\|T\lambda x_n-\lambda y_0\right\|=\left\|\lambda Tx_n-\lambda y_0\right\|=|\lambda|\left\|Tx_n-y_0\right\|\to0$. כלומר $T\lambda x_n\to\lambda y_0$.

- מצד שני, נשים לב שמתקיים,

$$\begin{aligned}\left\|Tx_n-\lambda x_n\right\|^2 &= \left\|Tx_n\right\|^2-\langle Tx_n,\lambda x_n\rangle-\langle\lambda x_n,Tx_n\rangle+|\lambda|^2\left\|x_n\right\|^2\\ \left({\scriptstyle\|x_n\|=1}\text{ and }{\scriptstyle\lambda\in\mathbb{R}}\right) &= \left\|Tx_n\right\|^2-2\lambda\langle Tx_n,x_n\rangle+|\lambda|^2\le|\lambda|^2-2\lambda\langle Tx_n,x_n\rangle+|\lambda|^2\\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\lambda|^2-2\lambda^2+|\lambda|^2=0\end{aligned}$$

אבל מתקיים $Tx_n\to y_0$, ולכן בהכרח $\lambda x_n\to y_0$.על ידי רציפות T נובע כי $\lambda Tx_n=T\lambda x_n\to Ty_0$.

- נותר להראות כי $y_0\neq 0$. נשים לב כי מתקיים $Tx_n\to y_0$. לכן אם היה $y_0=0$ היינו מסיקים כי $\langle Tx_n,x_n\rangle\le\|Tx_n\|\|x_n\|=\|Tx_n\|\to 0$. אבל בחרנו את (x_n) שתקיים $\langle Tx_n,x_n\rangle\to\|T\|\neq 0$ (נתון $T\neq 0$). ■

הוכחת המשפט הספקטרלי: יהי V תת המרחב הסגור הנוצר על ידי הווקטורים העצמיים של T. כלומר, $V=\overline{\mathrm{Span}_{\mathrm{Alg}}\left(\{\varphi\mid\exists_\lambda,\,T\varphi=\lambda\varphi\}\right)}$. נרצה להראות כי $V=\mathbf{H}$.

נניח בשלילה כי $V\neq\mathbf{H}$, אז נכתוב $\mathbf{H}=V\oplus V^\perp$ עבור $V^\perp\neq\{0\}$.

- T משמרת את הפירוק $\mathbf{H}=V\oplus V^\perp$:
  - נראה כי $Tx\in V$ לכל $x\in V$. נשים לב שכל $x\in V$ ניתן לכתוב $x=\sum_i a_i\varphi_i$ עבור $a_i\in\mathbb{C}$ ועבור $\varphi_i\in V$ וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים λ_i. מכאן כי $Tx=\sum_i a_i\lambda_i\varphi_i\in V$.
  - נראה כי $Ty\in V^\perp$ לכל $y\in V^\perp$. נשים לב כי בהינתן $y\in V^\perp$, לכל $\varphi\in V$ מתקיים $\langle y,\varphi\rangle=0$, ולכן גם $\langle Ty,\varphi\rangle=\langle y,T\varphi\rangle=0$ (כי $T\varphi\in V$). כלומר $Ty\in V^\perp$.
- נשים לב כי $V^\perp$ תת מרחב סגור של מרחב הילברט, ולכן הוא מרחב הילברט. אם כך נתבונן באופרטור $S:=T\mid_{V^\perp}$. זהו אופרטור קומפקטי (כי T קומפקטי), ולכן מלמה 4 נובע כי $\|S\|$ הוא ערך עצמי של S, עבור איזשהו וקטור עצמי מתאים $\psi\in V^\perp$. כלומר $T\psi=S\psi=\|S\|\psi$. אבל אז נובע כי ψ הוא וקטור עצמי של T, כלומר $\psi\in V\backslash V^\perp$, וקיבלנו סתירה.

לבסוף, מלמה 3 נובע כי $|\lambda_k|\to 0$. ■

טענה: יהיו $T,S:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטורים לינאריים קומפקטיים וסימטריים, ונניח כי הם מתחלפים, כלומר $TS=ST$. אזי הם לכסינים סימולטנית. כלומר יש בסיס אורתונורמלי $\{\varphi_k\}$ של $\mathbf{H}$, שאיבריו הם וקטורים עצמיים גם של T וגם של S.

הוכחה: לכל λ ערך עצמי של T, יהי $V_\lambda=\ker(T-\lambda I)$ המרחב העצמי המתאים ביחס ל-T. נשים לב כי S משמרת את V_λ, כי לכל $\varphi\in V_\lambda$,

$$TS\varphi=ST\varphi=S\lambda\varphi=\lambda S\varphi$$

ונובע כי $S\varphi\in V_\lambda$.

נשים לב כי $S\mid_{V_\lambda}$ הוא אופרטור קומפקטי וצמוד לעצמו (V_λ ממימד סופי ולכן הילברט), ולכן מהמשפט הספקטרלי יש ל-V_λ בסיס אורתונורמלי (סופי) $\Phi_\lambda\subset V_\lambda$ שביחס אליו $S\mid_{V_\lambda}$ לכסינה.

לא קשה להראות כי $\bigcup\{\Phi_\lambda\mid\lambda\text{ is an eigenvalue of }T\}$ הוא בסיס אורתונורמלי בן מניה שביחס אליו T,S לכסינות סימולטנית. ■

מסקנה: יהי $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי קומפקטי, המקיים $TT^*=T^*T$. אזי T לכסין.

הוכחה: נגדיר את האופרטור $T_1:=\frac{1}{2}(T^*+T)$ ואת האופרטור $T_2:=\frac{i}{2}(T^*-T)$. קל לראות כי T_1,T_2 אופרטורים לינאריים קומפקטיים וסימטריים, ולכן מהמשפט הספקטרלי הם לכסינים. קל גם לראות כי הם מתחלפים (מנורמליות T), ולכן מהטענה האחרונה הם גם לכסינים סימולטנית. נשים לב שניתן לכתוב זהותית $T=T_1+iT_2$, ולכן גם T לכסין. ■

מסקנה: יהי $T:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ אופרטור לינארי קומפקטי וחיובי, כלומר $\langle Tx,x\rangle\geq 0$ לכל $x\in\mathbf{H}$. אזי יש לו שורש קומפקטי וחיובי. כלומר: יש אופרטור לינארי קומפקטי וחיובי $S:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, כך שמתקיים $S^2=T$.

הוכחה: יהי $\{\varphi_k\}$ בסיס אורתונורמלי שביחס אליו T לכסין, עם הערכים העצמיים המתאימים $\{\lambda_k\}$. נשים לב כי $\lambda_k\left\|\varphi_k\right\|^2=\lambda_k\left\langle\varphi_k,\varphi_k\right\rangle=\left\langle T\varphi_k,\varphi_k\right\rangle\geq 0$, ולכן $\lambda_k\geq 0$ לכל k. מהמשפט הספקטרלי גם $|\lambda_k|\to 0$. אם כך נגדיר את S על ידי $S\left(\sum_k a_k\varphi_k\right):=\sum_k a_k\sqrt{\lambda_k}\varphi_k$. קל לראות כי S אלכסוני ביחס לבסיס $\{\varphi_k\}$ עם הערכים העצמיים $\left\{\sqrt{\lambda_k}\right\}$, וכי הוא קומפקטי וחיובי (כי $\sqrt{\lambda}\geq 0$), וכי הוא שורש של T. ■

תרגיל: שורש של אופרטור לינארי קומפקטי וחיובי, הוא יחיד.