דף תרגילים מס' 7 במשוואות דיפרנציאליות רגילות

הסימון $y'=\dfrac{dy}{dt}$**. כמו כן** $z^{(k)}$ **מסמן נגזרת מסדר** k**.**

1) בכל אחת מהמשוואות הבאות, לקבוע את אופי הנקודה הקריטית בראשית ולשרטט את מבנה המסלולים במישור הפאזות (מומלץ להשתמש בבניית המסלולים מתוך השדה הווקטורי הנתון על-ידי אגף ימין):

א) $y'(t)=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -2\end{pmatrix}y(t)$.

ב) $y'(t)=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}y(t)$.

ג) $y'(t)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}y(t)$.

2) נתונה המערכת האוטונומית במקדמים קבועים (ממשיים):

$$y'(t)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}y(t)$$

כאשר $ad-bc\neq 0$. נסמן:

$p=a+d,\quad q=ad-bc,\quad \Delta=p^2-4q$. להראות כי הנקודה הקריטית $(0,0)$ היא:

א) צומת, אם $q>0,\quad \Delta\geq 0$.

ב) נקודת אוכף, אם $q<0$.

ג)ספירלה, אם $p\neq 0,\quad \Delta<0$.

ד) מרכז, אם $p=0,\quad q>0$.

$Boyce-Di\Pr ima,\quad Sec.9.3.problem16$.

3) בהמשך לשאלה הקודמת ובאותם סימונים, להראות כי הנקודה הקריטית $(0,0)$ היא :

א) יציבה אסימפטוטית , אם $p<0,\quad q>0$.

ב) יציבה , אם $p=0,\quad q>0$.

ג) בלתי יציבה , אם $q<0$ או $p>0$.

4) **המשוואה הליניארית למסה קשורה לקפיץ עם חיכוך** היא:

$$mz''(t)+cz'(t)+kz(t)=0,\quad z(0)\neq 0$$

כאשר $z(t)$ הוא המרחק מנקודת שיווי המישקל $z=0$ בזמן t והקבועים

$m>0$(מסה), $k>0$(קבוע הקפיץ), $c\geq 0$(מקדם חיכוך).

א) להראות כי אם $c^2<4mk$

אזי הפתרון נתון על-ידי "תנועה אוסצילטורית" (מרוסנת אם $c>0$). להציג את הפתרון כפונקציה של הזמן וגם במישור פאזות מתאים.

ב) להראות כי אם $c^2>4mk$ אזי הפיתרון מתכנס לנקודת שיווי המישקל ללא אוסצילציות (ולהציג אותו כפונקציה של הזמן ובמישור הפאזות).

5) יהי $z(t)$ פתרון למשוואה $z''(t)+az'(t)+bz(t)=0,\quad a,b\in R$. נתון כי

$z(0)=z(1), \quad z'(0)=z'(1)$. להוכיח כי הפתרון מחזורי, כלומר
$z(t+1)=z(t), \quad t \in R$.

6) מתבוננים במערכת אוטונומית
$$y'(t)=f(y(t)), \quad y(t) \in R^m$$

כאשר $f(y) \in R^m$ גזירה ברציפות.
תהי $\Lambda \subseteq R^m$ פתוחה כך שלכל $x \in \Lambda$ אינטרוול הפתרון המקסימלי של $y(t;x)$ כולל קטע

$[0,T]$ בלתי תלוי ב-$x \in \Lambda$ (הפתרון מקיים $y(0;x)=x$).
להוכיח כי אם $div\, f(y)=\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+...+\frac{\partial f_m}{\partial y_m} \equiv 0$ אזי לכל $t \in [0,T]$ ההעתקה המוגדרת על Λ

על ידי $x \to y(t;x)$ היא שומרת נפח (במובן נפח אוקלידי ב-R^m).
הצעה: על פי 4 $Summary$ המטריצה היעקוביאנית $\frac{\partial y}{\partial x}$ מקיימת משוואה ליניארית
$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial x}(t)=A(t)\frac{\partial y}{\partial x}(t)$ כאשר $trace\ A(t)=0$.