דף תרגילים מס' 6 במשוואות דיפרנציאליות רגילות

הסימון $y'=\dfrac{dy}{dt}$ **. כמו כן** $z^{(k)}$ **מסמן נגזרת מסדר** k **.**

1) יהיו $y^1(t),...,y^m(t)\in C^1(I,R^m)$ פונקציות וקטוריות גזירות ברציפות על הקטע $I=(\alpha,\beta)$.
נניח כי הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית (מעל R) בכל נקודה בקטע. להוכיח כי קיימת בדיוק
מטריצה (רציפה) אחת $A(t)\in Hom(R^m,R^m)$ כך שהפונקציות הווקטוריות הנתונות מהוות בסיס
למרחב הפתרונות של $y'(t)=A(t)y(t)$ בקטע.
הערה: לשים לב כי כל הווקטורים ממשיים.

2) לנסח ולהוכיח משפט דומה עבור m פונקציות ממשיות סקלריות המהוות בסיס למרחב הפתרונות
(בקטע) של משוואה ליניארית סקלרית מסדר m (במקדמים ממשיים).

3) **שיטת הוואריאציה של הפרמטרים למשוואה ליניארית סקלרית מסדר** m: ($Boyce-Di\Pr ima, Sec.5.5$).
מתבוננים במשוואה הסקלרית
$z^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t)+...+a_0(t)z(t)=r(t)$ כאשר $a_{m-1}(t),a_{m-2}(t),...,a_0(t),r(t)$
הן פונקציות ממשיות רציפות בקטע $I=(\alpha,\beta)$. יהי $\{z_1(t),...,z_m(t)\}$ בסיס לפתרונות המשוואה
ההומוגנית ($r(t)\equiv 0$) ויהי
$$W(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) & ... & z_m(t)\\ z_1'(t) & z_2'(t) & ... & z_m'(t)\\ ... & ... & ... & ...\\ z_1^{(m-1)}(t) & z_2^{(m-1)}(t) & ... & z_m^{(m-1)}(t)\end{pmatrix}$$
הוורונסקיאן שלהם.

א) להראות כי ניתן למצוא פתרון פרטי למשוואה (הלא-הומוגנית) מהצורה:
$z^{part}(t)=u_1(t)z_1(t)+u_2(t)z_2(t)+...+u_m(t)z_m(t)$ כאשר
$\{u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)\}$ הן פונקציות גזירות ברציפות בקטע I שנגזרותיהן מקיימות את מערכת המשוואות:
$$W(t)\begin{pmatrix} u_1'(t)\\ u_2'(t)\\ ...\\ u_{m-1}'(t)\\ u_m'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ r(t)\end{pmatrix}.$$

ב) כיצד ניתן לקבל את הנוסחה הזאת מתוך המשוואה הכללית למערכת ($Summary\ 5$):
$$y^{part}(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}b(s)ds\ ?$$

4) למצוא פתרונות פרטיים למשוואות הבאות:

א) $z'''+z'=\tan t,\quad 0<t<\dfrac{\pi}{2}$

(ראה $Boyce-Di\Pr ima, Sec.5.5$).

ב) $t \in R \quad, z'''-2z''-z'+2z=e^{4t}$.

ג) $t \in R \quad ,z''+z=\cos t$.

5) משוואת צ'בישף $(Boyce-Di\Pr ima, Sec.4.2)$:

$(1-t^2)z''(t)-tz'(t)+\alpha^2 z(t)=0$ (α^2 ממשי אישלילי כלשהו).

א) למצוא שני פתרונות בסיס בקטע $(-1,1)$.

ב) להראות כי אם α טבעי, יהיה פתרון אחד שהוא פולינום (הקרוי פולינום צ'בישף).

ג) לחשב את פולינום צ'בישף עבור $\alpha=0,1,2,3$.

6) משוואת לז'נדר $(Boyce-Di\Pr ima, Sec.4.2)$:

$(1-t^2)z''(t)-2tz'(t)+\alpha(\alpha+1)z(t)=0$ ($\alpha>-1$ ממשי).

א) לכתוב שני פתרונות בסיס $z_1(t), z_2(t)$ בקטע $(-1,1)$ כטורי חזקות, כך שהוורונסקיאן שלהם שווה למטריצת היחידה ב-$t=0$.

ב) להראות כי אם $\alpha=0,2,4,...$ הוא טבעי זוגי אזי $z_1(t)$ הוא פולינום מסדר α ולחשב את ארבעת הפולינומים הראשונים.

ג) להראות כי אם $\alpha=1,3,5,...$ הוא טבעי אי-זוגי אזי $z_2(t)$ הוא פולינום מסדר α ולחשב את ארבעת הפולינומים הראשונים.

7) למצוא את הפתרונות הכלליים למשוואות הבאות:

א) $z''(t)+6z'(t)+9z(t)=0$.

ב) $z''(t)-z'(t)=t$.

ג) $z^{(5)}(t)-3z^{(4)}(t)+4z'''(t)-4z''(t)+3z'(t)-z(t)=0$.

8) למצוא את כל הפונקציות הממשיות, שהן גזירות פעמיים ברציפות על כל הישר ומקיימות:

$$f'(t)=f(-t).$$

9)א) (נוסחת $Abel$) נתבונן במשוואה הסקלרית מסדר שני:

$z''(t)+a_1(t)z'(t)+a_0(t)z(t)=0$ כאשר הפונקציות $a_0(t), a_1(t)$ ממשיות ורציפות בקטע $I=(\alpha,\beta)$. יהי $z_1(t)$ פתרון שאינו מתאפס באף נקודה בקטע. להוכיח כי פתרון שני בלתי תלוי בו נתון על-ידי:

$$z_2(t)=z_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\exp[-\int_{t_0}^{s}a_1(\theta)d\theta]}{z_1(s)^2}ds, \quad t,t_0 \in I.$$

הדרכה: מתוך הנוסחה לדטרמיננטת הוורונסקיאן ניתן לחשב את $z_1'z_2-z_1z_2'$ ובעקבות זאת את $\frac{d}{dt}\frac{z_2}{z_1}$.

ב) למשוואה

$$tz''(t)-2z'(t)+\frac{t^2+2}{t}z(t)=0,\quad 0<t<\pi$$

פתרון $z_1(t)=t\sin t$. למצוא פתרון בסיס שני בקטע.

10) נתבונן במחלקת הפתרונות של משוואות הליניאריות מסדר שני על קטע $I=(\alpha,\beta)\subseteq R$:

$$\Lambda=\{z(t):\quad z''(t)+a_1(t)z'(t)+a_0(t)z(t)=0,\quad a_1(t)\in C^1(I),\quad a_0(t)\in C(I)\}$$

ותהי G החבורה (הכפלית)

$G=\{g(t)>0,\quad g(t)\in C^2(I)\}$.

א) להוכיח כי אם $g(t)\in G$ ו- $z(t)\in\Lambda$ אזי גם $g(t)z(t)\in\Lambda$ כאשר

$$a_1(t)\to a_1(t)-2\frac{g'(t)}{g(t)},\quad a_0(t)\to a_0(t)-a_1(t)\frac{g'(t)}{g(t)}-\frac{g''(t)}{g(t)}+2\left(\frac{g'(t)}{g(t)}\right)^2 .$$

ב) תהי $z(t)\in\Lambda$ המקיימת

$$z''(t)+a_1(t)z'(t)+a_0(t)z(t)=0\quad .$$

להוכיח כי ה"מסלול" $\{g(t)z(t),\quad g\in G\}$ נתון על ידי אוסף כל האיברים $u(t)\in\Lambda$ המקיימים $u''(t)+b_1(t)u'(t)+b_0(t)u(t)=0$ כאשר

$$b_0(t)-\frac{b_1(t)^2}{4}-\frac{b_1'(t)}{2}=a_0(t)-\frac{a_1(t)^2}{4}-\frac{a_1'(t)}{2}=q(t)\quad .$$

ג) בפרט, להראות כי הפתרון של $v''(t)+q(t)v(t)=0$ נמצא במסלול המתואר בסעיף הקודם.

11) א) יהיו $v''(t)+q(t)v(t)=0$ ו- $u''(t)+p(t)u(t)=0$ פתרונות על קטע $I=(\alpha,\beta)\subseteq R$. נניח כי $p(t)\geq q(t)$ אבל הם לא זהים.
להוכיח כי בין שני אפסים סמוכים של $v(t)$ נמצא אפס של $u(t)$.

ב) להוכיח כי אם $v''(t)+q(t)v(t)=0$ כאשר $q(t)\leq 0$ אזי ל- $v(t)$ יש לכל היותר אפס אחד בקטע (אלא אם כן $q(t)\equiv 0$).

ג) תהי $u(t)$ פתרון של $u''(t)+\frac{B}{t^2}u(t)=0$ בקטע $I=(1,\infty)$. להוכיח כי ל- $u(t)$ יש אינסוף אפסים בקטע אם $B>\frac{1}{4}$ אבל רק מספר סופי של אפסים בקטע אם $B<\frac{1}{4}$.