דף תרגילים מס' 5 במשוואות דיפרנציאליות רגילות

הסימון $y'=\dfrac{dy}{dt}$ **. כמו כן** $z^{(k)}$ **מסמן נגזרת מסדר** k **.**

1) להראות כי לכל $m\geq 1$ טבעי, **לא קיימות** פונקציות רציפות על הקטע **הסגור** $[0,1]$
$a_0(t),a_1(t),...,a_{m-1}(t)$ כך שהפונקציה $z(t)=\sin\dfrac{1}{t}$ מקיימת
$z^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}+...+a_0(t)z(t)\equiv 0$ בקטע הפתוח $(0,1)$.

2) א) נתבונן במשוואה $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ בקטע $I=(\alpha,\beta)$, כאשר הפונקציות $p(t),q(t)$ רציפות בקטע. נניח כי קיים פתרון $y_1(t)$ שאינו מתאפס באף נקודה. להוכיח כי שינוי הפונקציה הנעלמת $v(t)=\dfrac{y(t)}{y_1(t)}$ מעביר את המשוואה לצורה

$$v''(t)+(p(t)+2\frac{y'_1(t)}{y_1(t)})v'(t)=0.$$

(ראה $Boyce-DiPrima, Sec.3.4$).

ב) להראות שכל הפתרונות של משוואת לז'נדר מהסדר הראשון:
$(1-t^2)y''(t)-2ty'(t)+2y(t)=0$ קיימים (לפחות) בקטע $(-1,1)$ ולמצוא שני פתרונות בסיס.
(לשים לב כי $y_1(t)=t$ הוא פתרון).

3) להראות כי כל פתרונות המשוואה
$ty''(t)-(t+N)y'(t)+Ny(t)=0$ (N ממשי כלשהו)
מוגדרים על כל חצי הישר $(0,\infty)$ ולמצוא שני פתרונות בסיס.
הערה: אם N טבעי, יהיה פתרון אחד מהצורה:

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}.$$

4) יהיו $y_1(t),y_2(t)$ שני פתרונות בסיס למשוואה:
$y''(t)+\sin(t^2)y(t)=0$ על כל הישר. בהינתן תנאי ההתחלה:
$y_1(3)=3,\quad y_1'(3)=-2,\quad y_2(3)=2,\quad y_2'(3)=4$ לחשב את הוורונסקיאן $W(y_1(t),y_2(t))$ לכל $t\in R$.

5) נתבונן במשוואה $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ בקטע $I=(\alpha,\beta)$, כאשר הפונקציות $p(t),q(t)$ רציפות בקטע. יהיו $y_1(t),y_2(t)$ שני פתרונות בלתי תלויים בקטע.
א) להוכיח כי ל- $y_1(t),y_2(t)$ אין נקודת אקסטרמום מקומית משותפת (אפילו לא נקודה משותפת שהיא מינימום מקומי עבור פונקציה אחת ומקסימום מקומי עבור השנייה).
ב) משפט שטורם: להוכיח כי בין כל שני אפסים עוקבים של $y_1(t)$ בקטע (בהנחה שיש כאלה) יש בדיוק אפס אחד של $y_2(t)$.

ג) כיצד קשור המשפט בסעיף הקודם לפונקציות $\sin t, \cos t$?

6) להוכיח כי לא קיימות פונקציות $p(t), q(t) \in C(-1,1)$ כך ש- $y_1(t) = t, y_2(t) = t^2$ הם פתרונות בסיס של $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

7) להוכיח כי לא קיימות פונקציות $p(t), q(t) \in C(-1,1)$ כך ש- $y(t) = 4t^2 - 4t + 1$ היא פתרון של $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

8) א) להוכיח כי הפונקציות $y_1(t) = \sin(t^2), y_2(t) = \cos(t^2)$ הן פתרונות בסיס למשוואה $ty''(t) - y'(t) + 4t^3 y(t) = 0$ על כל הישר. בפרט, הפונקציות בלתי-תלויות ליניארית בכל קטע.
ב) מצד שני, הוורונסקיאן שלהן מתאפס (לבדוק!) ב-$t = 0$. כיצד עובדה זו מתיישבת עם המשפט האומר כי " וורונסקיאן של פתרונות בלתי-תלויים ליניארית אינו מתאפס באף נקודה"?

9) להוכיח כי למערכת הליניארית:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{t^2+1} & t^2+1 \\ -\frac{1}{t^2+1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

כל הפתרונות קיימים על כל הישר ולחשב באופן מפורש בסיס לפתרונות.
הצעה: להסתכל בטרנספורמציה:

$$y_1 = (t^2+1)u_1, \quad y_2 = u_2.$$

10) נתונה המערכת הליניארית:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ \frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

להוכיח כי כל הפתרונות קיימים על כל חצי הישר $t > 0$ ולחשב באופן מפורש בסיס לפתרונות.
הצעה: לשים לב כי $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא פתרון ולהסתכל בטרנספורמציה:

$$y_1 = tu_1, \quad y_2 = u_1 + u_2.$$

11) נתונה בעיית ההתחלה

$$y'(t) = \sqrt{1 + t^2 y(t)^2} + t^2 \sin t, \quad y(0) = 0.$$ (השורש הוא חיובי).

להוכיח כי קיים פתרון יחיד שאינטרוול הקיום המקסימלי שלו הוא כל הישר.
הצעה: להשוות עם משוואות ליניאריות מתאימות.

12) (רשות) להוכיח כי לכל מטריצה ריבועית A מתקיים:

$$e^A = \lim_{n \to \infty}\left(I + \frac{A}{n}\right)^n.$$