דף תרגילים מס' 4 במשוואות דיפרנציאליות רגילות

הסימון $y'=\dfrac{dy}{dt}$

1. נוסחת החיבור לפונקציה $\arcsin$ היא:

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin(y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}),\quad |x|,|y|\le 1 .$$

להוכיח את הנוסחה תוך שימוש בסעיפים הבאים:

א) לתת הוכחה טריגונומטרית ישירה.

ב) להראות כי הפתרון הכללי של המשוואה: $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$ נתון על-ידי $\arcsin x+\arcsin y=C$.

ג) להכפיל את המשוואה ב-: $\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}$ ולהראות כי הפתרון של המשוואה נתון גם על-ידי $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=C^*$.

2. להראות כי למשוואה $ydx+x(x^2y-1)dy=0$ יש גורם אינטגרציה מהצורה $x^\alpha y^\beta$ ולהשתמש בכך על-מנת למצוא פתרון כללי של המשוואה.

3. במאמר $L.L.Thurstone[J.Gen.Psychology, vol.3, pp.469-493(1930)]$ הוצעה המשוואה הבאה לתיאור "כמות הלמידה $y(t)$" (נמדדת בשבר בין 0 ו-1) כפונקציה של הזמן:

$$\frac{dy}{y^{3/2}(1-y)^{3/2}}=\frac{2k}{\sqrt{m}}dt .$$

לפתור את המשוואה ולנתח את התנהגות הפתרון (הקבועים באגף ימין הם חיוביים).

4. תהיינה $f(t,y),g(t,y):R\times R\to R_+$ רציפות (אישליליות) וליפשיציות ב-y (כך שמתקיים משפט היחידות) ונניח כי $f(t,y)-g(t,y)\ge 0$ בכל המישור. נתבונן במשוואות

$$y'(t)=f(t,y),\quad y(0)=0,$$

$$z'(t)=g(t,z),\quad z(0)=0,$$

ויהיו $t_{z,\max}>0, t_{y,\max}>0$ זמני הקיום המקסימליים. להוכיח כי $t_{z,\max}\ge t_{y,\max}$ וכי $y(t)\ge z(t),\quad 0\le t<t_{y,\max}$.

5. תהי $f(t,y):R\times R^m\to R^m$ פונקציה וקטורית גזירה ברציפות. תהי $U\subseteq R^m$ קבוצה פתוחה וחסומה. נניח כי אם $y\in\partial U$ אזי $f(t,y)=0,\quad \forall t\in R$. יהי $y(t)$ פתרון של המשוואה

כך ש- $y(t_0)\in U$ עבור איזשהו $t_0\in R$. להוכיח כי אינטרוול הקיום המקסימלי של $y'(t)=f(t,y)$ הפתרון הוא כל הישר.

6. נתונה המערכת הדו-מימדית

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(e^{y(t)})x(t)-\cos(e^{x(t)})y(t) \\ \cos(e^{y(t)})x(t)+\sin(e^{x(t)})y(t) \end{pmatrix}.$$

להוכיח כי לכל תנאי התחלה $(x(0),y(0))$ קיים פתרון יחיד המוגדר על כל הישר (כלומר אינטרוול הקיום המקסימלי הוא כל הישר).

7. נתונה המערכת $y'(t)=f(y(t))$

כאשר $f(y):R^m\to R^m$ פונקציה וקטורית גזירה ברציפות.

להוכיח כי אם קיים $T>0$ כך שהפתרון מקיים $y(T)=y(0)$, אזי הפתרון הוא מחזורי, ובפרט קיים על כל הישר.

8. נתונה המערכת הדו-מימדית

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t)^2 \end{pmatrix}.$$

האם הפתרון המקיים $(x(0),y(0))=(-1,\sqrt{\frac{2}{3}})$ קיים לכל $t\in R$?

הצעה: $y(t)^2+\frac{2}{3}x(t)^3=const$.

9. נתונה המשוואה הסקלרית $z''(t)=\cos(z(t))$.

א) בהינתן תנאי התחלה $(z(0),z'(0))$ לחקור את אינטרוול הקיום המקסימלי.

ב) לתאר את מהלך הפתרון עבור $(z(0),z'(0))=(0,0)$.

הצעה: $(z'(t)^2-2\sin(z(t))=const)$.

10. תהי $f(t,y):R\times R^m\to R^m$ פונקציה וקטורית גזירה ברציפות. נסמן ב-$y(t;\tau,x)$ את פתרון בעיית ההתחלה:

$$y'(t;\tau,x)=f(t,y(t;\tau,x)),\quad y(\tau;\tau,x)=x.$$

להוכיח כי קיים $\bar{t}>0$ ו- $U\subseteq R^m$ סביבה פתוחה של 0 כך שמתקיים:

א) לכל $x\in U$ הקטע $[-\bar{t},\bar{t}]$ מוכל באינטרוול הקיום המקסימלי של $y(t;0,x)$.

ב) לכל $\tau\in[-\bar{t},\bar{t}]$ ההעתקה $x\to\Phi_\tau(x)=y(\tau;0,x)$ מעתיקה את U באופן חד-חד-ערכי על קבוצה פתוחה U_τ.

ג) ההעתקה ההפוכה $\Phi_\tau^{-1}:U_\tau\to U$ היא רציפה.

ד) קיים $r>0$ כך שלכל $\tau\in[-\bar{t},\bar{t}]$ מתקיים:

$B(y(\tau;0,0),r)\subseteq U_\tau$ כאשר $B(y(\tau;0,0),r)$ הוא הכדור הפתוח סביב $y(\tau;0,0)$ ברדיוס r .

11. תהי $t \to A(t) \in Hom(R^m, R^m)$ פונקציה מטריציאלית רציפה על קטע פתוח $t \in I$ ותהי $t \to b(t) \in R^m$ פונקציה ווקטורית רציפה על הקטע. תהי $g(t,y): I \times R^m \to R^m$ רציפה וליפשיצית מקומית ב - y.

בהינתן נקודה $(t_0, y_0) \in I \times R^m$ מתבוננים בבעיית ההתחלה:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) + \varepsilon g(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \ .$$

יהי $[p,q] \subseteq I$ קטע סגור המכיל את t_0 כנקודה פנימית.

להוכיח כי עבור $|\varepsilon|$ מספיק קטן אינטרוול הקיום המקסימלי של בעיית ההתחלה מכיל את $[p,q]$ וכי אם נסמן ב-$y^\varepsilon(t)$ את הפתרון אזי $y^\varepsilon(t) \Rightarrow y^0(t)$ במידה שווה בקטע $[p,q]$ כאשר $|\varepsilon| \to 0$.