דף תרגילים מס' 3 במשוואות דיפרנציאליות רגילות

הסימון $y'=\frac{dy}{dt}$.

.1

א) להראות כי כל פתרונות המשוואה $ty'+y=0$ בחצי הישר $t>0$ מוגדרים על כל חצי הישר ונתונים על-ידי:
$ty=c,\quad c\in R$.

ב) להראות כי במשוואה של הסעיף הקודם, עבור $y\neq 0$, ניתן למצוא גורם אינטגרציה כך שהמשוואה תהיה: $\frac{y'}{y}+\frac{1}{t}=0$.

ג) נגדיר את הפונקציה: $x>0,\quad l(x)=\int_1^x \frac{dr}{r}$. להראות כי אם $y>0$ הפתרון של המשוואה בסעיפים הקודמים נתון גם על-ידי המשוואה
$l(t)+l(y)=c^*,\quad c^*\in R$. (כלומר, לכל קבוע ממשי נתון באגף ימין יהיה בדיוק פתרון אחד, המוגדר על כל חצי הישר).

ד) להסיק כי $a,b>0\quad l(ab)=l(a)+l(b)$. מי הפונקציה הזאת?

2. נסמן ב- $I^{\max}$ את האינטרוול המקסימלי לקיום פתרון. בבעיות ההתחלה להלן, להוכיח את ההערכות הבאות:

א) $\frac{dy}{dt}=y^2+y^4,\quad y(0)=1,\quad (-\infty,\frac{1}{6})\subseteq I^{\max}\subseteq(-\infty,\frac{1}{3})$.

ב) $\frac{dy}{dt}=y^4+y^2+1,\quad y(0)=1,\quad I^{\max}\subseteq(-\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{4})$.

ג) $\frac{dy}{dt}=y^2-y^4,\quad y(0)=\frac{1}{2},\quad I^{\max}=(-\infty,\infty)$.

3. תהי:

$$f(t,y)=\begin{cases} 0, & t=y=0, \\ \frac{4t^3y}{t^4+y^2}, & t^2+y^2>0. \end{cases}$$

א) לבדוק האם הפונקציה רציפה (במישור) והאם היא מקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y (עם קבוע התלוי בקבוצה קומפקטית).

ב) להראות כי כל פונקציה ממשפחת הפונקציות
$y(t;c)=c^2-\sqrt{t^4+c^4},\quad c\in R$ היא פתרון לבעיית ההתחלה:

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0.$$

4. נתונה בעיית ההתחלה:

$$y' = t^2 + e^{-y^2}, \quad y(0) = 0.$$

להראות כי יש לה פתרון יחיד בקטע $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ והוא מקיים שם $|y(t)| \le 1$.

5. להראות כי הפתרון לבעיית ההתחלה

$y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ קיים לפחות בקטע $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

הדרכה: להשתמש בבנייה לפי $Euler$. בעיגול ברדיוס $r = \sqrt{m}$ מתקיים $|y'| \le m$ ולכן הפתרון מוכל בעיגול כל עוד $t^2(1 + m^2) < m$.

6. (שאלת רשות). להראות כי לבעיית ההתחלה

$y' = 2t + y^{2/3}, \quad y(0) = 0,$ בקטע $t \ge 0$, ישנו פתרון יחיד.

הדרכה: לשים לב כי תנאי ליפשיץ לא מתקיים.

א) אם $u(t), v(t)$ פתרונות אזי $u(t), v(t) \ge t^2$.

ב) עבור $w(t) = u(t) - v(t)$ מתקיים:

$$w'(t) = \frac{u^{2/3} - v^{2/3}}{u - v} w(t) = \frac{u^{1/3} + v^{1/3}}{u^{2/3} + u^{1/3}v^{1/3} + v^{2/3}} w(t) < t^{-2/3} w(t), \quad t > 0.$$

ג) על-ידי הכפלה ב-$w(t)$, אינטגרציה וסימון $m(t) = \max\{|w(x)|, \quad 0 \le x \le t\}$ מתקבל:

$m(t) \le 3t^{1/3} m(t)$ ומכאן ש-$m(t) = 0$ עבור t מספיק קטן.