דף תרגילים מס' 2 במשוואות דיפרנציאליות רגילות

הסימון $y'=\frac{dy}{dt}$.

1. למצוא את הפתרונות של המשוואות הבאות:

א) $\frac{dy}{dt}=\frac{y^2+ty+t^2}{t^2}$.

ב) $\frac{dy}{dt}=\frac{t+3y-5}{t-y-1}$.

ג) $ty'=-y+(1+3t^2)e^{ty}, \quad t>0$.

.

2. למצוא את הפתרונות של בעיות ההתחלה הבאות:

א) $\frac{dy}{dt}+\frac{2}{t}y=\frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi)=0, \quad t>0.$.

ב) $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{e^y-t}, \quad y(1)=0.$.

ג) $ty'+2y=t^2-t+1, \ \ y(1)=\frac{1}{2}$.

3. לפתור את המשוואה הבאה:

$y'=-\frac{1}{t^2}-\frac{y}{t}+y^2, \quad t>0$.

רמז: להסתכל בפונקציה $y_1(t)=\frac{1}{t}$.

4. פסולת תעשייתית נכנסת למיכל המכיל 1000 ליטר מים במהירות של 1 ליטר/דקה. התערובת זורמת מהמיכל באותה המהירות.

א) למצוא את ריכוז הפסולת במיכל בזמן t (מניחים שבתחילה המים ללא פסולת).

ב) כעבור כמה זמן יגיע הריכוז ל-20% ?

5. מושבת בקטריות גדלה בקצב פרופורציוני לגודלה. בהינתן העובדה כי המושבה משלשת את גודלה לאחר 4 שעות, כמה זמן יידרש לה להכפיל את גודלה פי 27?

6. **מושג המעטפת**: תהי $\{\phi(x;c), \quad \alpha<c<\beta\}$ משפחת פונקציות גזירות ברציפות (לפי x) בקטע (a,b) , התלויות בפרמטר c . תהי $\psi(x)$ פונקציה גזירה ברציפות ב- (a,b) וכך שלכל נקודה $x_0\in(a,b)$ קיים פרמטר $\alpha<c_0<\beta$ כך ש-

$\phi(x_0;c_0)=\psi(x_0)$ ו- $\phi'(x_0;c_0)=\psi'(x_0)$. אזי נאמר כי הפונקציה (או "גראף הפונקציה") $\psi(x)$ היא **המעטפת** של המשפחה $\{\phi(x;c), \quad \alpha<c<\beta\}$ בקטע (a,b).

להראות כי (למצוא לבד את הקטעים המתאימים):

א) ציר ה- x הוא מעטפת של משפחת הפרבולות $\{\phi(x;c)=(x-c)^2\}$.

ב) הקווים $y\equiv 0,2$ הם מעטפות של משפחת המעגלים $(x-c)^2+(y-1)^2=1$.

7. בסימוני שאלה 6, תהי $F(t,y)$ פונקציה גזירה ברציפות על $(a,b)\times R$ כך שהמשוואה $y'=F(t,y)$ מתקיימת לכל פונקציה במשפחה $\{\phi(t;c), \quad \alpha<c<\beta\}$. להוכיח כי המשוואה מתקיימת גם עבור המעטפת $\psi(t)$ (הכל בקטע (a,b)).

8. חתול מטייל בשדה הנתון על-ידי הרביע הראשון $x>0,\ y>0$. המשיק למסלול הטיול, בכל נקודה, יוצר עם הצירים משולש ששיטחו **קבוע** ($k>0$). למצוא את מסלול הטיול.

9. בשאלה זאת ניתן הוכחה אלטרנטיבית למשפט הקיום היסודי:

משפט: יהי $D\subseteq R^n$ תחום פתוח, כאשר $n=m+1$. תהי $f:D\to R^m$ רציפה. לנקודה $(t_0,y_0)\in D$ נגדיר צילינדר $\Gamma=[t_0-\eta,t_0+\eta]\times\overline{B(y_0,\alpha)}\subseteq D$ ונניח כי $M\eta<\alpha$ כאשר $M=\max_{(t,y)\in\Gamma}|f(t,y)|$. אזי למשוואה

$$y'(t)=f(t,y(t))$$

קיים פיתרון בקטע $(t_0-\eta,t_0+\eta)$. בפרט, $(t,y(t))\in\Gamma,\ t\in(t_0-\eta,t_0+\eta)$.

הוכחה: א) לכל מספר טבעי $p>2$ נגדיר פונקציה $y^p(t)$ על ידי:

$$y^p(t)=\begin{cases} y_0, \quad t_0\le t\le t_0+\dfrac{\eta}{p} , \\ y_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t-\frac{\eta}{p}} f(s,y^p(s))ds, \quad t_0+\dfrac{\eta}{p}\le t\le t_0+\eta . \end{cases}$$

ב) להוכיח כי קיימת תת-סידרה מתכנסת במידה שווה: $y^{p_j}(t)\to y(t),\ t\in[t_0,t_0+\eta]$.

ג) להוכיח כי הפונקציה הגבולית מקיימת:

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds, \quad t\in[t_0,t_0+\eta] .$$