

דף תרגילים מס' 1 במשוואות דיפרנציאליות רגילות

1. להוכיח כי אם  $f, g \in C^1(a, b)$  ו- $f'(x) = g'(x)$  בקטע (הפתוח)  $(a, b)$  אזי  $f - g \equiv \text{const.}$

2. להוכיח כי אם  $\{f^k\} \subseteq C(K, R^m)$  היא סידרה מתכנסת בנורמת המקסימום ( $K \subseteq R^n$  קומפקטית) אזי היא רציפה במידה אחידה.

3. למצוא דוגמה לסידרה חסומה  $\{f^k\} \subseteq C(K, R^m)$  שאינה רציפה במידה אחידה.

4. למצוא קטע  $[a, b] \subseteq R$  וקבוצה סגורה  $X \subseteq C[a, b]$  כך שההעתקה  $Tf = e^f - 2$  היא מכווצת ב- $X$ .

5. האם לסידרה  $\{\sqrt[n]{x}\} \subseteq C[0, 1]$  יש תת-סידרה המתכנסת במידה שווה? כיצד התשובה מסתדרת עם משפט Arzela-Ascoli?

6. תהי  $F \subseteq C[0, \infty)$  משפחת הפונקציות המקיימות את "תנאי הקונוס" הבא:  
 לכל שתי נקודות  $0 \leq x_0 < x_1$  ולכל  $f \in F$ ,  $|f(x_1) - f(x_0)| \leq |x_1 - x_0|$ . בנוסף, קיימת נקודה  $y \in [0, \infty)$  כך ש- $\forall f \in F, |f(y)| \leq 17$ . להוכיח כי לכל  $a > 0$  ולכל סידרה  $\{f^k\} \subseteq F$  קיימת תת-סידרה המתכנסת במידה שווה ב- $[0, a]$ .

7. למצוא את כל הפתרונות של המשוואה  $y'(t) = aty + bt^2$  כאשר  $a, b \in R$ . בפרט, לבדוק האם ישנם פתרונות המוגדרים רק על חלק מן הישר.

8. למצוא את הפתרונות של המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y \cos t}{1 + 2y^2}, \quad y(0) = 1. \quad (\text{א})$$

$$\frac{dy}{dt} = ty^3(1 + t^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1. \quad (\text{ב})$$

9. למצוא את כל הפתרונות של המשוואות:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt[4]{|y(t)|}, \quad y(0) = y_0 \quad (\text{א})$$

$$\frac{dy}{dt} = y(t)^4, \quad y(0) = y_0 \quad (\text{ב})$$

כאשר  $y_0 \in [0, 1]$ . בפרט, לבדוק אילו מן הפתרונות "חיים" עד  $t = 1$ .

10. למצוא את כל הפתרונות של המשוואה

$$t \in (0, \infty) \quad \text{בקטע} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}, \quad y(1) = y_0 > 0$$

(א) בשיטה אנליטית.

(ב) בשיטה גיאומטרית.