פרופ' מתניה בן-ארצי.

23.3.2011

בוחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות.

זמן:105 דקות.. אין להיעזר בכל חומר (כולל מחשבונים).

פרק א

לפתור שתים מתוך ארבע השאלות הבאות: **(כל שאלה=20 נקודות)**

1) למצוא פתרון לבעיית ההתחלה:
$$y'(t)+2ty(t)=0, \quad y(0)=3$$.

.

2) למצוא את הפתרון של
$$(t^2-1)y'(t)+2ty(t)^2=0, \quad y(0)=1$$.

3) למצוא (בצורה סתומה) את פתרון המשוואה
$$(2xy^3-x^2)dx+(3x^2y^2-1)dy=0$$
העובר דרך הנקודה $(1,1)$.

4) למצוא פתרון לבעיית ההתחלה:

$$y'(t)+y(t)=y(t)^2-2, \quad y(0)=\frac{3}{2}.$$.

(ניתן להשתמש בעובדה שלמשוואה יש פתרון אחד שהוא פונקציה קבועה).

פרק ב

לפתור שתים משלוש השאלות הבאות. (כל שאלה =30 נקודות).

1) תהי $f(t,y)\in C^1(R\times R)$ (פונקציה גזירה ברציפות לפי שני משתנים ממשיים בכל המישור) ונניח ש- $|f(t,y)|<g(t), \quad (t,y)\in R\times R$, כאשר $g(t)\in C(R)$ פונקציה רציפה על הישר.
להוכיח כי לכל $(t_0,y_0)\in R\times R$ לבעיית ההתחלה
$$y'=f(t,y), \quad y(t_0)=y_0$$
קיים פתרון יחיד $y(t;t_0,y_0)$ המוגדר על כל הישר (כלומר, אינטרוול הקיום המקסימלי שלו הוא כל הישר).

2) סידרת פונקציות $\{y_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ מוגדרת על הישר ומקיימת, לכל $t\in R$,
$$y_{k+1}(t)=1+\int_0^t y_k(s)ds, \quad y_0(t)=t^2, k=0,1,2,...$$.

להוכיח כי הסידרה מתכנסת על כל הישר ולמצוא את הפונקציה הגבולית $y(t)$.

3) תהיינה $z(t), y(t)$ שתי פונקציות רציפות המוגדרות על קטע סגור $[t_0, a]$. מתקיימים, לכל $t \in [t_0, a]$, אי-השוויון

$$|z(t) - y(t)| \le \int_{t_0}^{t} (z^2(s) + y^2(s))[\exp(z(s)) - \exp(y(s))]ds$$

. להוכיח כי $z(t) \equiv y(t)$ בקטע.

בהצלחה!!!

.