פרופ' מתניה בן-ארצי.

23.6.2008

בוחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות.

זמן:105 דקות.. אין להיעזר בכל חומר (כולל מחשבונים).

פרק א

לפתור שתים מתוך ארבע השאלות הבאות: **(כל שאלה=20 נקודות)**

1) למצוא פתרון לבעיית ההתחלה:

$$y' = (x+y+1)^2, \quad y(0)=0.$$

.

2) למצוא את כל הפתרונות של

$$ydx + (2x - y^2)dy = 0$$

ברביע הראשון : $x>0, y>0$. (אפשר פתרון בצורה סתומה).

3) למצוא פתרון לבעיית ההתחלה:

$$.\ y' = \frac{2x}{1+2y}, \quad y(2)=0.$$

4) למצוא פתרון לבעיית ההתחלה:

$$xy' + 2y = \sin x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

פרק ב

לפתור שתים משלוש השאלות הבאות. (כל שאלה =30 נקודות).

1) תהי $f(t,y) \in C^1(R \times R)$ (פונקציה גזירה ברציפות לפי שני משתנים ממשיים בכל המישור) ונניח שקיים קבוע $C>0$ כך ש- $(t,y) \in R \times R, \quad |f(t,y)| < Ce^t$.
להוכיח כי לכל $(t_0, y_0) \in R \times R$ לבעיית ההתחלה

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

קיים פתרון יחיד $y(t; t_0, y_0)$ המוגדר על כל הישר (כלומר, אינטרוול הקיום המקסימלי שלו הוא כל הישר).

2) נסתכל בפונקציה

$$.\ f(t,y) = (y^2 - 1)\sin(t^2 y)$$

להוכיח כי לבעיית ההתחלה $y' = f(t,y), \quad y(2) = \frac{1}{2}$ קיים פתרון יחיד המוגדר על כל הישר (כלומר, אינטרוול הקיום המקסימלי שלו הוא כל הישר). יתר על כן, הפתרון תמיד חיובי.

3) תהי $f(t,y)$ פונקציה רציפה וחסומה על $(0,1)\times R$ (כלומר קיים קבוע $C>0$ כך ש-
$(t,y)\in(0,1)\times R \quad |f(t,y)|<C,$). להוכיח כי כל פתרון של בעיית ההתחלה
$t_0\in(0,1) \quad y(t_0)=y_0, \quad y'=f(t,y),$ מוגדר על כל הקטע ויתר על כן, קיימים לו הגבולות
(והם סופיים)

$$\lim_{t\to 0} y(t) \quad , \quad \lim_{t\to 1} y(t).$$

(לשים לב כי איננו מניחים תכונת ליפשיץ על הפונקציה).

בהצלחה!!!

.