האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות (80320)
מועד ב', תשע"א – 18.7.11

המורה: פרופ' מתניה בן-ארצי
משך הבחינה: 2.5 שעות.

אין להיעזר בכל חומר (כולל מחשבונים).
נא לצטט במדוייק כל משפט שמסתמכים עליו.
נא כתבו בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.
שימו לב: סך הנקודות שתוכלו לצבור במבחן הוא 105, אך הציון הסופי המקסימאלי יכול להגיע לציון 100 בלבד.

פרק א'

יש לפתור שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות: **(כל שאלה=15 נקודות)**

1) למצוא פתרון המשוואה:

$$[\cos x \log(2y-8)+\frac{1}{x}]dx+\frac{\sin x}{y-4}dy=0, \quad y(1)=\frac{9}{2}.$$

2) למצוא את הפתרון הכללי (בעזרת פונקציות מפורשות) למערכת:

$$y'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} y(t), \quad y(t)\in R^2 .$$

3) מוגדרת סידרת פונקציות $\{y_j(t), \quad t\in[0,1]\}_{j=1}^{\infty}$ כאשר כל פונקציה $y_j(t)$ היא רציפה וליניארית למקוטעין ומוגדרת על ידי:

$$y_j(t)=y_j(\frac{k}{j})+y_j(\frac{k}{j})\cdot(t-\frac{k}{j}), \quad \frac{k}{j}<t\le\frac{k+1}{j}, \quad 0\le k\le j-1.$$ ו-

$y_j(0)=1$.

להוכיח כי הסידרה מתכנסת ולמצוא את הגבול .

4) להוכיח כי האינטרוול המקסימלי לבעיית ההתחלה:

$$y'(t)=t^2-y^2, \quad y(0)=1.$$

מכיל את חצי הישר $(-1,\infty)$.

(נא להפוך דף...)

פרק ב'

יש לפתור שתיים משלוש השאלות הבאות. (כל שאלה =30 נקודות).

1) א) תהי $H(y), y=(y_1, y_2)\in R^2$ פונקציה (סקלרית) גזירה פעמיים ברציפות על כל המישור. נתבונן במערכת

$$y_1'(t)=\frac{\partial H}{\partial y_2}(y_1(t), y_2(t))$$

$$y_2'(t)=-\frac{\partial H}{\partial y_1}(y_1(t), y_2(t))$$

בהינתן $(t_0, y^0)\in R\times R^2$, יהי $y(t)=(y_1(t), y_2(t))$ פתרון המערכת המקיים $y(t_0)=y^0$. להוכיח כי
$H(y(t))=H(y^0)$, לכל t באינטרוול הקיום המקסימלי של הפתרון.

ב) נתבונן במערכת הלא-ליניארית

$$y_1'(t)=4y_2(t)^3+2y_2(t)y_1(t)^2$$
.
$$y_2'(t)=-2y_1(t)y_2(t)^2-4y_1(t)^3$$

להוכיח כי לכל $(t_0, y^0)\in R\times R^2$ קיים למערכת פתרון יחיד $y(t)$, המוגדר על כל הישר, ומקיים
$y(t_0)=y^0$.

2) א) תהי $t\to A(t)\in Hom(R^m, R^m)$ פונקציה מטריציאלית רציפה על קטע פתוח $t\in I$
ותהי $t\to b(t)\in R^m$ פונקציה וקטורית רציפה על הקטע.
בהינתן נקודה $(t_0, y^0)\in I\times R^m$ מתבוננים בבעיית ההתחלה:
$y'(t)=A(t)y(t)+b(t), \quad y(t_0)=y^0$.

להוכיח כי אינטרוול הקיום המקסימלי של הפתרון הוא הקטע I כולו.
ב) נסמן ב- $y(t; t_0, y^0)$ את הפתרון מהסעיף הקודם.
לנסח במדוייק את המשפט בדבר התלות הרציפה של $y(t; t_0, y^0)$ ב- y^0 ולהשתמש בו על מנת
להוכיח כי אם $U\subseteq R^m$ פתוחה אזי הקבוצה $V=\{y(t;t_0, y^0), \quad y^0\in U\}\subseteq R^m$
(כלומר, ערכי הפתרונות ב- t עם תנאי התחלה בקבוצה U) גם היא פתוחה.

3) א) נתבונן במערכת הלא-ליניארית

$$y'_1(t) = y_1(t) - y_2(t) - y_1(t)^3$$

.

$$y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) - y_2(t)^3$$

להוכיח כי כל פתרון $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ אשר מקיים $1 \le |y(0)| \le \sqrt{2}$ (נורמה אוקלידית), נשאר בטבעת הזאת לכל $t \ge 0$.

(קצת עזרה: אפשר להשתמש באי-השוויון הכפול $(a^2+b^2)^2 \ge a^4 + b^4 \ge \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2$).

ב) להראות כי $(0,0)$ היא הנקודה הקריטית היחידה של המערכת.

(אפשר להסתפק בסקיצה של הגרפים $\eta = \xi - \xi^3$ ו- $\xi = -\eta + \eta^3$ במישור (ξ,η)).

ג) להוכיח כי למערכת קיים פתרון מחזורי אחד לפחות.

ניתן להשתמש במשפט פואנקרה-בנדיקסון תוך ציטוטו המדוייק.

בהצלחה!!!

.