האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות (80320)
מועד א', תשע"א – 15.6.11

המורה: פרופ' מתניה בן-ארצי
משך הבחינה: 2.5 שעות.

אין להיעזר בכל חומר (כולל מחשבונים).
נא לצטט במדוייק כל משפט שמסתמכים עליו.
נא כתבו בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.
שימו לב: סך הנקודות שתוכלו לצבור במבחן הוא 105, אך הציון הסופי המקסימאלי יכול להגיע לציון 100 בלבד.

פרק א'

יש לפתור שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות: **(כל שאלה=15 נקודות)**

1) למצוא פתרון כללי למשוואה:
$z''(t)+z(t)=\cos t$.

.

2) לחשב את e^{tA} כאשר A היא המטריצה:
$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3) מוגדרת סידרת פונקציות $\{y_j(t),\quad t\in R\}_{j=1}^{\infty}$ על-ידי:
$y_{j+1}(t)=\pi+\int_0^t \frac{1}{1+y_j(s)^2}ds \quad ,y_1(t)=t$.
לבדוק האם הסידרה מתכנסת ואם התשובה חיובית—למצוא את הגבול (אפשר בצורה סתומה).

4) נתונה בעיית ההתחלה:

$$y'=1+y^{1/3},\quad y(0)=0.$$

להראות כי יש לה פתרון יחיד בקטע $(-1,1)$.

(נא להפוך דף...)

<u>פרק ב'</u>

יש לפתור שתיים משלוש השאלות הבאות. (כל שאלה =30 נקודות).

1) תהי $f(t,y): R\times R^m \to R^m$ פונקציה וקטורית גזירה ברציפות. נסמן ב- $y(t;\tau,x)$ את פתרון בעיית ההתחלה:

$$y'(t;\tau,x) = f(t,y(t;\tau,x)), \quad y(\tau;\tau,x) = x.$$

להוכיח כי קיים $\bar{t} > 0$ ו- $U \subseteq R^m$ סביבה פתוחה של 0 כך שמתקיים:

א) לכל $x \in U$ הקטע $[-\bar{t},\bar{t}]$ מוכל באינטרוול הקיום המקסימלי של $y(t;0,x)$.

ב) לכל $\tau \in [-\bar{t},\bar{t}]$ ההעתקה $x \to \Phi_\tau(x) = y(\tau;0,x)$ מעתיקה את U באופן חד-חד-ערכי על קבוצה פתוחה U_τ.

ג) ההעתקה ההפוכה $\Phi_\tau^{-1}: U_\tau \to U$ היא רציפה.

2) תהיינה $g(t),h(t)$ פונקציות ממשיות רציפות על כל הישר. נתבונן במערכת הלא-ליניארית

$$y'_1(t) = g(t)y_1(t) + h(t)y_2(t)(y_1(t)^2 + y_2(t)^2)$$

.

$$y_2'(t) = -h(t)y_1(t)(y_1(t)^2 + y_2(t)^2) + g(t)y_2(t)$$

להוכיח כי לכל $(t_0\,,\,y^0) \in R\times R^2$ קיים למערכת פתרון יחיד המוגדר על כל הישר, המקיים

$$y(t_0\,) = y^0\quad .$$

3) תהי $t \to A(t) \in Hom(R^m,R^m)$ פונקציה מטריציאלית רציפה על קטע פתוח $t \in I$ ותהי $t \to b(t) \in R^m$ פונקציה וקטורית רציפה על הקטע. תהי $g(t,y): I\times R^m \to R^m$ רציפה וליפשיצית מקומית ב - y .

בהינתן נקודה $(t_0,y^0\,) \in I\times R^m$ מתבוננים בבעיית ההתחלה:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) + \varepsilon g(t,y(t)), \quad y(t_0) = y^0\ .$$

יהי $[p,q] \subseteq I$ קטע סגור המכיל את t_0 כנקודה פנימית.

להוכיח כי עבור $|\varepsilon|$ מספיק קטן אינטרוול הקיום המקסימלי של בעיית ההתחלה מכיל את $[p,q]$ וכי אם נסמן ב- $y^\varepsilon(t)$ את הפתרון אזי $y^\varepsilon(t) \Rightarrow y^0(t)$ במידה שווה בקטע $[p,q]$ כאשר $|\varepsilon| \to 0$.

בהצלחה!!!

.