האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

# מבחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות (80320)
## מועד ב', תשס"ח – 2.10.08

המורה: פרופ' מתניה בן-ארצי
משך הבחינה: 2.5 שעות.

אין להיעזר בכל חומר (כולל מחשבונים).
נא לצטט במדוייק כל משפט שמסתמכים עליו.
נא כתבו בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.
שימו לב: סך הנקודות שתוכלו לצבור במבחן הוא 105, אך הציון הסופי המקסימאלי יכול להגיע לציון 100 בלבד.

## פרק א'

יש לפתור שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות: **(כל שאלה=15 נקודות)**

1) יהיו $y_1(t), y_2(t)$ שני פתרונות בסיס למשוואה:
$y''(t)+\sin(t^2)y(t)=0$ על כל הישר. בהינתן תנאי ההתחלה:
$y_1(3)=3, \quad y_1'(3)=-2, \quad y_2(3)=2, \quad y_2'(3)=4$ לחשב את הוורונסקיאן
$W(y_1(t), y_2(t))$ לכל $t\in R$.

2) להוכיח כי לא קיימת פונקציה גזירה ברציפות $f(t,y)$ בתחום $(t,y)\in(-1,1)\times R$ כך ש-
$y(t)=e^{\sin t}-1$ היא פתרון של $y'=f(t,y)-f(t,-y)$ בקטע $(-1,1)$.

3) לתאר גיאומטרית את מסלולי הפתרון (במישור הפאזה) של

$$y'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}y, \quad y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}.$$

4) נסמן ב- $I^{\max}$ את האינטרוול המקסימלי לקיום פתרון. בבעיית ההתחלה

$$\frac{dy}{dt}=y^2+y^4, \quad y(0)=1,$$

להוכיח את ההערכות הבאות:

$$(-\infty,\frac{1}{6})\subseteq I^{\max}\subseteq(-\infty,\frac{1}{3}).$$

(נא להפוך דף...)

## פרק ב'

**יש לפתור שתיים משלוש השאלות הבאות. (כל שאלה =30 נקודות).**

1) תהי $g(t),h(t)$ פונקציות ממשיות רציפות על כל הישר. נתבונן במערכת הליניארית

$$y'(t)=\begin{pmatrix} g(t) & h(t) \\ -h(t) & g(t) \end{pmatrix} y(t), \quad y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

תהי $\Phi(t)$ מטריצה יסודית למשוואה (כלומר, עמודיה הם שני פתרונות בסיס) כך ש- $\Phi(0)=I$.

א) להוכיח כי $t\in R$, $\det(\Phi(t))=\exp(2\int_0^t g(s)ds)$.

ב) להוכיח כי אם $\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(s)ds=-\infty$ אזי כל פתרון של המשוואה מקיים $\lim_{t\to\infty}|y(t)|=0$.

2) א) נתונה מטריצה ריבועית $A\in Hom(R^m,R^m)$ (כלומר, ממשית מסדר $m\times m$). להגדיר באמצעות טור חזקות את $\exp(tA),\quad t\in R$ ולהוכיח כי אכן הטור מתכנס לכל $t\in R$.

ב) להוכיח כי

$\frac{d}{dt}\exp(tA)=A\exp(tA)$ (נגזרת של מטריצה התלויה ב- $t$ היא המטריצה המתקבלת מגזירה איבר-איבר. מותר להשתמש במשפט של גזירת טור חזקות, תוך ציטוט מדוייק שלו).

ג) האם קיימת מטריצה ממשית $A$ מסדר $2\times 2$ כך ש-

$$\exp(tA)=e^t\begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t\in R \ ?$$

ד) האם ניתן להסביר את התשובה לסעיף הקודם בעזרת משוואות דיפרנציאליות?

3) מתבוננים במשוואה הסקלרית

$z^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t)+\ldots+a_0(t)z(t)=r(t)$ כאשר $a_{m-1}(t),a_{m-2}(t),\ldots,a_0(t),r(t)$ הן פונקציות ממשיות רציפות בקטע $I=(\alpha,\beta)$. יהי $\{z_1(t),\ldots,z_m(t)\}$ בסיס לפתרונות המשוואה ההומוגנית ( $r(t)\equiv 0$ ) ויהי

$$W(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_m(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) & \ldots & z_m'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(m-1)}(t) & z_2^{(m-1)}(t) & \ldots & z_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

הוורונסקיאן שלהם.

להראות כי ניתן למצוא פתרון פרטי למשוואה (הלא-הומוגנית) מהצורה:

כאשר $z^{part}(t) = u_1(t)z_1(t) + u_2(t)z_2(t) + ... + u_m(t)z_m(t)$

$\{u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)\}$ הן פונקציות גזירות ברציפות בקטע $I$ שנגזרותיהן מקיימות את מערכת המשוואות:

$$W(t)\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ ... \\ u_{m-1}'(t) \\ u_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r(t) \end{pmatrix}.$$

בהצלחה!!!

.