

מבחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות (80320)

מועד א', תשס"ח – 1.9.08

המורה: פרופ' מתניה בן-ארצי
משך הבחינה: 2.5 שעות.

אין להיעזר בכל חומר (כולל מחשבוני).
נא לצטט במדויק כל משפט שמסתמכים עליו.
נא כתבו בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.
שימו לב: סך הנקודות שתוכלו לצבור במבחן הוא 105, אך הציון הסופי המקסימאלי יכול להגיע לציון 100 בלבד.

פרק א'

יש לפתור שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות: (כל שאלה=15 נקודות)

(1) למצוא פתרון כללי למשוואה:

$$z''(t) - 9z(t) = 5e^{3t}.$$

(2) לחשב את e^{tA} כאשר A היא המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) מוגדרת סדרת פונקציות $\{y_j(t), t \in \mathbb{R}\}_{j=1}^{\infty}$ על-ידי:

$$y_{j+1}(t) = \pi + \int_0^t \sin(y_j(s)) ds, \quad y_1(t) = t.$$

לבדוק האם הסידרה מתכנסת ואם התשובה חיובית—למצוא את הגבול.

(4) נתונה בעיית ההתחלה:

$$y' = t^2 + y^2 + \frac{1}{2}e^{-y^2}, \quad y(0) = 0.$$

להראות כי יש לה פתרון יחיד בקטע $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ והוא מקיים שם $|y(t)| \leq 1$.

פרק ב'

יש לפתור שתיים משלוש השאלות הבאות. (כל שאלה = 30 נקודות).

(1) תהי $f(t, y) \in C^1(R \times R)$ (פונקציה גזירה ברציפות לפי שני משתנים ממשיים בכל המישור)

ונניח שקיים קבוע $C > 0$ כך ש- $(t, y) \in R \times R$, $|f(t, y)| < Ce^t + \sqrt{1+y^2}$.

להוכיח כי לכל $(t_0, y_0) \in R \times R$ לבעיית ההתחלה

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

קיים פתרון יחיד $y(t; t_0, y_0)$ המוגדר על כל הישר (כלומר, אינטרוול הקיום המקסימלי שלו

הוא כל הישר).

(2) נסתכל בפונקציה

$$f(t, y) = (1 + \sin^2 t - 3y^2)(1 + \sin^2(t + y))$$

להוכיח כי למשוואה $y' = f(t, y)$ קיים פתרון מחזורי המוגדר על כל הישר (כלומר,

אינטרוול הקיום המקסימלי שלו הוא כל הישר). יתר על כן, הפתרון תמיד חיובי.

תזכורת: פונקציה מחזורית היא פונקציה המקיימת $\phi(t+T) = \phi(t)$ עבור $T > 0$ מסויים (קבוע) וכל

$$t \in R$$

(3) נתבונן במשוואה $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ בקטע $I = (\alpha, \beta)$, כאשר הפונקציות $p(t), q(t)$

רציפות בקטע. יהיו $y_1(t), y_2(t)$ שני פתרונות בלתי תלויים בקטע.

(א) להוכיח כי ל- $y_1(t), y_2(t)$ אין נקודת אקסטרום מקומית משותפת (אפילו לא נקודה משותפת

שהיא מינימום מקומי עבור פונקציה אחת ומקסימום מקומי עבור השנייה).

(ב) **משפט שטורם**: להוכיח כי בין כל שני אפסים עוקבים של $y_1(t)$ בקטע (בהנחה שיש כאלה) יש

בדיוק אפס אחד של $y_2(t)$.

בהצלחה!!!