האוניברסיטה העברית בירושלים - החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי מתקדם 2 (80316)

מועד א' תשע"ה – 6.7.2015

פרופ' מתניה בן-ארצי — זמן: שלוש שעות.

עליכם/ ן לצטט בדייקנות כל משפט עליו אתם/ ן מסתמכים/ ות.
ניתן לצבור לכל היותר 100 נקודות.

<u>פרק א':</u> לענות על שתיים משלוש השאלות הבאות. כל שאלה=20 נקודות.
(בבדיקה יילקחו בחשבון רק שתי שאלות עם הניקוד הגבוה ביותר).

1) תהי $\gamma(s)\subseteq R^3$ מסילה חלקה לפי פרמטר האורך, $T(s)=\gamma'(s)$.
מסמנים ב- $\Sigma(s)=\{\kappa(s),\tau(s),T(s),N(s),B(s)\}$ את נתוני Frenet-Serret.

להוכיח כי התנאים הבאים שקולים (מניחים $T'(s)\neq 0$):

(i) $\tau(s)=0$.

(ii) המסילה מוכלת במישור.

<u>תזכורת</u>: $\tau(s)=-B'(s)\cdot N(s)$.

2) (5 נקודות) א) יהי $\Omega\subseteq R^2$ תחום פתוח. להגדיר את מושג הדיפרנציאביליות של פונקציה $F:\Omega\to R^2$.

(5 נקודות) ב) יהי $\Omega\subseteq R^2$ תחום פתוח וקשיר. תהי $F:\Omega\to R^2$ דיפרנציאבילית ומקיימת $DF(x)=0,\quad \forall x\in R^2$. להוכיח כי הפונקציה קבועה בתחום.

(10 נקודות) ג) יהי $\Omega\subseteq R^2$ תחום פתוח וקשיר. תהי $\{F_n:\Omega\to R^2\}_{n=1}^{\infty}$
סידרה של פונקציות גזירות ברציפות (ולכן דיפרנציאביליות—ניתן להשתמש במשפט הזה) המקיימות את התנאי הבא:

הסדרה $\{DF_n:\Omega\to Hom(R^2,R^2)\}_{n=1}^{\infty}$

היא קושי במידה שווה, כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=N(\varepsilon)$ כך ש-

$\|DF_p(x)-DF_k(x)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in\Omega,\quad p,k>N$ ($\|\bullet\|$ היא נורמה אופרטורית כלשהי).

בנוסף לכך קיימת נקודה $y\in\Omega$ שבה קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}F_n(y)=a\in R^2$.

להוכיח כי הגבול $\lim_{n\to\infty}F_n(x)$ קיים לכל $x\in\Omega$.

3) (10 נקודות) א) תהיינה $f(x,y,z),\, g(x,y,z)$ שתי פונקציות ממשיות גזירות ברציפות בסביבת נקודה $P_0=(x_0\,,\,y_0\,,z_0)\in R^3$ ומקיימות $f(P_0)=g(P_0)=0$.
לנסח במדוייק תנאי המבטיח קיום של פונקציות ממשיות גזירות ברציפות $h_1(z),h_2(z)$ המוגדרות בקטע סביב $z_0\in R$ כך ש- $f(h_1(z),h_2(z),z)=g(h_1(z),h_2(z),z)=0$ לכל z בקטע.

(10 נקודות)   ב)   בתנאי הסעיף הקודם (לגבי הפונקציה $f(x,y,z)$) להשתמש בשוויון
$\nabla[f(x,y,z)^2]=2f\ \nabla f$ (או בכל דרך אחרת) על מנת להוכיח את הטענה הבאה:
לכל $\delta>0$ קיים עיגול קטן D סביב הנקודה (y_0, z_0) (במישור (y,z)) כך שלמשוואה
$f(x,y,z)^2+x=x_0$ קיים פתרון $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, לכל $(y,z)\in D$.

<u>פרק ב':</u> לענות על שלוש מארבע השאלות הבאות. כל שאלה= 20 נקודות.
(בבדיקה יילקחו בחשבון רק שלוש שאלות עם הניקוד הגבוה ביותר).

4) לבדוק האם אפשר לקבל את u,v כפונקציות של x,y,z מתוך זוג המשוואות:
$u^3yz+2xv-u^2v^2=2$, $xy^2+xzu+yv^2=3$ בסביבת הנקודה $(x,y,z,u,v)=(1,1,1,1,1)$.

5) למצוא את משוואת המישור המשיק למישטח הנתון על-ידי:
$x=u^2-v^2, y=u+v, z=u^2+4v,\quad |u|<1,\quad 0<v<1$ בנקודה $(x,y,z)=(-\frac{1}{4},\frac{1}{2},2)$.

6) נתון שדה משמר גזיר ברציפות במישור $F(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$. מהו התנאי (או תנאים)
כדי שהשדה $G(x,y)=(\exp(f(x,y)),\exp(g(x,y)))$ יהיה אף הוא משמר?

7) לחשב את האינטגרל הקווי $a,b>0$, $\int_\gamma \frac{-y}{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}dx+\frac{x}{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}dy$ כאשר

$\gamma(t)$ היא המסילה הסגורה בכיוון נגד השעון שהיא שפת הריבוע $-1\le x\le 1, -1\le y\le 1$.

בהצלחה!!!

.