<u>מבחן בחשבון אינפיניטסימלי מתקדם 2 (80316)</u>

מועד ב' תשע"ג – 7.8.2013..

פרופ' מתניה בן-ארצי   **זמן:** שלוש שעות.

עליכם לצטט בדייקנות כל משפט עליו אתם מסתמכים.
ניתן לצבור לכל היותר 100 נקודות.

<u>פרק א':</u> לענות על שתיים משלוש השאלות הבאות. כל שאלה=30 נקודות.
(בבדיקה יילקחו בחשבון רק שתי שאלות עם הניקוד הגבוה ביותר).

1) תהי $Q=Q'\times Q''$ תיבה (סגורה) ב- R^{n+m}, כאשר $Q',\ Q''$ הן תיבות (סגורות) ב- R^n, R^m בהתאמה.

תהי $f(x),\ x=(x',x'')\in Q'\times Q''$ פונקציה רציפה בתיבה . נגדיר:

$$\varphi(x')=\int_{Q''}f(x',x'')dx'',\qquad \psi(x'')=\int_{Q'}f(x',x'')dx'.$$

קיומם של האינטגרלים ידוע כיוון שהפונקציה רציפה במשתני האינטגרציה (אין צורך להוכיח זאת).
להוכיח את משפט $Fubini$:

(10 נקודות) (i) הפונקציות $\varphi(x'),\ \ \psi(x'')$ רציפות (ולכן אינטגרביליות) ב-$Q',\ Q''$ בהתאמה.

(20 נקודות) (ii) מתקיים:

$$\int_{Q'}\varphi(x')dx'=\int_{Q''}\psi(x'')dx''=\int_{Q}f.$$

2) (10 נקודות) א) יהי $\Omega\subseteq R^n$ תחום פתוח, חסום וקשיר. להוכיח כי אם $C\subset\subset\Omega$ היא קבוצה קומפקטית המוכלת בתחום, אזי קיימת קבוצה פתוחה V בעלת סגור קומפקטי כך ש-
$C\subset\subset V\subseteq\overline{V}\subset\subset\Omega$.

(10 נקודות) ב) להגדיר את המושג "כיסוי פתוח סופי לוקאלית" של התחום Ω (כמו בסעיף הקודם) ולהוכיח את הטענה הבאה.
אם $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ הוא כיסוי פתוח סופי לוקאלית של Ω, כך שהסגורים הם קומפקטיים, כלומר, $\overline{W_j}\subset\subset\Omega,\quad j=1,2,...$, אזי קיים כיסוי פתוח סופי לוקאלית $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ (של התחום Ω) כך ש-
$\overline{U_j}\subset\subset W_j,\quad j=1,2,...$.

(10 נקודות) ג) נתון $\delta>0$. להוכיח כי קיים כיסוי פתוח סופי לוקאלית של התחום Ω על ידי כדורים ברדיוס קטן מ- δ.

3) (20 נקודות) א) יהי $F(x,y)=(f(x,y),\ g(x,y))$ שדה גזיר ברציפות במלבן (מישורי) פתוח $Q=(a,b)\times(c,d)$. להוכיח כי השדה משמר במלבן אם ורק אם מתקיים התנאי

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\equiv 0.$$

(10 נקודות) ב) יהי $\Omega \subseteq R^2$ תחום מישורי חסום בעל שפה חלקה , שהיא מסילה פשוטה סגורה.
נתונות פונקציות חלקות $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ המוגדרות בסביבת $\overline{\Omega}$, כלומר בתחום Ω^0 פתוח המכיל את $\overline{\Omega}$.

נתון כי $h(x,y)$ מתאפססת על השפה של Ω, כלומר $h(x,y)=0, (x,y)\in\partial\Omega$.
להוכיח כי

$$\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)h(x,y)+f(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}-g(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}\right]dxdy=0.$$

המשך מעבר לדף <==

<u>פרק ב':</u> לענות על שלוש מחמש השאלות הבאות. כל שאלה= 15 נקודות.
(בבדיקה יילקחו בחשבון רק שלוש שאלות עם הניקוד הגבוה ביותר).

4) תהיינה f, g פונקציות אינטגרביליות ב-Ω (בפרט חסומות). להוכיח כי המכפלה $f\cdot g$ היא אינטגרבילית וכי מתקיים

$$\int_{\Omega}|f\cdot g|\le\left(\int_{\Omega}f^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\Omega}g^2\right)^{1/2}.$$

5) לחשב את האינטגרל הכפול $\iint_D \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ כאשר
D הוא רבע עיגול היחידה $x^2+y^2<1$ הנמצא ברביע הראשון.

6) נתונה תיבה $Q=(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)$ ומספר סופי של תיבות Q_i שאין לאף שתיים מהן נקודות פנימיות משותפות ו-$\bigcup_i Q_i = Q$. נתון כי לכל תיבה Q_i יש לפחות צד אחד שאורכו מספר טבעי.
להוכיח כי גם לתיבה הגדולה Q יש צד אחד שאורכו טבעי (כלומר, b_j-a_j הוא מספר טבעי לפחות עבור אינדקס אחד $1\le j\le n$).

7) לחשב את $\int_\gamma x^2ydx-(x+y)dy$ כאשר:
γ הוא קטע הפרבולה $x=2y^2$ המחבר את הראשית $(0,0)$ לנקודה $(2,1)$.

8) לחשב את $\int_\gamma -\frac{3yx^2}{x^6+y^2}dx+\frac{x^3}{x^6+y^2}dy$ כאשר $\gamma=\{(x,y), x^2+y^2=1\}$ הוא מעגל היחידה הסגור (נגד כיוון השעון).

בהצלחה!!!

.