

בוחר בחשבון אינפיניטסימלי מתקדם.

זמן: שעתיים.

עליכם לענות על ארבע מתוך שש השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
עליכם לצטט בדיוקנות כל משפט עליו אתם מסתמכים.

1) למצוא את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y$$

בחצי העיגול הסגור

$$\{(x, y), x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0\}$$

2) (א) לכתוב את משוואת המישור המשיק למישטח $x^3 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0$ בנקודה $(1,1,1)$ (יש להסביר מדוע המשוואה מגדירה מישטח).

(ב) יהי C קו החיתוך של המישטח עם המישור $x + y + z = 3$. לכתוב את משוואת הישר המשיק ל- C בנקודה $(1,1,1)$.

3) נגדיר במישור פונקציה ממשית $g(x, y) = \max\{|7x - 5y|, |5x - 7y|\}$

(א) להראות כי היא רציפה וכי קיים קבוע $C > 0$ כך שלכל שתי נקודות $(u, v), (w, z)$ במישור מתקיים:

$$|g(u, v) - g(w, z)| \leq C \sqrt{(u - w)^2 + (v - z)^2}$$

(ב) האם הפונקציה g דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$?

4) תהי f פונקציה רציפה ממשית על $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית. להוכיח כי קיימות נקודות $\xi, \eta \in K$ כך שלכל $x, y \in K$ מתקיים $\sin(f(x) + f(y)) \leq \sin(f(\xi) + f(\eta))$.

5) תהי $f(x, y)$ פונקציה ממשית המוגדרת על המישור \mathbb{R}^2 על-ידי:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, y = 0. \\ \frac{\sin y}{y}, & y \neq 0, x = 0. \\ \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0. \\ 1, & x = y = 0. \end{cases}$$

(א) למצוא את הנקודות בהן הפונקציה אינה רציפה (אם יש כאלה).

(ב) האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$?

6) תהי $f(x)$ פונקציה ממשית רציפה על \mathbb{R}^n . נגדיר את הפונקציה הרציפה:

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |x|^2 + f(x)^2}$$

להוכיח כי $|g(x)|$ מקבלת מקסימום מוחלט, כלומר קיימת נקודה $x_0 \in \mathbb{R}^n$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$

$$|g(x)| \leq |g(x_0)|$$

האם עובדה זו נכונה בהכרח גם עבור $g(x)$ (ללא ערך מוחלט)?

בהצלחה!!!