דף תרגילים מס' 9 באינפי מתקדם 2----מאי 2016

להלן $\gamma(s)$ מסילה חלקה ב- R^3 לפי פרמטר האורך.
מסמנים ב- $\Sigma(s)=\{\kappa(s),\tau(s),T(s),N(s),B(s)\}$ את נתוני Frenet-Serret כאשר s פרמטר האורך.

1. לחשב את $\Sigma(s)$ עבור:
א) הספירלה $\gamma(s)=(r\cos(\omega s),r\sin(\omega s),h\omega s)$ כאשר h,ω,r קבועים חיוביים.
ב) הקו $\gamma(s)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{1+s^2},2s,\log(s+\sqrt{1+s^2}))$.

2. א) להוכיח כי $\gamma(s)$ הוא קו ישר אם"ם כל המשיקים למסילה הם מקבילים.

ב) להוכיח כי $\gamma(s)$ הוא קו ישר אם"ם קיימת נקודה $x_0\in R^3$ כך שלכל
s $\gamma(s)-x_0 \| T(s),$ (מקבילים).
הדרכה: כדי להוכיח שהתנאי מספיק מנסים להוכיח $\kappa(s)\equiv 0$.

3. א) להוכיח כי $\gamma(s)$ נמצא על כדור (ספירה) אם"ם קיימת נקודה $x_0\in R^3$ הנמצאת במישור הנורמלי ל- $\gamma(s)$ (כלומר, זה העובר ב- $\gamma(s)$ ונפרש על ידי $N(s),B(s)$) לכל s.
ב) להוכיח כי אם $\gamma(s)$ נמצא על כדור (ספירה) אזי $\kappa(s)\neq 0$.
ג) להראות כי העקום (פרמטריזציה שאינה אורך)
$$\gamma(\theta)=(-\cos(2\theta),-2\cos(\theta),\sin(2\theta))$$
נמצא על כדור.
(רמז: להסתכל בנקודה $(-1,0,0)$).

4. יהי $\gamma(s)$ קו שעבורו $\kappa(s)\neq 0$. להוכיח כי קיים $w(s)\in R^3$ כך ש-:

$T'(s)=w(s)\times T(s),\ N'(s)=w(s)\times N(s),\ B'(s)=w(s)\times B(s)$ (מכפלות וקטוריות ב- R^3). הווקטור $w(s)$ נקרא וקטור $Darboux$.
הצעה: לנסות $w(s)=\kappa(s)B(s)+\tau(s)T(s)$

5. יהי $\gamma(s)$ קו חלק המוכל בספירה $|\gamma(s)-a|=r,\ a\in R^3$ (ולכן $\kappa(s)\neq 0$). נניח גם כי $\tau(s)\neq 0$. להוכיח כי:
$$r^2\equiv\frac{1}{\kappa(s)^2}+\left(\frac{\kappa'(s)}{\tau(s)\kappa(s)^2}\right)^2.$$

השאלה הבאה היא שאלת רשות המטפלת בהגדרה הקלאסית של עקמומיות מסילות מישוריות. לשים לב כי במקרה זה (בניגוד לעקמומיות המופיעה במערכת Frenet-Serret) העקמומיות יכולה להיות גם שלילית ולהסביר מדוע זה כך.

6. תהי $\gamma(t)=(x(t),y(t)),\quad t\in(a,b)$ מסילה חלקה במישור. נניח כי הנגזרות $\gamma'(t),\quad \gamma''(t)$ רציפות ו- $\gamma'(t)\neq 0,\quad t\in(a,b)$. נגדיר את פרמטר האורך על ידי

$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\gamma'(u)|\,du,\quad t_0\in(a,b)$ ונתייחס למסילה כ- $\gamma(s)=(x(s),y(s)),\quad s\in(\alpha,\beta)$.

מעתה כל הנגזרות יהיו ביחס לפרמטר האורך אלא אם כן נאמר אחרת.

א) להוכיח כי $|\gamma'(s)|\equiv 1$.

ב) נגדיר את הנורמל למסילה כווקטור היחידה $n(s)$ כך ש- $\gamma'(s),n(s)$ היא מערכת ימנית, כלומר, $\det(\gamma'(s),n(s))=1$. להראות כי $n(s)=(-y'(s),x'(s))$.

ג) להראות כי המכפלה הסקלרית $\gamma'(s)\cdot\gamma''(s)=0$ ולהסיק כי $\gamma''(s)=k(s)n(s)$ כאשר $k(s)$ פונקציה סקלרית רציפה.

הגדרה: הפונקציה $k(s)$ נקראת **העקמומיות הסקלרית** של המסילה. הפונקציה $r(s)=\dfrac{1}{|k(s)|}$ נקראת **רדיוס העקמומיות** של המסילה.

ד) לחשב את העקמומיות הסקלרית של קטע ישר.

ה) לחשב את העקמומיות הסקלרית של מעגל ברדיוס $r>0$.

ו) להוכיח כי $k(s)=x'(s)y''(s)-y'(s)x''(s)$.

ז) תהי $\theta(s)\in[-\pi,\pi]$ הזווית שיוצר המשיק $\gamma'(s)$ עם ציר x החיובי. להוכיח כי $k(s)=\theta'(s)$. מה המשמעות הגיאומטרית של שוויון זה?

ח) תהי $y=y(x),\quad x\in[a,b]$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ותהי $\gamma(x)=(x,y(x)),\quad x\in[a,b]$ המסילה שהיא הגרף של הפונקציה (מובן כי הפרמטר x אינו פרמטר האורך). את עקמומיות המסילה בנקודה $(x,y(x))$ נסמן כ- $k(x)$. להוכיח כי

$$k(x)=\frac{y''(x)}{(\sqrt{1+y'(x)^2})^3}.$$

ט) לחשב את העקמומיות של הפרבולה $y(x)=x^2$.

י) לחשב את העקמומיות של האליפסה הנתונה בצורה פרמטרית על ידי $x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi,\quad \varphi\in[0,\pi]$ (לשים לב כי φ אינה הזווית בין הקטע מהראשית לנקודה (x,y) וציר x).

תשובה: $\dfrac{ab}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$.