דף תרגילים מס' 8 באינפי מתקדם 2----מאי 2016

סימון: $\Omega \subseteq R^n$ תחום פתוח וקשיר.
$B(0,r)$ הכדור הפתוח ברדיוס $r>0$ שמרכזו בראשית.

סימון מקובל:

באינטגרל קווי של שדה וקטורי $F(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))$ במישור נרשום את $\int_\gamma F\cdot dl$ כ- $\int_\gamma F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy$.

באינטגרל קווי של שדה וקטורי $F(x,y,z)=(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$ במרחב תלת-מימדי נרשום את $\int_\gamma F\cdot dl$ כ- $\int_\gamma F_1(x,y,z)dx+F_2(x,y,z)dy+F_3(x,y,z)dz$

1. האם כל שני מעגלים המוכלים בכדור $B(0,r)$ הם הומוטופיים (בתוך הכדור)? להניח כי המעגלים הם מסילות פשוטות סגורות (הנקודה הכפולה היחידה היא נקודת ההתחלה=נקודת הסיום).

2. להוכיח כי יחס ההומוטופיה (של מסילות סגורות ב- $\Omega \subseteq R^n$) הוא יחס שקילות.

3. להוכיח כי המרחב התלת-מימדי (המנוקב בראשית) הוא פשוט-קשר.

4. לחשב את האינטגרל הקווי $a,b>0$, $\int_\gamma \frac{-y}{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}dx+\frac{x}{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}dy$ כאשר

א) $\gamma(t)$ היא המסילה האליפטית הסגורה בכיוון נגד השעון $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$.

ב) $\gamma(t)$ היא המסילה הסגורה בכיוון נגד השעון שהיא שפת הריבוע $-1\le x\le 1, -1\le y\le 1$.

ג) $\gamma(t)$ היא המסילה המעגלית הסגורה בכיוון נגד השעון $x^2+y^2=1$.

5. נתון שדה משמר גזיר ברציפות במישור $F(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$. מהו התנאי (או תנאים) כדי שהשדה $G(x,y)=(\exp(f(x,y)),\exp(g(x,y)))$ יהיה אף הוא משמר?

6. נתון שדה וקטורי רציף $F:\Omega\to R^n$. להוכיח כי השדה הוא משמר מקומית אם ורק אם מתקיים התנאי הבא:
לכל מסילה חלקה למקוטעין $\gamma(t), t\in[a,b]$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\eta(t), t\in[a,b]$ היא מסילה חלקה למקוטעין הקרובה ל- $\gamma(t)$, כלומר $\max_{t\in[a,b]}|\gamma(t)-\eta(t)|<\delta$
אזי $|\int_\gamma F\cdot dl-\int_\eta F\cdot dl|<\varepsilon$.
(במלים אחרות: אינטגרל של שדה משמר מקומית "רציף" ביחס למסילה).

7. א) להראות כי האינטגרל הקווי במישור

$\int_\gamma e^{y^2-x^2}\left[\cos(2xy)dx+\sin(2xy)dy\right]=0$ על כל מסילה סגורה (חלקה למקוטעין).

ב) להשתמש בסעיף הקודם כאשר γ היא שפת המלבן $[0,a]\times[0,b]$. על ידי לקיחת הגבול $a\to\infty$ לקבל את הנוסחה (עבור האינטגרל הלא אמיתי):

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

8. יהי $\Omega=R^3\setminus\Lambda$ כאשר $\Lambda=\{(x,y,z),z=0,\ x^2+y^2=1\}$. להראות כי התחום אינו פשוט קשר ולמצוא בו שדה משמר מקומית שאינו משמר.

9. יהי $\Omega\subseteq R^n$ תחום קמור. להוכיח כי כל שדה משמר מקומית בתחום הוא משמר.