דף תרגילים מס' 7 באינפי מתקדם 2----אפריל 2016

סימון: $\Omega \subseteq R^n$ **תחום פתוח וקשיר.**
$B(0,r)$ **הכדור הפתוח ברדיוס** $r>0$ **שמרכזו בראשית.**

סימון מקובל:

באינטגרל קווי של שדה וקטורי $F(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))$ **במישור נרשום את** $\int_\gamma F\cdot dl$ **כ-** $\int_\gamma F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy$ **.**

באינטגרל קווי של שדה וקטורי $F(x,y,z)=(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$ **במרחב תלת-מימדי נרשום את** $\int_\gamma F\cdot dl$ **כ-** $\int_\gamma F_1(x,y,z)dx+F_2(x,y,z)dy+F_3(x,y,z)dz$

1. "פונקציית הארגומנט" במישור מוגדרת על ידי:

$$\theta=\arg(x,y)=\begin{cases} Arc\tan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x,y>0 \\ \dfrac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\dfrac{x}{y}\right), & x<0, y>0 \\ \pi+Arc\tan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x<0, y<0, \\ 2\pi+Arc\tan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x>0, y<0 \end{cases} ,$$

כאשר - $Arc\tan u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ הוא ה"ענף הראשי".

א) להוכיח כי הפונקציה גזירה ברציפות במישור שממנו מוציאים את ציר- x - האי-שלילי - $R^2\setminus[0,\infty)$. (יש ראשית להראות תחילה רציפות על הצירים).

ב) לחשב את הגרדיינט שלה.

ג)לתת הסבר לקשר בין התשובה הקודמת לבין $\oint_\gamma F\cdot dl$ כאשר $F(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ ו- γ מסילה סגורה המקיפה את הראשית.

2. להוכיח כי השדה $F(x,y,z)=(yz,zx,xy)$ הוא משמר ב- R^3 ולמצוא את פונקציית הפוטנציאל שלו.

3. תהי $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ סידרת שדות משמרים (ורציפים) ב- Ω המתכנסת במידה שווה לשדה F , בכל קבוצה קומפקטית $K\subseteq\Omega$.

א) להוכיח כי השדה F משמר.

ב) להוכיח כי ניתן לבחור פונקציות פוטנציאל $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ מתאימות לסידרת השדות, כך שהגבול $\lim_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$ קיים במידה שווהבכל קבוצה קומפקטית ב- Ω והפונקציה הגבולית φ היא פונקצית פוטנציאל של F.

4. קואורדינטות קוטביות במישור מוגדרות על ידי:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\arg(x,y),\quad (x,y)\neq(0,0)$$

שדה ווקטורי F במישור המנוקב בראשית $R^2\setminus(0,0)$ נקרא "רדיאלי" אם הוא מהצורה $e_r=e_1\cos\theta+e_2\sin\theta,\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad F(x,y)=f(r)e_r$, כאשר $f:(0,\infty)\to R$ פונקציה רציפה.

(e_1,e_2 ווקטורי יחידה בכיווני הצירים). להוכיח כי כל שדה רדיאלי הוא משמר ולמצוא את הפוטנציאל שלו.

האם שדה רדיאלי במרחב התלת-מימדי (המנוקב בראשית) גם כן משמר?

5. לחשב את $\int_\gamma -\sin y dx+x\cos y dy$ כאשר המסילה γ היא קטע המעגל $(x-1)^2+y^2=1$ (בחצי המישור העליון) המחבר את $(0,0),(2,0)$.

6. א) יהי F שדה ווקטורי ב- R^n ו- $\gamma\subseteq R^n$ מסילה חלקה למקוטעין. תהי $\Phi:R^n\to R^n$ העתקה ליניארית מהצורה $\Phi(x)=Ax+b$ כאשר $b\in R^n$ ו- A מטריצה **אורתוגונלית**. תחת הטרנספורמציה נקבל שדה ומסילה חדשים על ידי:

$$G(x)=AF(\Phi^{-1}(x)),\quad \lambda(t)=\Phi(\gamma(t)).$$

להוכיח כי $\int_\lambda G\cdot dl=\int_\gamma F\cdot dl$.

ב) להוכיח כי אם T הוא משולש מישורי אזי שיטחו נתון על-ידי $S=\int_{\partial T}xdy$ כאשר עוברים על שפת המשולש נגד כיוון השעון.

הצעה: מספיק לבדוק משולש ישר זווית בעל צלעות ניצבות המקבילות לצירים.

7. לחשב את האינטגרל הקווי $\int_\gamma \frac{-2x\sin y}{(x^2+1)^2}dx+\frac{\cos y}{x^2+1}dy$ כאשר $\gamma(t)=\{(t\cos t,t\sin t),\quad t\in[0,6\pi]\}$.

8. לחשב את האינטגרל הקווי $\int_\gamma \sin(x^2+y^4)dx+x^2ydy$ כאשר $\gamma(t)=\{(\cos(t^2+t-1),\sin(t^2+t-1)),\quad t\in[0,1]\}$.

9. (שאלת רשות) למצוא דוגמה לסידרת מסילות חלקות למקוטעין $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\Omega$ ושדה ווקטורי F רציף בתחום, כך שסידרת המסילות מתכנסת במידה שווה למסילה חלקה γ (מה פירוש הדבר?) אבל $\lim_{k\to\infty}\int_{\gamma_k}F\cdot dl\neq\int_\gamma F\cdot dl$ (או שהגבול בכלל לא קיים).