דף תרגילים מס 6 באינפי מתקדם 2 – אפריל 2016

1. להראות כי השוויון

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

מתקיים בשני המקרים הבאים:

א) $V(x,y,z)=e^{3x+4y}\ \cos(5z)$

ב) $V(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

הערה: פונקציה המקיימת את השוויון הזה נקראת **פונקציה הרמונית.**

2. תהיינה $f,g:R\to R$ פונקציות גזירות פעמיים ברציפות (כלומר, נגזרותיהן מסדר ראשון ושני קיימות ורציפות). נסתכל בפונקציה $u:R^2\to R$ המוגדרת על-ידי:
$u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$ כאשר $c\in R$ קבוע. להוכיח כי $u(x,t)$ מקיימת את הזהות:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ בכל נקודה במישור (x,t).

הערה: הזהות הזאת היא "משוואת הגלים" הידועה. במצב זה הקואורדינטה $x\in R$ היא קואורדינטת המרחב ואילו t הוא הזמן. האם ניתן לראות את הפונקציה $u(x,t)$ כסכום של שני גלים הנוסעים במהירות קבועה בכיוונים מנוגדים?

3. למיין את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$.
4. למיין את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)=x^2-3x^2y+y^3$.

5. תהי $f(x,y)\in C^2(D)$ כאשר $D\subseteq R^2$ תחום פתוח. נסמן
$$H(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}$$
(מטריצה 2×2). להוכיח כי $H(x_0,y_0)>0$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2(x_0,y_0)>0.$$

6. למצוא דוגמה לפונקציה לא רציפה שנגזרותיה החלקיות מכל סדר (מעורבות וטהורות) קיימות.

7. נתבונן בפונקציה (בשני משתנים):

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad f(0,0)=0.$$

א) להוכיח כי הפונקציה רציפה בכל נקודה במישור.

ב) להוכיח כי הנגזרות המעורבות מסדר 2 קיימות ב- $(0,0)$ ומתקיים:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) = 1, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = -1 .$$

כיצד אי-שוויון הנגזרות המעורבות בדוגמה זאת מתיישב עם המשפט הכללי בדבר שוויון הנגזרות המעורבות?

8. תהי $A \in M_{n \times n}$ מטריצה $n \times n$ ממשית סימטרית. להוכיח כי

א) המספר $\lambda = \min\left\{h^T Ah, \quad h \in S^{n-1}\right\}$ הוא הערך העצמי הקטן ביותר של A.

ב) המטריצה היא חיובית בהחלט אם ורק אם $\lambda > 0$.

9. ("רציפות ערכים עצמיים"): תהי $A \in M_{n \times n}$ מטריצה $n \times n$ ממשית סימטרית ונניח כי ערכיה העצמיים (הממשיים, כמובן) זרים בזוגות. נסדר אותם בסדר עולה: $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$.

להוכיח: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $B \in M_{n \times n}$ מטריצה $n \times n$ ממשית סימטרית המקיימת $\| B - A \| < \delta$ (נורמה אופרטורית) אזי:

הערכים העצמיים (הממשיים, כמובן)של B זרים בזוגות, ואם נסדר אותם בסדר עולה $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n$ הם יקיימו $1 \le i \le n \quad | \mu_i - \lambda_i | < \varepsilon,$.

<u>הדרכה:</u> לפי משפט הפונקציה הסתומה כל ערך עצמי ניתן לחילוץ כפונקציה רציפה של איברי המטריצה. איפה נכנסת ההנחה שהערכים שונים בזוגות?

10. לחשב את האינטגרלים הבאים על המלבן $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq R^2$:

<u>תזכורת</u>: האינטגרל על התיבה מוגדר על ידי:

$$\int_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx .$$

א) $\int_Q \sin(x+y)$.

ב) $\int_Q xe^{xy}$.

ג) $\int_Q \frac{1}{xy \log x}$, כאשר $a > 1, \quad c > 0$.

11. (משפט גזירת אינטגרל לפי פרמטר) תהי $f(x,y) : [a,b] \times [c,d] \to R$ רציפה ונניח כי $g(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ קיימת ורציפה במלבן.

נגדיר: $F(y) = \int_a^b f(x,y) dx$. להוכיח כי $F'(y) = \int_a^b g(x,y) dx$.

הדרכה: לרשום $F(y) = \int_a^b [\int_c^y g(x,t) dt + f(x,c)] dx$.

12. (שאלת רשות קשה)) תהי $U \subseteq R^3$ קבוצה פתוחה ו- $f,g,h \in C^1(U)$ שלוש פונקציות ממשיות.
יהי $B(p,\delta) \subseteq U$ כדור פתוח שבו הדרגה של המטריצה היעקוביאנית

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

שווה ל-2 בכל

נקודה של הכדור. להוכיח כי קיים $0 < \delta' < \delta$ כך שההעתקה $\begin{pmatrix} u = f(x,y,z) \\ v = g(x,y,z) \\ w = h(x,y,z) \end{pmatrix}$ המוגדרת על

$(x,y,z) \in B(p,\delta')$ מגדירה מישטח ב- $R^3{}_{(u,v,w)}$.

הסבר: זהו מקרה "משלים" למשפט הפונקציות ההפוכות. לו היתה הדרגה 3 ההעתקה היתה חח"ע על קבוצה פתוחה.

הצעה: להחליף שתים מן הקואורדינטות (x,y,z) בשתים מן (u,v,w). הדרגה לא משתנה.