דף תרגילים מס 5 באינפי מתקדם 2 –אפריל 2016

1. א) תהיינה $F(x,y,z), G(x,y,z)$ שתי פונקציות גזירות ברציפות בסביבת נקודה $(x_0,y_0,z_0)\in R^3$ ונניח כי
$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0, \nabla G(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ וכן כי הגרדיינטים אינם מקבילים.
מתוך משפט הפונקציות הסתומות להראות כי חיתוך משטחי הגובה
$F(x,y,z)=F(x_0,y_0,z_0), G(x,y,z)=G(x_0,y_0,z_0)$ מהווה עקומה (מסילה) γ בסביבת (x_0,y_0,z_0).
למצוא וקטור משיק לעקומה הזאת בנקודה, תוך שימוש בשני הגרדיינטים.

ב) למצוא וקטור בעל אורך $\sqrt{3}$ בכיוון משיק לעקום החיתוך של החרוט האליפטי $z^2=4x^2+9y^2$ והמישור $6x+3y+2z=5$ בנקודה $(2,1,-5)$.

2. $M_{n\times n}$ -- המרחב של המטריצות הריבועיות $n\times n$, הוא מרחב מטרי (למעשה נורמי), בהינתן נורמה כלשהי. כיוון שכל הנורמות שקולות, הקבוצות הפתוחות במרחב אינן תלויות בנורמה שנבחרת— להוכיח!

א) תהי $\|\bullet\|$ נורמה אופרטורית על $M_{n\times n}$ (ביחס לנורמה נתונה על R^n). להראות כי אם $\|A\|<1$ אזי הטור $I+A+A^2+...+A^k+...$ מתכנס וסכומו הוא המטריצה ההפוכה ל-$I-A$.

ב) להוכיח כי קבוצת המטריצות הריבועיות $n\times n$ ההפיכות היא פתוחה ב-$M_{n\times n}$.

ג) להוכיח כי ההעתקה $A\to A^{-1}$ (על המטריצות ההפיכות) היא רציפה (לשים לב כי גם מושג הרציפות אינו תלוי בנורמה)..

3. לבדוק את ההתנהגות הלוקאלית והגלובאלית של ההעתקות הבאות במישור:
א) $u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$
ב) $u=x^2+2xy+y^2,\quad v=2x+2y$
ג) $u=x+y,\quad v=2xy^2$.

4. יהי Q הטטראדר
$$(x,y,z)\in R^3,\quad 0<x,y,z,\quad x+y+z<1$$
להוכיח כי ההעתקה $(x,y,z)\to\xi,\eta,\varsigma$ הנתונה על ידי:
$$\xi=x+y+z,\quad \xi\eta=y+z,\quad \xi\eta\varsigma=z$$
מעבירה באופן חח"ע את Q על קוביית היחידה
$$U=\{(\xi,\eta,\zeta),\quad 0<\xi,\eta,\zeta<1\}$$
ולחשב את היעקוביאן $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}$ על ידי הרכבת ההעתקות
$$(\xi,\eta,\zeta)\to(x+y+z,y+z,z)\to(x,y,z)$$
(או בכל דרך אחרת).

5. למצוא דוגמה להעתקה $f:R^2\to R^2$ כך ש-:
א) ההעתקה היא גזירה ברציפות וחח"ע מהמישור על עצמו.
ב) ההעתקה ההפוכה רציפה בכל נקודה.

ג) קיימות נקודות בהן ההעתקה ההפוכה אינה דיפרנציאבילית.

6. א) תהי $f:R\to R$ פונקציה ממשית רציפה וחד-חד-ערכית לוקאלית (כלומר, חח"ע בסביבה מספיק קטנה של כל נקודה). להוכיח כי היא חח"ע גלובאלית, כלומר, $f(t)\neq f(s) \quad \Rightarrow \quad t\neq s$.

ב) להראות על ידי דוגמה מתאימה כי העתקה רציפה וחח"ע לוקאלית במישור אינה חייבת להיות חח"ע גלובאלית.

7. תהי $f:R^n\to R^n$ העתקה גזירה ברציפות ונסמן (כרגיל) ב- $Df(x)$ את הדיפרנציאל שלה ב- $x\in R^n$. נניח כי בנורמה אופרטורית מסויימת $\|.\|$ הפונקציה $\|Df(x)\|$ חסומה במידה שווה ב- $x\in R^n$. להוכיח כי אין סידרה $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}\subseteq R^n$ כך ש-:

$|x_j|\to\infty$ ו- $\dfrac{|f(x_j)|}{|x_j|}\to\infty$ כאשר $j\to\infty$ ($|.|$ היא הנורמה האוקלידית).

8. למצוא את $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$ מתוך מערכת המשוואות $x=t+t^{-1}\ ,\ y=t^2+t^{-2}\ ,\ z=t^3+t^{-3}\ ,\ t>0$. יש להצדיק את הצעדים בעזרת משפטים מתאימים.

תשובה: $t\neq 1$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=2(t+t^{-1})\ ,\ \dfrac{dz}{dx}=3(t^2+t^{-2}+1),$.

9. למצוא את היעקוביאן של u,v כפונקציות של x,y מתוך המשוואות:

$$xu-yv=0$$

$$yu+xv=1\ .$$

10. למצוא תנאים המאפשרים לחלץ את x,y כפונקציות של z מתוך המערכת $x^2+y^2+z^2=1 \qquad x+y+z=0,$ בסביבת נקודה (x_0,y_0,z_0) ולרשום את הנגזרות החלקיות המתאימות.

(תשובה: $x_0\neq y_0$. $\quad \dfrac{dx}{dz}=\dfrac{y-z}{x-y} \quad , \quad \dfrac{dy}{dz}=\dfrac{z-x}{x-y}$.)

11. נתבונן בהעתקה הליניארית $f(x)=Ax+b \quad , f:R^n\to R^n,$ כאשר $A\in Hom(R^n,R^n)$.
להוכיח כי ההעתקה פתוחה אם ורק אם A מטריצה הפיכה.

12. לבדוק האם אפשר לקבל את u,v כפונקציות של x,y,z מתוך זוג המשוואות:
$u^3yz+2xv-u^2v^2=2 \qquad xy^2+xzu+yv^2=3,$ בסביבת הנקודה $(x,y,z,u,v)=(1,1,1,1,1)$.

13. יהיו f,g פונקציות ממשיות גזירות ברציפות על הישר, כאשר $f(1)=g(1)=0$. למצוא תנאים כך שמתוך המשוואות:

$$f(xy)+g(yz)=0, \quad g(xy)+f(yz)=0$$

ניתן לפתור את y,z כפונקציות של x בסביבת $(x,y,z)=(1,1,1)$.

14. למצוא את הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ של הפונקציה $z = f(x,y)$ הנתונה על-ידי $x = u + \log v, y = v - \log u, z = 2u + v \ , (u,v > 0)$. יש להצדיק את כל הצעדים.

תשובה: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2u+1)v}{uv+1}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(v-2)u}{uv+1}$.

15. למצוא את משוואת המישור המשיק למישטח הנתון על-ידי:
$x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$ בנקודה $(u,v) = (0,1)$.

תשובה: $3y - 2z - 1 = 0$.

16. (שאלה יותר קשה) יהי $D = \{(x,y), x^2 + y^2 < 1\}$ עיגול היחידה הפתוח ב- R^2 ותהי $f : D \to R^2$ העתקה גזירה ברציפות המקיימת לכל נקודה p בעיגול $|f(p) - p| < \frac{1}{4}$ (בנורמה אוקלידית). להוכיח כי אם הדיפרנציאל של f רגולרי בכל נקודה אזי קיימת נקודה $q \in D$ כך ש- $f(q) = 0$.