

דף תרגילים מס 4 באינפי מתקדם 2 – אפריל 2016

1. למצוא את הנפח המקסימלי של תיבה החסומה באליפסואיד

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(כל קודקודי התיבה מונחים על האליפסואיד וצלעותיה מקבילות לצירים).

2. (א) עבור משולש במישור, למצוא את הנקודה שסכום ריבועי מרחקיה מן הקודקודים הוא מינימלי. (ב) לעשות זאת כאשר מחליפים את המשולש במרובע.

3. (א) יהי $Ax + By + Cz + D = 0$ מישור ו- $P = (x_0, y_0, z_0)$ נקודה שאינה עליו. למצוא את הנקודה הקרובה ביותר (במרחק אוקלידי) ל- P במישור.

(ב) אותה שאלה, כאשר המישור מוחלף באליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(ג) הפתרונות לעיל התקבלו בשיטה אנליטית. מהו ההסבר הגיאומטרי?
(ד) לחפש טענה מתאימה (בדבר המרחק המינימלי מנקודה נתונה) למשטחים כלליים יותר.

4. (א) שיטת הריבועים המינימליים: נתונות n נקודות במישור: $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. למצוא את הישר

$$y = mx + b$$

כך שסכום הריבועים $\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$ הוא מינימלי.

(ב) בתנאי הסעיף הקודם, להוכיח כי קיים ישר $y = mx + b$ שסכום ריבועי מרחקיו (האורתוגונליים) מן הנקודות הוא מינימלי. לנסח (אך לא לפתור) את המשוואות הנחוצות למציאת הישר.

5. על-ידי הסתכלות בפונקציה $z = x^2 + (1-x)^3 y^2$ להסיק כי קיים מישטח כך ש-:

- (א) יש לו מינימום לוקאלי יחיד.
- (ב) אין לו מקסימום לוקאלי.
- (ג) אין לו מינימום גלובאלי.

רצוי לתאר את המישטח בעזרת תוכנה גראפית כלשהי על-מנת להבין כיצד זה אפשרי.

6. נתונה פיסת קרטון. מה הנפח המקסימלי של תיבה פתוחה שניתן לעשות ממנה (כלומר, ארבע פיאות צדדיות ובסיס, אך לא פיאה עליונה).

7. מהו השטח המקסימלי של משולש בעל היקף נתון?

8. (א) יהיו $\alpha, \beta \in (1, \infty)$ כך ש- $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. להוכיח כי לכל $x, y > 0$

$$xy \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{y^\beta}{\beta}$$

הצעה: לבדוק עבור $xy = 1$.

(ב) (אי שוויון הלדר): יהיו $\alpha, \beta \in (1, \infty)$ כך ש- $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ויהיו $\{u_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n$ שתי

n -יות של מספרים חיוביים. להוכיח כי

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^n v_i^\beta \right)^{1/\beta}$$

מהו המקרה המיוחד $\alpha = \beta = 2$?