

דף תרגילים מס 3 באינפי מתקדם 2 – אפריל 2016

1.

- (א) לחשב את הדיפרנציאל של ההעתקה $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (מסילה) הנתונה על-ידי:
 $x = t, y = t^2, z = t^4 - t^3, t \in \mathbb{R}$
 (לשים לב לסימון השונה של רכיבי המסילה שהוא סימון מקובל במצב כזה).
 (ב) למצוא את משוואת הישר המשיק לקו החיתוך של המשטחים (ב- \mathbb{R}^3 !)
 $y = x^2, z = x^4 - x^3$ בנקודה $(1,1,0)$.

2. תהי $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית ו- $\eta > 0$ קבוע. להוכיח כי הקבוצה
 $\{x \in \mathbb{R}^n, \text{dist}(x, C) \leq \eta\}$ היא קומפקטית.

3. יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום טבעתי במישור הנתון על-ידי:

$$D = \{(x, y), 1 < x^2 + y^2 < 5\}$$

- ותהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ממשית רציפה המקיימת: $f(2,0) = 2, f(-2,0) = -1$
 (א) להראות כי קיימת נקודה $(\xi, \eta) \in D$ כך ש- $f(\xi, \eta) = f(-\xi, -\eta)$
 (ב) להראות כי קיימות אינסוף נקודות ב- D שבהן f מתאפסת.
 (ג) להראות כי קיימות אינסוף נקודות ב- D שהן שורשים של המשוואה $f^2 + f = 2$.

4. נתון המישטח

$$z = x^2 + y^2 + 2x$$

- בנקודה $(1,2,7)$ על פניו נמצא כדור קטן. למצוא את הווקטור של כיוון התנועה ההתחלתית של הכדור (תחת גרויטציה).
 הדרכה: הכדור יתגלגל בכיוון הירידה המהירה ביותר של הפונקציה.

5. תהי (x_0, y_0) נקודה כלשהי על האליפסה

$$2x^2 + y^2 = c^2, c > 0$$

- (א) למצוא את משוואת המשיק לאליפסה בנקודה.
 (ב) להראות שהנגזרת המכוונת של הפונקציה

$$z = \frac{y^2}{x}$$

- בכיוון הנורמל לאליפסה בנקודה (x_0, y_0) שווה לאפס.

6. נתונה המשוואה $xy - z \log y + e^{xz} = 1$ בסביבת הנקודה $(0,1,1)$. האם ניתן לחלץ בסביבה את z כפונקציה של (x, y) ? את y כפונקציה של (x, z) ?

7. (א) תהי $f(t), t \in \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות על הישר כך ש- $f(1) = 0, f'(1) \neq 0$. להוכיח כי בסביבת הנקודה $(1,1)$ קיימת פונקציה יחידה גזירה ברציפות $y = g(x), g(1) = 1$ המקיימת את המשוואה $2f(xy) = f(x) + f(y)$.
 (ב) למצוא את הפתרון כאשר $f(t) = t^2 - 1$.

8. תהי $f(x, y)$ רציפה בסביבה $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ של נקודה $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ ומקיימת שם את התנאי הבא:

לכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ קבועה הפונקציה $f(x, y)$, כפונקציה של y , היא מונוטונית עולה ממש.

להוכיח את הטענה הבאה:

טענה: קיים $0 < \delta_1 < \delta$ כך שקבוצת הנקודות בסביבה $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ המקיימות $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ היא גרף של פונקציה רציפה $y = g(x)$, $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.

9. למצוא את שיפוע המשיק לקו $x^2 + xy + y^2 = 7$ בנקודה (1,2).