דף תרגילים מס 2 באינפי מתקדם 2 --מרץ 2016

1. א) לבדוק את רציפות הפונקציה (בכל המישור R^2 אל המישור R^2):

$$g(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\alpha}},\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\alpha}}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

עבור ערכי $\alpha>0$ שונים.

ב) לבדוק את הדיפרנציאביליות של ההעתקה, עבור ערכי $\alpha>0$ שונים.

2. לחשב את הדיפרנציאל של ההעתקה $F:R^2\to R^3$ הנתונה על-ידי:
$F_1(x,y)=x^2-2y,\ F_2(x,y)=x^2-2xy,\ F_3(x,y)=3x^2y-2y$ באופן כללי ובפרט בנקודה $(-3,2)$.

3. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית רציפה על R^n המקיימת את התנאים הבאים:

א) $f(0)>0$.

ב) $f(x)<\dfrac{1}{|x|^2+1},\quad x\in R^n$.

להוכיח כי הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי, כלומר, קיימת $x_0\in R^n$ כך ש-
$f(x)\le f(x_0),\quad \forall x\in R^n$.

4. א) תהי $f(x)$ פונקציה ממשית רציפה על הקטע $[0,1]$. להוכיח כי הגרף

$$G=\{(x,y),\quad y=f(x),0\le x\le 1\}$$

הוא קבוצה קומפקטית ב- R^2.

ב) למצוא דוגמה לפונקציה ממשית לא רציפה $g(x)$ על הקטע $[0,1]$ כך שהגרף שלה קבוצה סגורה ב- R^2.

ג) האם ייתכן למצוא פונקציה כמו בסעיף הקודם (כלומר, לא רציפה) כך שהגרף שלה הוא קומפקטי?

5. יהי $B=B(0,r)$ הכדור הפתוח ב- R^n שמרכזו בראשית ורדיוסו $r>0$.

א) להוכיח כי אם $f:B\to R$ פונקציה ממשית שנגזרותיה החלקיות קיימות וחסומות ב- B אזי היא רציפה בכדור.

ב) להוכיח כי אם $f:B\to R$ פונקציה ממשית שנגזרותיה החלקיות קיימות ומתאפסות זהותית ב- B אזי היא קבועה בכדור.

ג) האם בסעיפים הקודמים ניתן להחליף את הכדור בקבוצה פתוחה כלשהי?

6. נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\sqrt[9]{x}\,\sqrt[9]{y^8}.$$

א) האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$?

ב) אם כן, מהי נגזרתה המכוונת בכיוון $(3,4)$?

7. להראות כי אם $f(t)$ גזירה לכל $t \in R$, אזי הפונקציה $g(x,y) = f(\frac{x-y}{y})$ מקיימת,
עבור $y \neq 0$, $xg_x + yg_y = 0.$.

8. תהי $F(t,s,r)$ פונקציה של שלושה משתנים, בעלת נגזרות חלקיות רציפות שאינן מתאפסות באף נקודה. תהיינה $h(x,y), g(x,z), f(y,z)$ שלוש פונקציות גזירות ברציפות (כל אחת לפי שני המשתנים שלה) כך שמתקיימות הזהויות:
$F(x,y,h(x,y)) = F(x,g(x,z),z) = F(f(y,z),y,z) \equiv 0$. להוכיח כי, בכל נקודה $(x,y,z) \in R^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \equiv -1 .$$

הערה: הפונקציה $F(t,s,r)$ מוגדרת בכל R^3 ואילו $h(x,y), g(x,z), f(y,z)$ מוגדרות בכל R^2, כל אחת לפי שני המשתנים שלה.

9. (שאלת רשות) למצוא פונקציה רציפה $f: R^2 \to R^2$ שאיננה דיפרנציאבילית באינסוף נקודות.