

דף תרגילים מס 11 באינפי מתקדם 2 – יוני 2016

הסימונים כאן בהתאם לרשימות הרצאה מס' 14 בדף המרצה:
http://math.huji.ac.il/~mbartzi/teaching/advanced_calculus.html

(1) נתון המשטח:
 $\Psi(u_1, u_2) = (u_1^2, u_1 u_2, u_2^2)$

לחשב את הסימבולים Γ_{ij}^k של *Christoffel* של המשטח בשתי דרכים:
 (i) כמקדמים בהצגה של $\Psi_{u_i u_j}$ לפי $\Psi_{u_i}, \Psi_{u_j}, n$.
 (ii) מתוך המטריקה בעזרת הנוסחה ה"פנימית" של *Gauss*.

(2) עבור משטח שהוא גרף של פונקציה $\Psi(u_1, u_2) = (u_1, u_2, \psi(u_1, u_2))$
 לחשב את הסימבולים Γ_{ij}^k של *Christoffel* של המשטח בשתי דרכים:
 (i) כמקדמים בהצגה של $\Psi_{u_i u_j}$ לפי $\Psi_{u_i}, \Psi_{u_j}, n$.
 (ii) מתוך המטריקה בעזרת הנוסחה ה"פנימית" של *Gauss*.

(תשובה חלקית): $\Gamma_{11}^1 = \frac{\psi_{u_1} \psi_{u_1 u_1}}{1 + \psi_{u_1}^2 + \psi_{u_2}^2}$

(3) נתון, בקואורדינטות צילינדריות, קו חלק $\gamma(t) = (r(t), z(t))$, $r(t) > 0, z'(t) > 0, t \in (a, b)$.
 להראות כי משטח הסיבוב שהוא מתאר, סביב ציר z , במרחב R^3 בקואורדינטות (x, y, z) , נתון על ידי:

$\Psi(t, \vartheta) = (r(t) \cos \vartheta, r(t) \sin \vartheta, z(t)), t \in (a, b), \vartheta \in (0, 2\pi)$
 (כאן הפרמטריזציה $(u_1, u_2) = (t, \vartheta)$)

מתרגיל קודם הטנסור המטרי הוא:

$$\begin{pmatrix} r'(t)^2 + z'(t)^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$$

(א) להראות כי מקדמי התבנית היסודית השנייה נתונים על ידי:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{r'(t)z''(t) - z'(t)r''(t)}{\sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}} & 0 \\ 0 & r(t)z'(t) \end{pmatrix}$$

(ב) להוכיח כי $\det(L_{ij}) = 0$ אם ורק אם כל קו אורך הוא ישר.

4) נתונה ספירת היחידה בקואורדינטות קוטביות
 $\Psi(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, $0 < \theta < 2\pi$

לחשב את הסימבולים Γ_{ij}^k של *Christoffel* של המשטח בשתי דרכים:

(i) כמקדמים בהצגה של $\Psi_{u_i u_j}$ לפי $\Psi_{u_i}, \Psi_{u_j}, n$.

(ii) מתוך המטריקה בעזרת הנוסחה ה"פנימית" של *Gauss*.

(כאן $u_1 = \varphi, u_2 = \theta$).

5) (להשוות לשאלה 6 בתרגיל 10) נתונות פונקציות ממשיות חלקות $f(t), g(t), t \in R$ כאשר
 $f(t) > 0, t \in R$ ו- $g'(t) \neq 0, t \in R$.

ראינו כי ההצגה הפרמטרית הבאה מגדירה מישטח:

$$\Psi(u_1, u_2) = (f(u_1) \cos u_2, f(u_1) \sin u_2, g(u_1)), (u_1, u_2) \in R \times (0, 2\pi)$$

(א) לחשב את הטנסור המטרי של המישטח.

(ב) לחשב את הסימבולים Γ_{ij}^k של *Christoffel* של המשטח בשתי דרכים:

(i) כמקדמים בהצגה של $\Psi_{u_i u_j}$ לפי $\Psi_{u_i}, \Psi_{u_j}, n$.

(ii) מתוך המטריקה בעזרת הנוסחה ה"פנימית" של *Gauss*.