

דף תרגילים מס 10 באינפי מתקדם 2 – יוני 2016

הסימונים כאן בהתאם לרשימות הרצאה מס' 14 בדף המרצה:

http://math.huji.ac.il/~mbartzi/teaching/advanced_calculus.html

להלן המונחים "טנסור מטרי" ו"מטריקה" הם זהים.

(1) לחשב את המטריקה עבור המשטח:

$$\Psi(u_1, u_2) = (u_1^2, u_1 u_2, u_2^2)$$

(2) נתון, בקואורדינטות צילינדריות, קו חלק $t \in (a, b)$, $\gamma(t) = (r(t), z(t))$,

$$\text{כאשר } r(t) > 0, z'(t) > 0, t \in (a, b)$$

להראות כי משטח הסיבוב שהוא מתאר, סביב ציר z , במרחב R^3 בקואורדינטות (x, y, z) , נתון על ידי:

$$\Psi(t, \vartheta) = (r(t) \cos \vartheta, r(t) \sin \vartheta, z(t)), \quad t \in (a, b), \vartheta \in (0, 2\pi)$$

(כאן הפרמטריזציה $(u_1, u_2) = (t, \vartheta)$)

(א) לחשב את הווקטורים המשיקים לקווי האורך והרוחב (כלומר, $t = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$) ואת הווקטור הנורמל למשטח.

(ב) להראות כי הטנסור המטרי הוא:

$$\begin{pmatrix} r'(t)^2 + z'(t)^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$$

(ג) להסביר מדוע הטנסור המטרי לא תלוי ב- ϑ .

(3) לחשב את המטריקה עבור ספירת היחידה בקואורדינטות קוטביות

$$\Psi(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \quad 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

(4) (א) למצוא את המישטח המתואר על ידי (עבור ערך קבוע $r > 0$)

$$x = \frac{2r^2 u}{u^2 + v^2 + r^2}, \quad y = \frac{2r^2 v}{u^2 + v^2 + r^2}, \quad z = \frac{(u^2 + v^2 - r^2)r}{u^2 + v^2 + r^2}, \quad 0 < u, v < \infty$$

הדרכה: עבור u, v ברביע הראשון במישור להסתכל בקו הישר המחבר אותה לקוטב הצפוני של הספירה ברדיוס r ולחשב את קואורדינטות החיתוך (x, y, z) עם הספירה.

זוהי ההשלכה הסטריאוגרפית.

הערה: כמקובל, סימנו כאן את הפרמטרים ב- $(u, v) = (u_1, u_2)$

(ב) לחשב את המטריקה על S .

(5) נתונה פונקציה חלקה $f: \Omega \rightarrow R$ כאשר $\Omega \subseteq R^3$ הוא תחום. עבור נקודה $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ נתון

$$\text{כי } \nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

(א) להראות כי בסביבת הנקודה המשוואה $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ מגדירה מישטח.

תזכורת: מישטח גובה.

(ב) להראות כי המישור המשיק למישטח הזה בנקודה (x_0, y_0, z_0) הוא הגרעין של הדיפרנציאל:

$$\ker Df(x_0, y_0, z_0)$$

הדרכה: מיהו הדיפרנציאל הזה?

6) נתונות פונקציות ממשיות חלקות $f(t), g(t), t \in R$ כאשר $f(t) > 0, t \in R$ ו- $g'(t) \neq 0, t \in R$.

(א) להראות כי ההצגה הפרמטרית הבאה מגדירה מישטח:

$$\Psi(u_1, u_2) = (f(u_1) \cos u_2, f(u_1) \sin u_2, g(u_1)), (u_1, u_2) \in R \times (0, 2\pi)$$

(ב) להראות כי כל הישרים הנורמליים למישטח חותכים את ציר z .

לשים לב: המישטח מוגדר ב- R^3 לפי קואורדינטות x, y, z .